Є. П. Нелін
Алгебра і початки аналізу

Дворівневий підручник
для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Харків
«Світ дитинства»

УДК 373: [512 + 517]
ББК 22.12я721 + 2.161я721
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11–3169 від 29 червня 2004 р.)

Р е ц е н з е н т и:

М. І. Бурда, член-кореспондент АПН України, доктор педагогічних наук, професор, заступник директора Інституту педагогіки АПН України

В. О. Золотарьов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та інформатики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна

О. М. Роганін, учитель математики вищої категорії, учитель-методист Пісочинського колегіуму Харківського району Харківської області

Х у д о ж н и к *С. Е. Кулинич*

У м о в н і п о з н а ч е н н я в п і д р у ч н и к у

▮	**головне в навчальному матеріалі**
▶	початок розв'язання задачі
◁	закінчення розв'язання задачі
●	початок обґрунтування твердження
○	закінчення обґрунтування твердження

Нелін Є. П.
Н49 Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів.— 2-ге вид., виправ. і доп. — Х.: Світ дитинства, 2006.— 448 с.
ISBN 966-544-385-2.

УДК 373: [512 + 517]
ББК 22.12я721 + 2.161я721

ISBN 966-544-385-2

Передмова для учнів

Ви починаєте вивчати новий предмет «*Алгебра і початки аналізу*», який об'єднує матеріал кількох галузей математичної науки. Як і в курсі алгебри, значну увагу буде приділено перетворенням виразів, розв'язуванню рівнянь, нерівностей та їх систем і розгляду властивостей функцій. Поряд із розв'язуванням знайомих задач, пов'язаних з многочленами, раціональними дробами, степенями і коренями, у 10 класі буде розглянуто нові види функцій: тригонометричні, показникові і логарифмічні та відповідні рівняння і нерівності.

Принципово нова частина курсу — початки аналізу — буде розглядатися в 11 класі. *Математичний аналіз* (або просто аналіз) — галузь математики, сформована в XVIII столітті, яка відіграла значну роль у розвитку природознавства: з'явився потужний, досить універсальний метод дослідження функцій, що виникають під час розв'язування різноманітних прикладних задач.

Кілька зауважень про те, як користуватися підручником.

Система навчального матеріалу підручника з кожної теми представлена на двох рівнях. *Основний матеріал* наведено в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні і може опановуватися учнем самостійно чи під керівництвом учителя при вивченні математики в класах універсального або природничого профілів, а може використовуватися для систематичного вивчення поглибленого курсу алгебри і початків аналізу в класах, школах, ліцеях і гімназіях фізико-математичного профілю.

На початку багатьох параграфів наводяться *довідкові таблиці*, які містять основні означення, властивості та *орієнтири* по пошуку плану розв'язування задач з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач наводяться приклади, у яких, крім самого розв'язання, міститься також *коментар*, що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа пропонується система запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Система вправ до основного матеріалу подана на трьох рівнях. *Задачі середнього рівня* позначені символом «°», дещо складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначень, а *задачі високого рівня* складності позначені символом «*». В підручнику і для багатьох задач поглибленого рівня пропонуються спеціальні орієнтири, які дозволяють опанувати методи їх розв'язування. *Відповіді і вказівки* до більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про походження понять, термінів і символів ви зможете дізнатися, прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника наведено довідковий матеріал.

Передмова для вчителя

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до діючої програми з алгебри і початків аналізу для 10–11 класів з урахуванням програми з алгебри і початків аналізу для 10–12 класів.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника від інших підручників з алгебри і початків аналізу.

Це *дворівневий підручник*, який містить загальний матеріал для класів універсального, природничого та фізико-математичного профілів і додатковий матеріал для класів фізико-математичного профілю. У кожному розділі поряд з параграфами, які призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал, призначений для організації індивідуальної роботи з учнями, що цікавляться математикою. Запропонований додатковий матеріал може використовуватися і для організації навчання алгебри і початків аналізу в профільних класах фізико-математичного профілю або в спеціалізованих школах і класах з поглибленим вивченням математики.

Основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі *довідкових таблиць* на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів по розв'язуванню завдань*. ***У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях***. Тому при поясненні нового матеріалу доцільно використовувати роботу з підручником за відповідними таблицями та рисунками. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може вибирати свій власний рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями. У кожному розділі розв'язанню вправ передує виділення загальних орієнтирів по розв'язуванню таких завдань. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведеться за схемою:

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі	Як можна міркувати при розв'язуванні такої задачі

При такій подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дозволяє учневі, який вже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація по розв'язуванню, — отримати таку детальну консультацію, що міститься в коментарі.

За рахунок чіткого виділення загальних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, рівняння, для розв'язування яких доводиться використовувати властивості функцій). Це дозволяє зменшити розрив між рівнем вимог державної атестації з алгебри і початків аналізу та рівнем вимог з цього курсу на вступних іспитах до вузів, а також ознайомити учнів з методами розв'язування завдань, які пропонуються на вступних іспитах до вузів.

Зауважимо, що детальна систематизація за змістовними лініями навчального матеріалу та відповідних способів діяльності по розв'язуванню завдань курсу міститься також у посібнику Є. П. Неліна «Алгебра в таблицях. Навчальний посібник для учнів 7–11 класів».— Харків: Світ дитинства, 1998–2005, який доцільно використовувати в навчальному процесі в комплекті з підручником.

Позначення, які зустрічаються в підручнику

$\boldsymbol{N}$ — множина всіх натуральних чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел

$\boldsymbol{Z}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множина всіх раціональних чисел

$\boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, числова пряма

$\boldsymbol{R}_+$ — множина всіх додатних дійсних чисел

$[a; b]$ — відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b)$ — інтервал (відкритий проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b]$, $[a; b)$ — напіввідкриті проміжки з кінцями a і b, $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — нескінченні проміжки

$(-\infty; +\infty)$ — нескінченний проміжок, числова пряма

$|x|$ — модуль (абсолютна величина) числа x

$[x]$ — ціла частина числа x

$\{x\}$ — дробова частина числа x

$f(x)$ — значення функції f у точці x

$D(f)$ — область визначення функції f

$E(f)$ — область значень функції f

sin — функція синус

cos — функція косинус

tg — функція тангенс

ctg — функція котангенс

arcsin — функція арксинус

arccos — функція арккосинус

arctg — функція арктангенс

arcctg — функція арккотангенс

$\sqrt{a}$ — арифметичний корінь із числа a

$\sqrt[2k]{a}$ — арифметичний корінь $2k$-го степеня з числа a $(k \in N)$

$\sqrt[2k+1]{a}$ — корінь $(2k+1)$-го степеня з числа a $(k \in N)$

$\log_a$ — логарифм за основою a

lg — десятковий логарифм (логарифм за основою 10)

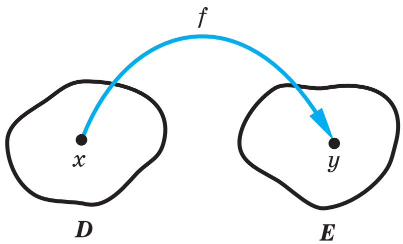
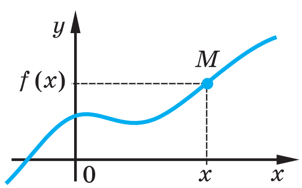
ln — натуральний логарифм (логарифм за основою e)

Розділ 1
Тригонометричні функції

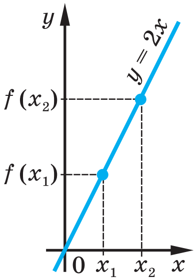
§ 1 ПОВТОРЕННЯ І РОЗШИРЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО ФУНКЦІЮ

1.1. ПОНЯТТЯ ЧИСЛОВОЇ ФУНКЦІЇ. НАЙПРОСТІШІ ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 1

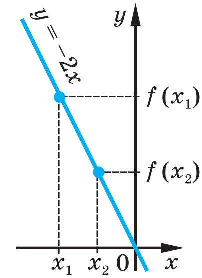
<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття числової функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Числовою функцією з областю визначення D називається залежність, при якій кожному числу x із множини D (області визначення) ставиться у відповідність єдине число y.
Записують цю відповідність так:
$y = f(x)$.
Позначення і терміни
$D(f)$ — область визначення
$E(f)$ — область значень
x — аргумент (незалежна змінна)
y — функція (залежна змінна)
f — функція
$f(x_0)$ — значення функції f у точці x_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Графік функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Графіком функції f називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; f(x))$, де перша координата x «пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції f у точці x.</td></tr>
</table>

П р о д о в ж. т а б л. 1

<table>
<tr><td colspan="2">3. Зростаючі та спадні функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

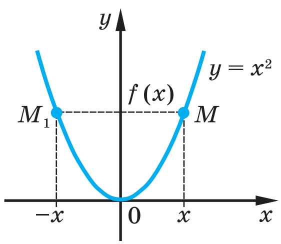
Функція $f(x)$ зростаюча:

якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$

(при збільшенні аргументу відповідні точки графіка піднімаються).</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Функція $f(x)$ спадна:

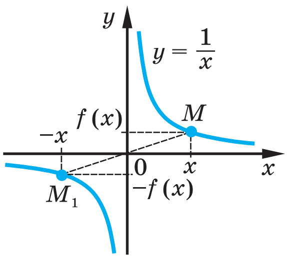
якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$

(при збільшенні аргументу відповідні точки графіка опускаються).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Парні та непарні функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Функція $f(x)$ парна:

$f(-x) = f(x)$

для всіх x із області визначення.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

Функція $f(x)$ непарна:

$f(-x) = -f(x)$

для всіх x із області визначення.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат (точки O).</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття функції. З поняттям функції ви ознайомилися в курсі алгебри. Нагадаємо, що залежність змінної y від змінної x називається *функцією*, якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y.

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо користуватися таким означенням числової функції.

Числовою функцією з областю визначення D **називається залежність, при якій кожному числу x із множини D ставиться у відповідність єдине число y.**

Функції позначають латинськими (інколи грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f. Число y, яке відповідає числу x (на рисунку 1 це показано стрілкою), називають значенням функції f у точці x і позначають $f(x)$.

Область визначення функції f — це множина тих значень, яких може набувати аргумент x. Вона позначається $D(f)$.

Область значень функції f — це множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$, де x належить області визначення. Її позначають $E(f)$.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо немає додаткових обмежень, то *областю визначення функції, заданою формулою, вважається множина всіх значень змінної, при яких ця формула має зміст*.

Наприклад, якщо функція задана формулою $y=\sqrt{x}+1$, то її область визначення: $x \geqslant 0$, тобто $D(y) = [0; +\infty)$, а область значень: $y \geqslant 1$, тобто $E(y) = [1; +\infty)$.

Іноді функція може задаватися різними формулами на різних множинах значень аргументу. Наприклад, $y=|x|=\begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x<0. \end{cases}$

Функція може задаватися не тільки за допомогою формули, а й за допомогою таблиці, графіка чи словесного опису. Наприклад, на рисунку 2 графічно

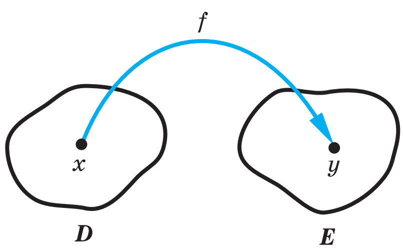


Рис. 1

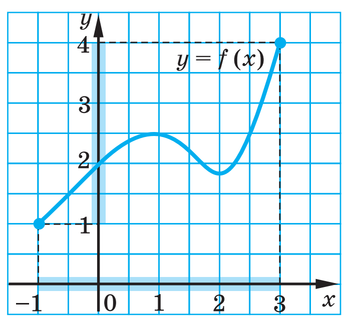


Рис. 2

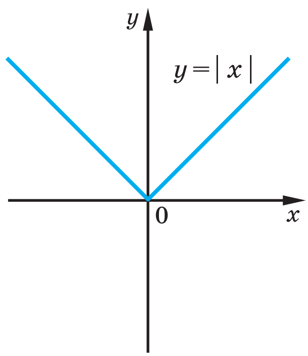


Рис. 3

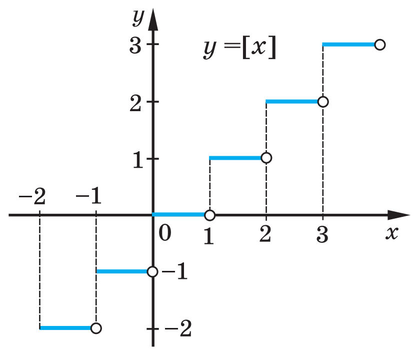


Рис. 4

задана функція $y = f(x)$ з областю визначення $D(f) = [-1; 3]$ і множиною значень $E(f) = [1; 4]$.

2. Графік функції. Нагадаємо, що

графіком функції $\boldsymbol{y = f(x)}$ **називається множина всіх точок координатної площини з координатами** $\boldsymbol{(x; f(x))}$**, де перша координата** $\boldsymbol{x}$ **«пробігає» всю область визначення функції, а друга координата — це відповідне значення функції** $\boldsymbol{f}$ **у точці** $\boldsymbol{x}$**.**

На рисунках до пункту 4 таблиці 1 наведено графіки функцій $y = x^2$ та $y = \frac{1}{x}$, а на рисунку 3 — графік функції $y = |x|$.

Наведемо також графік функції $y = [x]$, де $[x]$ — позначення *цілої частини* числа x, тобто найбільшого цілого числа, яке не перевищує x (рис. 4). Область визначення цієї функції $D(y) = \boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, а область значень $E(y) = \boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел.

На рисунку 5 наведено графік ще однієї числової функції $y = \{x\}$, де $\{x\}$ — позначення *дробової частини* числа x (за означенням $\{x\} = x - [x]$).

3. Зростаючі та спадні функції. Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

Функція $\boldsymbol{f(x)}$ **називається** ***зростаючою на множині P*****, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції.**

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з множини P, якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = 2x$ зростаюча (на всій області визначення, тобто на множині $\boldsymbol{R}$), оскільки, якщо $x_2 > x_1$, то $2x_2 > 2x_1$, отже, $f(x_2) > f(x_1)$.

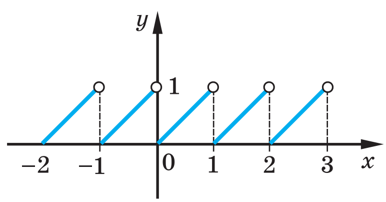


Рис. 5

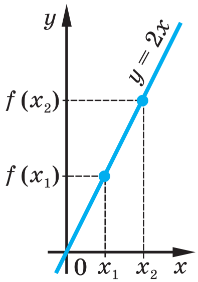


Рис. 6

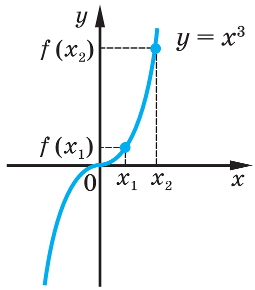


Рис. 7

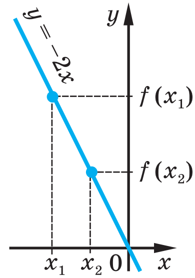


Рис. 8

Відповідні точки графіка зростаючої функції при збільшенні аргументу піднімаються (рис. 6).

На рисунку 7 наведено графік ще однієї зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $f(x)$ називається *спадною на множині P*, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції.

Тобто для будь-яких двох значень x_1 і x_2 з множини P, якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині $\mathbf{R}$), оскільки, якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$. Іідповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргументу опускаються (рис. 8).

Розглядаючи графік функції $y = x^2$ (рис. 9), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ функція $y = x^2$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ — спадає.

Зазначимо, що для зростаючих і спадних функцій виконуються властивості, обернені до тверджень, що містяться в означеннях.

Якщо функція зростає, то більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу.

Якщо функція спадає, то більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.

Обґрунтуємо першу з цих властивостей методом від супротивного. Нехай функція $f(x)$ зростає і $f(x_2) > f(x_1)$. Припустимо, що аргумент x_2 не більше аргументу x_1, тобто $x_2 \leqslant x_1$. З цього припущення одержуємо:
якщо $x_2 \leqslant x_1$ і $f(x)$ зростає, то $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, що суперечить умові $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, наше припущення неправильне і, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, що і потрібно було довести.

Аналогічно обґрунтовується і друга властивість.

Наприклад, якщо $x^3 > 8$, тобто $x^3 > 2^3$, то, враховуючи зростання функції $f(x) = x^3$, одержуємо $x > 2$.

4. Парні і непарні функції. Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто разом з кожним числом x містять і число $(-x)$. Для таких функцій визначені поняття парності і непарності.

Функція f називається *парною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = f(x)$.

Наприклад, функція $y = x^2$ (тобто функція $f(x) = x^2$) — парна, оскільки
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Якщо функція $f(x)$ парна, то до її графіка разом з кожною точкою M з координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 з координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно осі Oy (рис. 10), тому і весь **графік парної функції розміщений симетрично відносно осі Oy.**

Наприклад, графік парної функції $y = x^2$ (рис. 9) симетричний відносно осі Oy.

Функція f називається *непарною*, якщо для будь-якого x з її області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ (тобто функція $f(x) = \frac{1}{x}$) — непарна, оскільки
$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

Якщо функція $f(x)$ непарна, то до її графіка разом з кожною точкою M з координатами $(x; y) = (x; f(x))$ входить також і точка M_1 з координатами $(-x; y) = (-x; f(-x)) = (-x; -f(x))$. Точки M і M_1 розміщені симетрично відносно початку координат (рис. 11), тому і весь **графік непарної функції розміщений симетрично відносно початку координат.**

Наприклад, графік непарної функції $y = \frac{1}{x}$ (див. пункт 4 табл. 1) симетричний відносно початку координат, тобто відносно точки O.

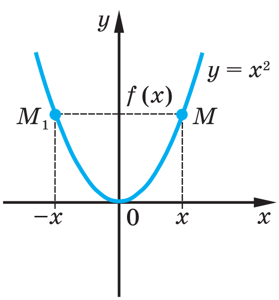


Рис. 9

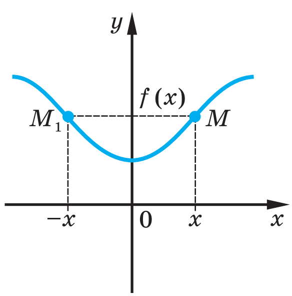


Рис. 10

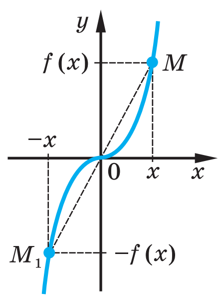


Рис. 11

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x}{x^2 + x}$; 3) $y = \sqrt{x+5}$.

Розв'язання

1) ▶ Обмежень для знаходження значень виразу $x^2 + x$ немає, отже, $D(y) = \boldsymbol{R}$. ◁

2) ▶ Область визначення функції $y = \frac{x}{x^2 + x}$ задається обмеженням $x^2 + x \neq 0$, оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю. З'ясуємо, коли $x^2 + x = 0$. Маємо

$x(x + 1) = 0$, $x = 0$ або $x = -1$.

Тоді область визначення можна задати обмеженнями $x \neq 0$, $x \neq -1$, або записати так:

$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$. ◁

3) ▶ Область визначення функції $y = \sqrt{x+5}$ задається обмеженням $x + 5 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -5$, оскільки під знаком квадратного кореня повинен стояти невід'ємний вираз. Отже, $D(y) = [-5; +\infty)$. ◁

Коментар

Оскільки всі функції задано формулами, то їх області визначення — це множина всіх значень змінної x, при яких формула має зміст, тобто має зміст вираз, який стоїть у правій частині формули $y = f(x)$.

У курсі алгебри зустрічалися тільки два *обмеження*, які необхідно враховувати *при знаходженні області визначення*:

1) *якщо вираз записано у вигляді дробу* $\frac{A}{B}$, *то знаменник* $B \neq 0$;

2) *якщо запис виразу містить квадратний корінь* $\sqrt{A}$, *то підкорене вий вираз* $A \geqslant 0$.

У всіх інших випадках, які вам доводилося розглядати, областю визначення виразу були всі дійсні числа*.

Приклад 2* Знайдіть область значень функції $y = x^2 - 3$.

Розв'язання

▶ Складаємо рівняння $x^2 - 3 = a$. Воно рівносильне рівнянню $x^2 = a + 3$, яке має розв'язки, якщо $a + 3 \geqslant 0$, тобто при $a \geqslant -3$. Усі ці числа і складуть область значень функції.

Отже, область значень заданої функції

$E(f) = [-3; +\infty)$ (тобто $y \geqslant -3$). ◁

Коментар

Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $x^2 - 3$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x (при цьому значенні x значення $f(x) = a$).

Тоді всі числа a, для яких існує хоча б один корінь рівняння $f(x) = a$, ввійдуть до області значень функції $f(x)$. Множина всіх таких a і складе область значень функції.

* У подальшому курсі алгебри і початків аналізу 10 класу з'являться нові вирази з обмеженнями: $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\arcsin a$, $\arccos a$, $\log_A B$, $\sqrt[n]{a}$, a^α, де α — не ціле число.

Корисно пам'ятати, що

область значень функції $y = f(x)$ збігається з множиною тих значень a, при яких рівняння $f(x) = a$ має розв'язки.

Приклад 3* Доведіть, що **при $k \neq 0$ областю значень лінійної функції $y = kx + b$ є множина всіх дійсних чисел.**

Розв'язання

▶ Якщо $kx + b = a$ (де $k \neq 0$), то розв'язок цього рівняння $x = \frac{a-b}{k}$ існує для будь-якого $a \in \boldsymbol{R}$ ($k \neq 0$ за умовою).

Таким чином, значенням заданої функції може бути будь-яке дійсне число, отже, її область значень $E(f) = \boldsymbol{R}$. ◁

Коментар

Позначимо значення заданої функції $f(x)$ (тобто $kx + b$) через a і з'ясуємо, для яких a можна знайти відповідне значення x, таке, що $f(x) = a$.

Множина всіх таких значень a і буде складати область значень функції $f(x)$.

Приклад 4* Доведіть, що **лінійна функція $y = kx + b$ при $k > 0$ є зростаючою, а при $k < 0$ — спадною.**

Розв'язання

▶ Нехай $x_2 > x_1$ (тоді $x_2 - x_1 > 0$). Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = kx_2 + b - (kx_1 + b) = k(x_2 - x_1)$.

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то при $k > 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, отже, $f(x_2) > f(x_1)$ — функція зростає.

При $k < 0$ маємо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$ — функція спадає. ◁

Коментар

Для обґрунтування зростання або спадання функції корисно пам'ятати, що *для доведення нерівності $f(x_2) > f(x_1)$ чи $f(x_2) < f(x_1)$ досить знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$.*

Нам задано функцію $f(x) = kx + b$. Ця функція буде зростаючою, якщо з нерівності $x_2 > x_1$ буде випливати нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, а для доведення останньої нерівності досить знайти знак різниці $f(x_2) - f(x_1)$ (аналогічно обґрунтовується і спадання функції).

Приклад 5* Доведіть, що:

1) **сума двох зростаючих на множині P функцій завжди є зростаючою функцією на цій множині;**
2) **сума двох спадних на множині P функцій завжди є спадною функцією на цій множині.**

Розв'язання

1) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючими на одній і тій самій мно-

Коментар

Для доведення зростання суми двох зростаючих функцій $f(x)$ і $g(x)$

жині P. Якщо $x_2 > x_1$, то

$f(x_2) > f(x_1)$ і $g(x_2) > g(x_1)$.

Додаючи почленно останні нерівності, одержуємо

$$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$

Це і означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є зростаючою функцією на множині P. ◁

2) ▶ Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ є спадними на множині P. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ маємо $f(x_2) < f(x_1)$ і $g(x_2) < g(x_1)$.

Після почленного додавання останніх нерівностей одержуємо:

$$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1),$$

а це й означає, що сума функцій $f(x)$ і $g(x)$ є спадною функцією на множині P. ◁

досить довести, що на множині P з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність

$$f(x_2) + g(x_2) > f(x_1) + g(x_1).$$

Аналогічно для доведення того, що сума двох спадних функцій є спадною функцією, достатньо довести:

якщо $x_2 > x_1$, то

$$f(x_2) + g(x_2) < f(x_1) + g(x_1).$$

Приклад 6 Доведіть, що **зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.**

Доведення

▶ Нехай функція $f(x)$ є зростаючою і

$$f(x_1) = f(x_2). \qquad (1)$$

Припустимо, що

$$x_1 \neq x_2.$$

Якщо $x_1 \neq x_2$, то або $x_1 > x_2$, або $x_1 < x_2$. Враховуючи зростання $f(x)$, у випадку $x_1 > x_2$ маємо $f(x_1) > f(x_2)$, що суперечить рівності (1). У випадку $x_1 < x_2$ маємо $f(x_1) < f(x_2)$, що також суперечить рівності (1).

Отже, наше припущення неправильне, і рівність $f(x_1) = f(x_2)$ можлива тільки при $x_1 = x_2$. Тобто зростаюча функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.

Аналогічно доводиться твердження і для спадної функції. ◁

Коментар

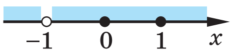
Доведемо це твердження методом від супротивного. Для цього досить припустити, що виконується протилежне твердження (функція може набувати одного й того самого значення принаймні у двох точках), і одержати суперечність. Це означатиме, що наше припущення неправильне, а правильне задане твердження.

Приклад 7 Дослідіть, які з заданих функцій є парними, які непарними, а які — ні парними, ні непарними:

1) $y = \frac{1}{x+1}$; 2) $y = x^4$; 3) $y = x^3 + x$.

Розв'язання

1) ▶ Область визначення функції $y = \frac{1}{x+1}$: $x \neq -1$, тобто вона не симетрична відносно точки O (точка $x = 1$ входить до області визначення, а $x = -1$ — ні).



Отже, задана функція не може бути ні парною, ні непарною. ◁

2) ▶ Область визначення функції $y = x^4$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, тобто вона симетрична відносно точки O.
$f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, значить, функція парна. ◁

3) ▶ Область визначення функції $y = x^3 + x$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, значить, вона симетрична відносно точки O.
$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x =$
$= -(x^3 + x) = -f(x)$, отже, функція непарна. ◁

Коментар

Для дослідження функції $y = f(x)$ на парність чи непарність досить, по-перше, упевнитися, що область визначення цієї функції симетрична відносно точки O (разом з кожною точкою x містить і точку $-x$) і, по-друге, порівняти значення $f(-x)$ і $f(x)$.

Запитання для контролю

1. Що називається числовою функцією? Наведіть приклади таких функцій.
2. На прикладах поясніть, що таке область визначення функції та область значень функції. Які обмеження необхідно врахувати при знаходженні області визначення функції $y = \frac{\sqrt{x}}{x}$? Знайдіть її область визначення.
3. Що називається графіком функції $y = f(x)$? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається зростаючою? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається спадною? Наведіть приклади.
6. Яка функція називається парною? Наведіть приклади. Як розміщено графік парної функції на координатній площині? Наведіть приклади.
7. Яка функція називається непарною? Наведіть приклади. Як розміщено графік непарної функції на координатній площині? Наведіть приклади.

Вправи

1°. Знайдіть значення функції у вказаних точках:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$ у точках 2; −1; 3; a ($a \neq 0$);

2) $g(x) = x^2 - 3$ у точках 0; 1; −2; b;

3) $\varphi(x)=\sqrt{x+1}$ у точках 0; 3; −1; m ($m > 0$).

2. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1°) $y = 2x + 3$; 2°) $y=\sqrt{x+3}$; 3°) $y=\frac{1}{x+1}$; 4) $y=\frac{x}{x^2+1}$;

5) $y=\sqrt{x^2-1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+1}$; 7) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}$; 8) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{x}$;

9*) $y=\sqrt{\frac{x^2-9}{x-3}}$; 10*) $y=\frac{\sqrt{x^2-x}}{x+1}$; 11*) $y=\frac{\sqrt{x}}{|x|-2}$; 12*) $y=\sqrt{x^2+x+1}$.

3. Знайдіть область значень функції, заданої формулою:

1) $f(x) = 5$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = x^2$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$;

5*) $y = -3x + 1$; 6*) $y = x^2 - 5$; 7*) $y = |x| + 3$.

4°. Для функцій, які задані своїми графіками на рисунку 12, укажіть область визначення, область значень, проміжки зростання і спадання та значення кожної функції при $x = 1$.

5. Обґрунтуйте, що задана функція є зростаючою (на її області визначення):

1) $y = 3x$; 2) $y = x + 5$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^5$; 5*) $y = \sqrt{x}$.

6*. Доведіть, що на заданому проміжку функція зростає:

1) $y=-\frac{2}{x}$, де $x > 0$; 2) $y=-\frac{1}{x}$, де $x < 0$.

7. Обґрунтуйте, що задана функція є спадною (на її області визначення):
1) $y = -3x$; 2) $y = -x - 1$; 3*) $y = -x^3$; 4*) $y = -x^5$.

8*. Доведіть, що на заданому проміжку функція спадає:

1) $y=\frac{3}{x}$, де $x < 0$; 2) $y=\frac{5}{x}$, де $x > 0$.

9*. Доведіть, що функція $y = x^2$ на проміжку $[0; +\infty)$ зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ спадає.

10*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 5 (с. 13), укажіть, які із заданих функцій є зростаючими, а які — спадними:

1) $y = x^3 + x$; 2) $y = -x - x^5$; 3) $y=x+\sqrt{x}$; 4) $y = -x^3 - x^5$.

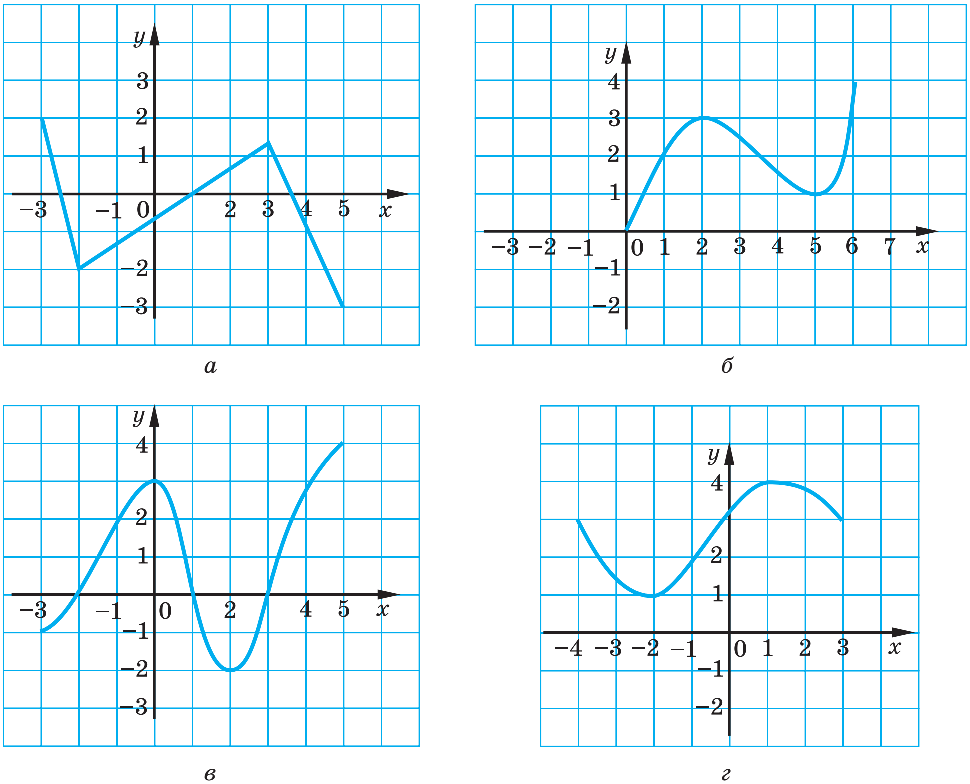


Рис. 12

11*. Користуючись твердженнями, доведеними у прикладі 6 (с. 14):

1) обґрунтуйте, що рівняння $x^3 + x = 10$ має єдиний корінь $x = 2$;

2) підберіть корінь рівняння $\sqrt{x} + x = 6$ і доведіть, що інших коренів це рівняння не має.

12. Обґрунтуйте, що задана функція є парною:

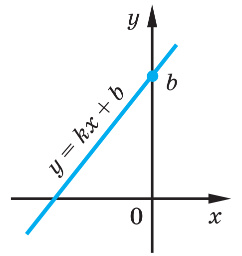
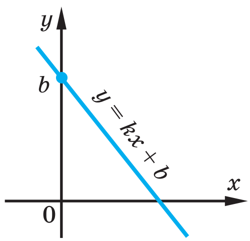
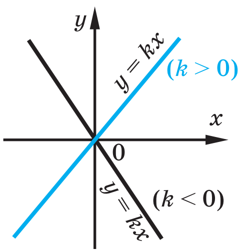
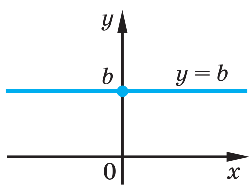
1) $y = x^6$; 2) $y = \frac{1}{x^2} + 1$; 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 4) $y = \sqrt{|x| + x^4}$.

13. Обґрунтуйте, що задана функція є непарною:

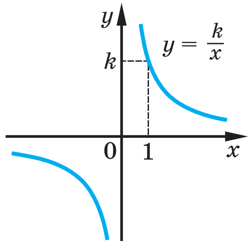
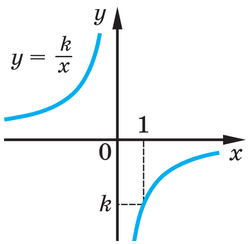
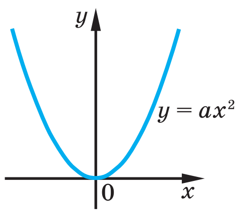
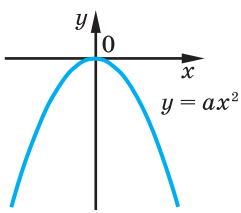
1) $y = x^5$; 2) $y = -\frac{1}{x^3}$; 3) $y = x\,|x|$; 4) $y = x^3 - x$.

1.2. ВЛАСТИВОСТІ І ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ВИДІВ ФУНКЦІЙ

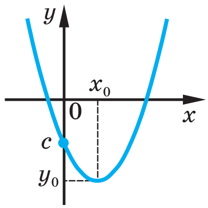
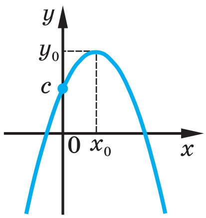
Таблиця 2

Умови для коефіці-єнтів	Графік	Властивості			
		$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
1	2	3	4	5	6
1. Лінійна функція $y = kx + b$					
$k > 0$		$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	ні парна, ні непарна	зростає
$k < 0$					спадає
$b = 0$ $y = kx$				непарна	при $k > 0$ зростає при $k < 0$ спадає
$k = 0$ $y = b$			b	парна	постійна

Продовж. табл. 2

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr>
<tr><td colspan="6">2. Обернена пропорційність, функція $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$</td></tr>
<tr><td>$k > 0$</td><td></td><td rowspan="2">$x \neq 0$</td><td rowspan="2">$y \neq 0$</td><td rowspan="2">непарна</td><td>спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$k < 0$</td><td></td><td>зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="6">3. Функція $y = ax^2$ $(a \neq 0)$</td></tr>
<tr><td>$a > 0$</td><td></td><td rowspan="2">$\boldsymbol{R}$</td><td>$[0; +\infty)$</td><td rowspan="2">парна</td><td>спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$a < 0$</td><td></td><td>$(-\infty; 0]$</td><td>зростає на проміжку $(-\infty; 0]$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 2

1	2	3	4	5	6
4. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ $\left(a \neq 0,\ x_0 = -\dfrac{b}{2a}\right)$					
$a > 0$		$\boldsymbol{R}$	$[y_0;\ +\infty)$	у загальному виді — ні парна, ні непарна	спадає на проміжку $(-\infty;\ x_0]$, зростає на проміжку $[x_0;\ +\infty)$
$a < 0$			$(-\infty;\ y_0]$	при $b = 0$ функція $y = ax^2 + c$ парна	зростає на проміжку $(-\infty;\ x_0]$, спадає на проміжку $[x_0;\ +\infty)$

Пояснення й обґрунтування

1. Лінійна функція $y = kx + b$. *Лінійною функцією* називається функція виду $y = kx + b$, де k і b — деякі числа.

Обґрунтуємо основні характеристики цієї функції: область визначення, область значень, парність чи непарність, зростання і спадання.

Область визначення — множина всіх дійсних чисел: $D(y) = \boldsymbol{R}$, оскільки формула $kx + b$ має зміст при всіх дійсних значеннях x (тобто для будь-якого дійсного x ми можемо обчислити значення $kx + b$).

Область значень лінійної функції буде різною залежно від значення коефіцієнта k.

Якщо $k = 0$, то функція має вид $y = b$, тобто її область значень складається з одного числа b. У такому випадку **графіком лінійної функції $y = b$ є пряма, паралельна осі Ox, яка перетинає вісь Oy у точці b** (рис. 13).

Якщо $k \neq 0$, то $E(y) = \boldsymbol{R}$ (обґрунтування наведено в прикладі 3 на с. 13).

Парність і непарність лінійної функції суттєво залежить від значень коефіцієнтів b і k.

При $b = 0$ і $k \neq 0$ функція $y = kx + b$ перетворюється на функцію $y = kx$, яка непарна, оскільки для всіх x з її області визначення

$$f(-x) = k(-x) = -kx = -f(x).$$

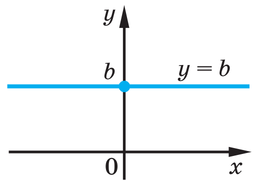


Рис. 13

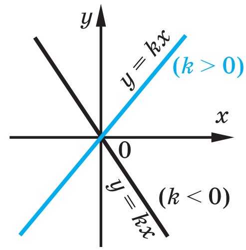


Рис. 14

Отже, графік функції $y = kx$ (рис. 14) симетричний відносно точки O.

При $k = 0$ одержуємо функцію $y = b$, яка є парною, оскільки для всіх x з її області визначення $f(-x) = b = f(x)$. Тобто графік функції $y = b$ симетричний відносно осі Oy (рис. 13).

У загальному випадку при $k \neq 0$ і $b \neq 0$ функція $y = kx + b$ не буде ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x) = k(-x) + b = -kx + b \neq f(x)$ і також

$$f(-x) = -kx + b = -(kx - b) \neq -f(x).$$

Зростання і спадання лінійної функції залежить від значення коефіцієнта k.

При $k = 0$ одержуємо функцію $y = b$ — постійну.

При $k > 0$ функція $y = kx + b$ зростає, а при $k < 0$ — спадає (обґрунтування наведено в прикладі 4 на с. 13).

У курсах алгебри і геометрії було обґрунтовано, що **графіком лінійної функції $y = kx + b$ завжди є пряма лінія.**

Оскільки при $x = 0$ функція набуває значення $y = b$, то *ця пряма завжди перетинає вісь Oy у точці b.* Графіки лінійних функцій наведено в таблиці 2.

2. Функція $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. Ця функція виражає *обернено пропорційну залежність.*

Область визначення: $x \neq 0$. Це можна записати також так:

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Область значень: $y \neq 0$. Це можна записати також так:

$$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

Для обґрунтування області значень функції $y = \frac{k}{x}$ позначимо $\frac{k}{x} = a$. Тоді з цієї рівності одержимо $x = \frac{k}{a}$ для всіх $a \neq 0$. Тобто для всіх $a \neq 0$ існує значення $x = \frac{k}{a}$, при якому $y = \frac{k}{x} = \frac{k}{\frac{k}{a}} = a$. Отже, y набуває всіх дійсних значень, які не рівні нулю.

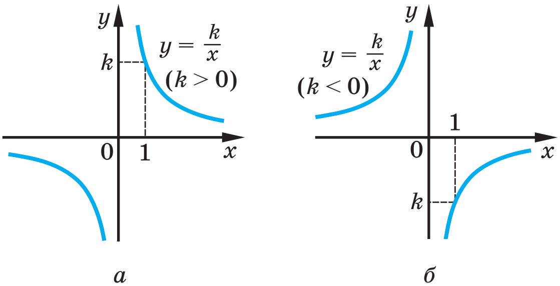


Рис. 15

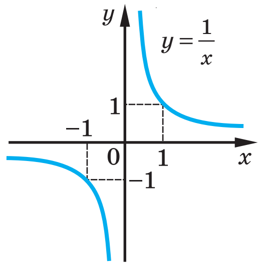


Рис. 16

Функція непарна, оскільки її областю визначення є множина, симетрична відносно точки O, і $f(-x)=\frac{k}{-x}=-\frac{k}{x}=-f(x)$. Отже, її графік симетричний відносно початку координат (рис. 15).

Зростання і спадання функції залежить від знаку коефіцієнта k.

Якщо $x_2 > x_1$ (тобто $x_2 - x_1 > 0$), то для порівняння значень $f(x_2)$ і $f(x_1)$ розглянемо їхню різницю:

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{k}{x_2}-\frac{k}{x_1}=\frac{kx_1-kx_2}{x_1x_2}=\frac{-k(x_2-x_1)}{x_1x_2}. \qquad (1)$$

На проміжку $(0; +\infty)$ значення $x_1 > 0$ і $x_2 > 0$, отже, $x_1x_2 > 0$. На проміжку $(-\infty; 0)$ значення $x_1 < 0$ і $x_2 < 0$, отже, $x_1x_2 > 0$.

Враховуючи, що $x_2 - x_1 > 0$, у кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ або $(0; +\infty)$ при $k > 0$ з рівності (1) отримуємо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, а при $k < 0$ одержуємо $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

При $k > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$, якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$, отже, функція спадає на кожному з цих проміжків.

При $k < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$, якщо $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$, отже, функція зростає на кожному з цих проміжків. ○

З курсу алгебри відомо, що графік функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ називається *гіперболою* (вона складається з двох віток). При $k > 0$ вітки гіперболи знаходяться в I і III координатних чвертях, а при $k < 0$ — у II і IV чвертях (рис. 15).

З а у в а ж е н н я. Характеризуючи зростання чи спадання функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, слід пам'ятати, що, наприклад, функція $y=\frac{1}{x}$ (рис. 16) спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$, але на всій області визначення $(x \neq 0)$ ця функція не є спадною (і не є зростаючою). Дійсно, якщо взяти $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, то $x_2 > x_1$, але $f(x_2) = f(1) = 1$ і $f(x_1) = f(-1) = -1$, тобто більшому значенню аргументу не відповідає менше значення функції і на всій її області визначення функція $f(x)=\frac{1}{x}$ не є спадною.

З цієї ж причини не можна сказати, що функція $f(x)=\frac{1}{x}$ спадає при $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Функція $y = ax^2$ ($a \neq 0$). Як відомо з курсу алгебри, графіком цієї функції є *парабола*, вітки якої напрямлені вгору при $a > 0$ (рис. 17, *а*) і вниз при $a < 0$ (рис. 17, *б*). Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік завжди проходить через початок координат.

Область визначення: $x \in \boldsymbol{R}$, оскільки значення $y = ax^2$ можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція парна, оскільки $f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$. Отже, її графік симетричний відносно осі Oy.

Інші властивості сформулюємо, скориставшись графіком функції $y = ax^2$ (рис. 17). Їх можна обґрунтувати, спираючись на властивості функції $y = x^2$ і на геометричні перетворення її графіка, які буде розглянуто далі у п. 1.3.

Область значень. При $a > 0$ графік проходить через початок координат, а всі його інші точки знаходяться вище осі Ox. Якщо значення x збільшується до нескінченності, то і значення y теж збільшується до нескінченності ($+\infty$), отже, $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Аналогічно при $a < 0$ графік також проходить через початок координат, але всі його інші точки знаходяться нижче осі Ox. Якщо значення x збільшується до нескінченності, то значення y зменшується до мінус нескінченності ($-\infty$), отже, $y \leqslant 0$, тобто $E(y) = (-\infty; 0]$.

Зростання і спадання. При $a > 0$ на проміжку $(-\infty; 0]$ функція спадає, а на проміжку $[0; +\infty)$ — зростає.

При $a < 0$ на проміжку $(-\infty; 0]$ функція зростає, а на проміжку $[0; +\infty)$ — спадає.

Відповідні графіки наведено також у таблиці 2.

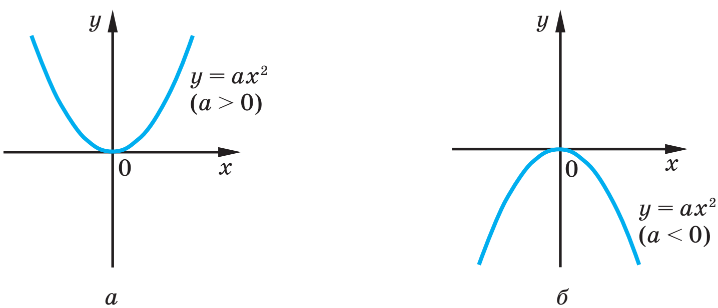


Рис. 17

4. Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). З курсу алгебри 9 класу відомо, що функція виду $y = ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дійсні числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратичною*. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору при $a > 0$ і вниз при $a < 0$.

Абсциса вершини цієї параболи $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Для обґрунтування цього досить у заданій формулі виділити повний квадрат:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}, \text{ тобто}$$

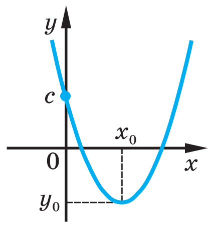
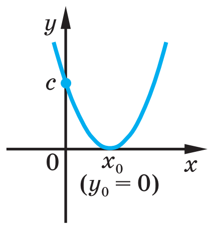
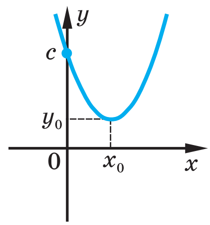
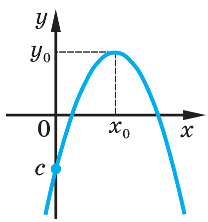
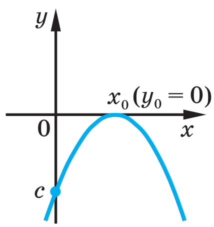
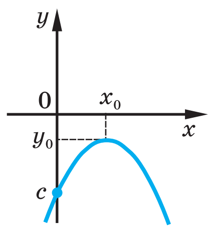
$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + y_0, \text{ де } y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$$

($D = b^2 - 4ac$ — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$).

Нагадаємо, що в залежності від знаку дискримінанта D парабола або перетинає вісь Ox ($D > 0$), або не перетинає ($D < 0$), або дотикається до неї ($D = 0$).

Основні варіанти розміщення графіка функції $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) зображено в таблиці 3.

Таблиця 3

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Охарактеризуємо властивості функції $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), спираючись на ці відомі нам графіки.

Область визначення: $D(y) = \boldsymbol{R}$, оскільки значення $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Область значень. При $a > 0$ функція набуває всіх значень $y \geqslant y_0$, тобто $E(y) = [y_0; +\infty)$.

При $a < 0$ функція набуває всіх значень $y \leqslant y_0$, тобто $E(y) = (-\infty;\ y_0]$.

Парність і непарність. При $b = 0$ одержуємо парну квадратичну функцію $y = \varphi(x) = ax^2 + c$. Дійсно, $\varphi(-x) = a(-x)^2 + c = ax^2 + c = \varphi(x)$.

У загальному випадку (якщо $b \neq 0$) функція $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ не є ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c = ax^2 - bx + c \neq f(x)$ (і не дорівнює $-f(x)$).

Зростання і спадання. При $a > 0$ на проміжку $(-\infty;\ x_0]$ функція спадає, а на проміжку $[x_0;\ +\infty)$ — зростає.

При $a < 0$ на проміжку $(-\infty;\ x_0]$ функція зростає, а на проміжку $[x_0;\ +\infty)$ — спадає.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = c$, то *графік завжди перетинає вісь Oy у точці c*.

Відповідні графіки при $D > 0$ наведено також у таблиці 2.

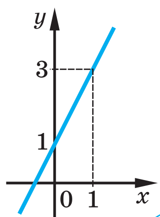
Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції:
1) $y = 2x + 1$; 2) $y = -3x - 1$; 3) $y = 4$.

Розв'язання

1) ▶ Графік функції $y = 2x + 1$ — пряма.

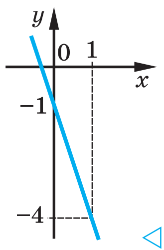
x	0	1
y	1	3



◁

2) ▶ Графік функції $y = -3x - 1$ — пряма.

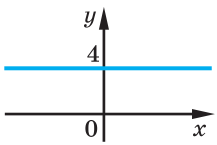
x	0	1
y	–1	–4



◁

3) ▶ Графік функції $y = 4$ — пряма, паралельна осі Ox, яка проходить через точку 4 на осі Oy.

x	0	1
y	4	4



◁

Коментар

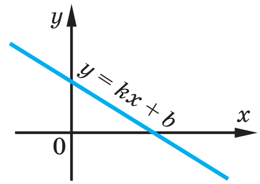
Усі задані функції лінійні, отже, їх графіками є прямі.

Щоб побудувати прямі в завданнях 1 і 2, досить побудувати дві точки цих прямих. Наприклад, можна взяти $x = 0$ і $x = 1$ і знайти відповідні значення y. Оформляти ці обчислення зручно у вигляді таблички:

x	0	1
y		

У завданні 3 розглядається частковий випадок лінійної функції $(y = b)$. Для побудови цього графіка корисно пам'ятати, що пряма $y = 4$ — це пряма, паралельна осі Ox (при будь-якому значенні x значення y дорівнює 4).

Приклад 2* За наведеним графіком функції $y = kx + b$ укажіть знаки k і b.



Розв'язання

▶ При $x = 0$ значення $y = b > 0$ — за рисунком. Оскільки зображено графік спадної лінійної функції, то $k < 0$.

Відповідь: $b > 0$, $k < 0$. ◁

Коментар

Графік функції $y = kx + b$ — пряма, яка перетинає вісь Oy в точці b. На рисунку ця точка лежить вище нуля, отже, $b > 0$.

Лінійна функція $y = kx + b$ при $k > 0$ зростаюча, а при $k < 0$ — спадна. На рисунку зображено графік спадної функції, отже, $k < 0$.

Приклад 3 Побудуйте графік* функції $y = x^2 - 4x + 3$.

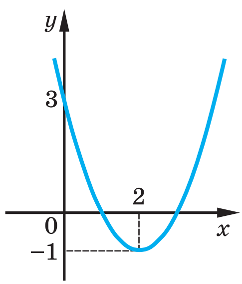
Розв'язання

▶ Графік заданої функції — парабола (виду $y = x^2$), вітки якої напрямлені вгору.

Абсциса вершини:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2.$$

Тоді $y_0 = y(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$ і графік має вигляд:



◁

Коментар

Функція $y = x^2 - 4x + 3$ — квадратична (має вигляд $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$). Отже, її графіком буде парабола (виду $y = ax^2$), вітки якої напрямлені вгору ($a = 1 > 0$).

Абсциса вершини параболи обчислюється за формулою $x_0 = -\frac{b}{2a}$, а ордината y_0 — це відповідне значення заданої функції при $x = x_0$, тобто $y_0 = y(x_0)$.

Якщо потрібно уточнити, як проходить графік, то можна знайти координати кількох додаткових точок, наприклад, при $x = 0$ одержуємо $y = c = 3$.

---

* Побудова таких графіків за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = x^2$ розглядатиметься в пункті 1.3.

Запитання для контролю

1. Яка функція називається лінійною? Назвіть властивості лінійної функції. Яка лінія є графіком лінійної функції? Наведіть приклади лінійних функцій та їх графіків.
2. Яка лінія є графіком функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$? Наведіть приклади графіків функцій $y=\frac{k}{x}$ при $k>0$ і при $k<0$. За графіками вкажіть властивості цієї функції при $k>0$ і при $k<0$. Доведіть непарність функції $y=\frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.
3. Яка лінія є графіком функції $y=ax^2$ $(a \neq 0)$? Як розміщено цей графік при $a>0$ і при $a<0$? Наведіть приклади графіків функцій $y=ax^2$ при $a>0$ і при $a<0$. За графіками вкажіть властивості цієї функції при $a>0$ і при $a<0$. Доведіть парність функції $y=ax^2$ $(a \neq 0)$.
4. Яка лінія є графіком функції $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$? Як розміщено цей графік при $a>0$ і при $a<0$? Як знайти абсцису вершини графіка функції $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$? Наведіть приклади графіків цієї функції при $a>0$ і при $a<0$. За графіками вкажіть властивості цієї функції при $a>0$ і при $a<0$.

Вправи

1°. Побудуйте графік функції:
1) $y=3x-2$; 2) $y=-x+4$; 3) $y=-2$; 4) $y=-5x$; 5) $y=0$; 6) $y=4x$.
Чи є серед цих функцій парні або непарні? Відповідь обґрунтуйте.

2*. За наведеними графіками функцій $y=kx+b$ (рис. 18) укажіть знаки k і b у кожному випадку.

Побудуйте графік функції **(3–5)**.

3°. 1) $y=-\frac{2}{x}$; 2) $y=\frac{3}{x}$; 3) $y=-\frac{1}{x}$; 4) $y=\frac{5}{x}$.

4°. 1) $y=-2x^2$; 2) $y=3x^2$; 3) $y=-3x^2$; 4) $y=5x^2$.

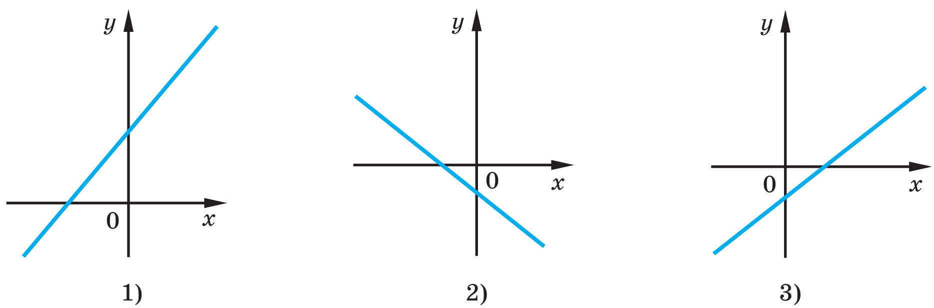


Рис. 18

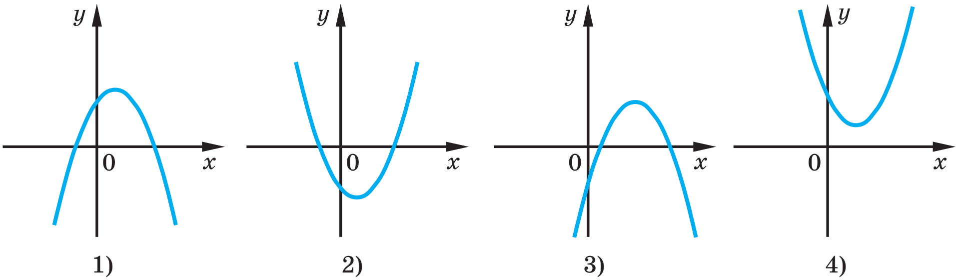


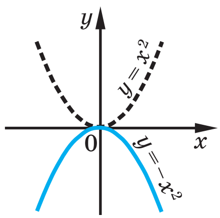
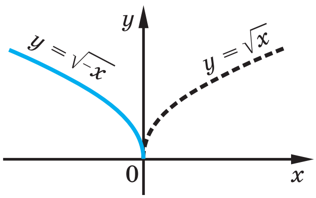
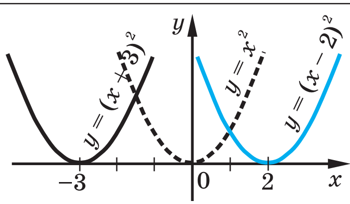
Рис. 19

5. 1) $y = x^2 - 6x + 7$; 2) $y = -x^2 + 4x + 2$; 3) $y = 2x^2 - 2x + 1$; 4) $y = -3x^2 + 6x$.

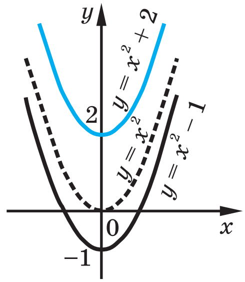
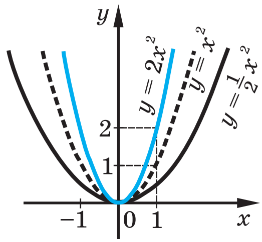
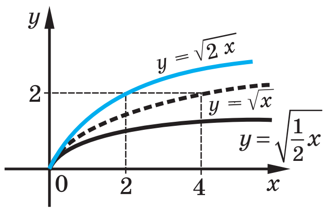
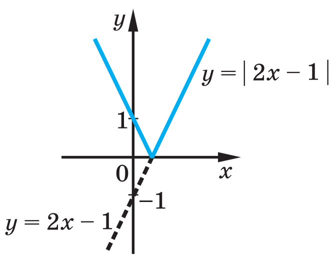
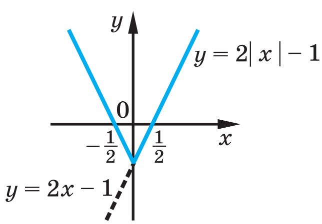
6*. За наведеними графіками функції $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ (рис. 19) укажіть знаки a, b і c у кожному випадку.

1.3. ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ВІДОМИХ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Таблиця 4

Перетворення графіка функції $y = f(x)$			
№	Формула залежності	Приклад	Перетворення
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі Ox
2	$y = f(-x)$		Симетрія відносно осі Oy
3	$y = f(x - a)$		Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць

Продовж. табл. 4

1	2	3	4
4	$y=f(x)+c$		Паралельне перенесення вздовж осі Oy на c одиниць
5	$y=kf(x)$ $(k>0)$		Розтяг або стиск уздовж осі Oy (при $k>1$ розтяг, при $0<k<1$ — стиск)
6	$y=f(\alpha x)$ $(\alpha>0)$		Розтяг або стиск уздовж осі Ox (при $\alpha>1$ — стиск, при $0<\alpha<1$ — розтяг)
7	$y=\|f(x)\|$		Вище осі Ox (і на самій осі) — без зміни, нижче осі Ox — симетрія відносно осі Ox
8	$y=f(\|x\|)$		Праворуч від осі Oy (і на самій осі) — без зміни, і та сама частина графіка — симетрія відносно осі Oy

Пояснення й обґрунтування

Розглянемо способи побудови графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій.

1. Побудова графіка функції $y = -f(x)$. Порівняємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$ (див. перший рядок табл. 4). Очевидно, що графік функції $y = -x^2$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$ симетричним відображенням його відносно осі Ox. Покажемо, що завжди графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ симетричним відображенням відносно осі Ox.

Дійсно, за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; f(x))$. Тоді графік функції $y = -f(x)$ складається з усіх точок K координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; -f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ і $K(x; -f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Ox (рис. 20). Отже, кожна точка K графіка функції $y = -f(x)$ одержується при симетричному відображенні відносно осі Ox деякої точки M графіка $y = f(x)$. Тому

графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y = |f(x)|$. Маємо:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) \text{ при } f(x) \geqslant 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ -f(x) \text{ при } f(x) < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Ox\text{).} \end{cases}$$

Отже,

графік функції $y = |f(x)|$ може бути побудований так: та частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче осі Ox, відображується симетрично відносно цієї осі.

Наприклад, на рисунку 21 і в таблиці 4 (рядок сьомий) з використанням цього правила зображено графік функції $y = |2x - 1|$.

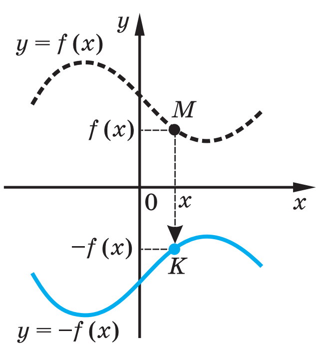


Рис. 20

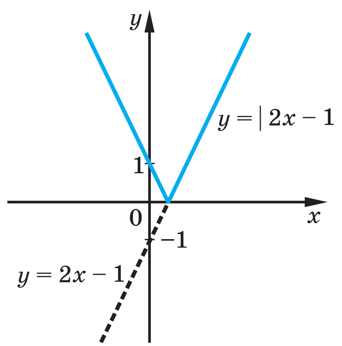


Рис. 21

2. Побудова графіка функції $y = f(-x)$.

Для побудови графіка функції $y = f(-x)$ врахуємо, що в означенні графіка функції перша координата для точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Якщо вибрати як першу координату $(-x)$, то графік функції $y = f(-x)$ складатиметься з усіх точок T координатної площини з координатами $(-x; y) = (-x; f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок $M(x; f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ і $T(-x; f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Oy (рис. 22). Отже, кожна точка T графіка функції $y = f(-x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Oy деякої точки M графіка $y = f(x)$. Тому

графік функції $y = f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Oy.

Ця властивість дозволяє легко обґрунтувати побудову графіка функції $y = f(|x|)$. Маємо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) \text{ при } x \geqslant 0 \text{ (графік не змінюється);} \\ f(-x) \text{ при } x < 0 \text{ (симетрія відносно осі } Oy). \end{cases}$$

Таким чином, для того щоб отримати графік $y = f(|x|)$ при $x < 0$ (тобто ліворуч від осі Oy), необхідно відображати симетрично відносно осі Oy ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy. Тобто та частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить ліворуч від осі Oy, взагалі не бере участі в побудові графіка функції $y = f(|x|)$. Отже,

графік функції $y = f(|x|)$ будується так: та частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), залишається без зміни і саме ця частина відображується симетрично відносно осі Oy.

Наприклад, на рисунку 23 та в таблиці 4 (рядок восьмий) з використанням цього правила зображено графік функції $y = 2|x| - 1$.

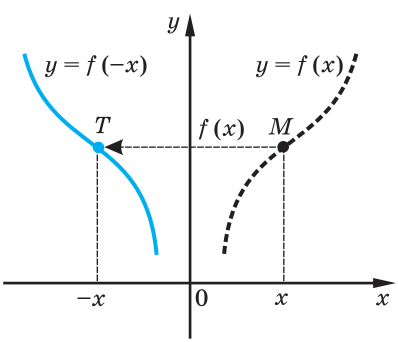


Рис. 22

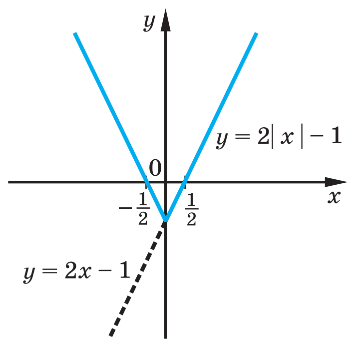


Рис. 23

3. Побудова графіка функції $y = f(x-a)$.

Для побудови графіка функції $y = f(x-a)$ виберемо як першу координату точки N цього графіка значення $x + a$. Тоді графік функції $y = f(x-a)$ складатиметься з усіх точок N координатної площини з координатами $(x + a;\ y) = (x+a;\ f(x+a-a)) = (x+a;\ f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок $M(x;\ f(x))$.

Якщо точка M має координати $(x;\ y)$, а точка N — координати $(x + a;\ y)$, то перетворення точок $(x;\ y) \to (x + a;\ y)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Ox на a одиниць (тобто на вектор $\left(\overline{a;0}\right)$).

Оскільки кожна точка N графіка функції $y = f(x-a)$ одержується паралельним перенесенням деякої точки M графіка $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць (рис. 24), то

графік функції $y = f(x-a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць.

Наприклад, у третьому рядку таблиці 4 зображено графік функції $y = (x-2)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на $+2$ одиниці вздовж осі Ox) та графік функції $y = (x+3)^2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на (-3) одиниці вздовж осі Ox).

4. Побудова графіка функції $y = f(x) + b$.

Графік функції $y = f(x) + b$ складається з усіх точок A координатної площини з координатами $(x;\ y) = (x;\ f(x) + b)$, а графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок $M(x;\ f(x))$.

Але якщо точка M має координати $(x;\ y)$, а точка A — координати $(x;\ y + b)$, то перетворення точок $(x;\ y) \to (x;\ y + b)$ — це паралельне перенесення точки M уздовж осі Oy на b одиниць (тобто на вектор $\left(\overline{0;b}\right)$).

Оскільки кожна точка A графіка функції $y = f(x) + b$ одержується паралельним перенесенням деякої точки M графіка $y = f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць (рис. 25), то

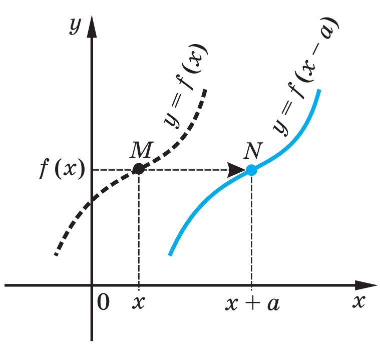


Рис. 24

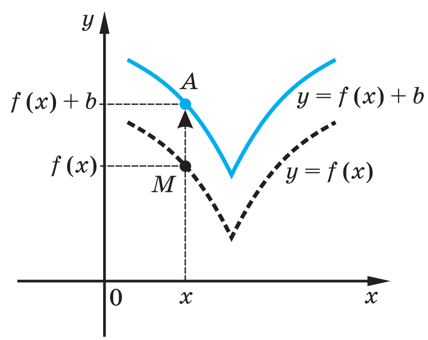


Рис. 25

графік функції $y = f(x) + b$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy на b одиниць.

Наприклад, у четвертому рядку таблиці 4 зображено графік функції $y = x^2 + 2$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на $+2$ одиниці вздовж осі Oy) та графік функції $y = x^2 - 1$ (виконано паралельне перенесення графіка $y = x^2$ на (-1) уздовж осі Oy).

5. Побудова графіка функції $y = kf(x)$.

Графік функції $y = kf(x)$ $(k > 0)$ складається з усіх точок $B(x; kf(x))$, а графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок $M(x; f(x))$ (рис. 26).

Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Oy з коефіцієнтом k* (де $k > 0$) таке перетворення фігури F, при якому кожна її точка $(x; y)$ переходить у точку $(x; ky)$.

Перетворення розтягу вздовж осі Oy задається формулами: $x' = x$; $y' = ky$. Ці формули виражають координати $(x'; y')$ точки M', у яку переходить точка $M(x; y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Oy (рис. 27). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка AM у k разів, і в результаті точка M переходить у точку M'. (Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають розтягом тільки при $k > 1$, а при $0 < k < 1$ його називають *стиском уздовж осі Oy* у $\frac{1}{k}$ разів.)

Як бачимо, кожна точка B графіка функції $y = kf(x)$ одержується з точки M перетворенням розтягу вздовж осі Oy. При цьому загальна форма графіка не змінюється: він розтягується або стискається вздовж осі Oy. Наприклад, якщо графіком функції $y = f(x)$ була парабола, то після розтягування або стискування графік залишається параболою. Тому

графік функції $y = kf(x)$ $(k > 0)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $k > 1$ розтяг у k разів) або стискуванням (при $0 < k < 1$ стиск у $\frac{1}{k}$ разів) уздовж осі Oy.

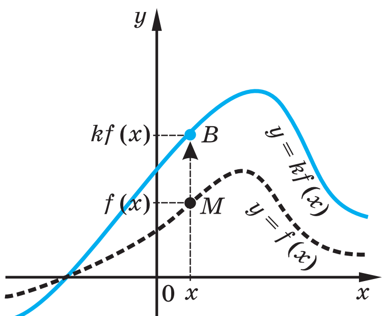


Рис. 26

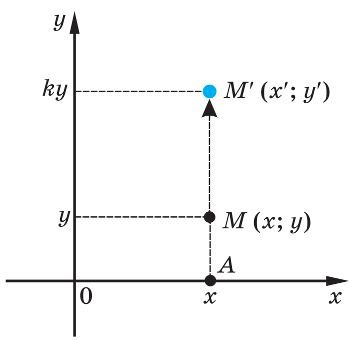


Рис. 27

6. Побудова графіка функції $y = f(\alpha x)$.

Для побудови графіка функції $y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$ виберемо як першу координату точки C цього графіка значення $\frac{x}{\alpha}$. Тоді графік функції $y = f(\alpha x)$ складатиметься з усіх точок C з координатами $\left(\frac{x}{\alpha}; y\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f\left(\alpha \frac{x}{\alpha}\right)\right) = \left(\frac{x}{\alpha}; f(x)\right)$, а графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок $M(x; f(x))$ (рис. 28).
Назвемо *перетворенням розтягу вздовж осі Ox з коефіцієнтом* α (де $\alpha > 0$) таке перетворення фігури F, при якому кожна її точка $(x; y)$ переходить у точку $(\alpha x; y)$.
Перетворення розтягу вздовж осі Ox задається формулами: $x' = \alpha x$; $y' = y$. Ці формули виражають координати $(x'; y')$ точки M', у яку переходить точка $M(x; y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Ox (рис. 29). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка BM в α разів, і в результаті точка M переходить у точку M'. (Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають розтягом (у $\frac{1}{\alpha}$ разів) тільки при $0 < \alpha < 1$, а при $\alpha > 1$ його називають *стиском уздовж осі Ox* (у α разів).) Як бачимо, кожна точка C графіка функції $y = f(\alpha x)$ одержується з точки M графіка функції $y = f(x)$ перетворенням розтягу вздовж осі Ox (при цьому загальна форма графіка не змінюється). Тому

графік функції $y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $0 < \alpha < 1$ розтяг у $\frac{1}{\alpha}$ разів) або стискуванням (при $\alpha > 1$ стиск у α разів) уздовж осі Ox.

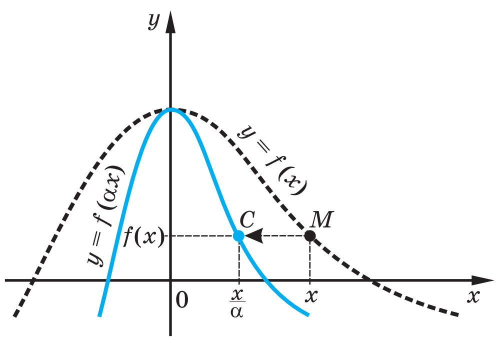


Рис. 28

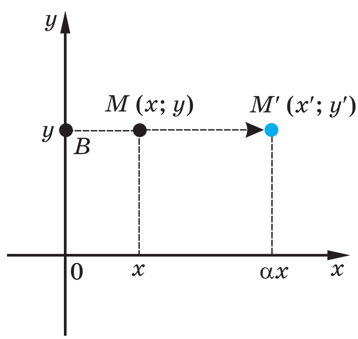
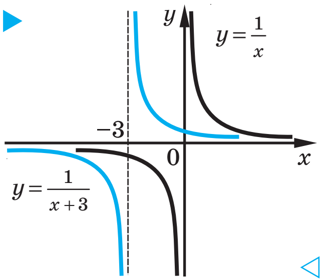


Рис. 29

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції $y=\frac{1}{x+3}$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ 

◁

К о м е н т а р

Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\frac{1}{x}$. Тоді графік функції

$$y=\frac{1}{x+3}=f(x+3)=f(x-(-3))$$

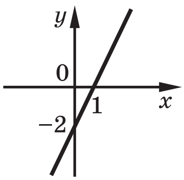
можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y=f(x)$ уздовж осі Ox на (-3) одиниці (тобто вліво).

Приклад 2 Побудуйте графік функції $y=-|2x-2|$.

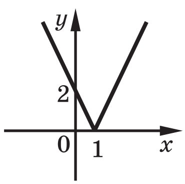
Р о з в ' я з а н н я

▶ Послідовно будуємо графіки:

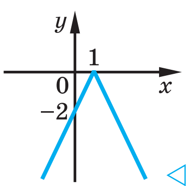
1. $y=2x-2$;



2. $y=|2x-2|$;



3. $y=-|2x-2|$.



◁

К о м е н т а р

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції.

1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=2x-2$ (пряма).
2. Потім можна побудувати графік функції $y=\varphi(x)=|2x-2|=|f(x)|$ (вище осі Ox графік $y=2x-2$ залишається без зміни, а частина графіка нижче осі Ox відображається симетрично відносно осі Ox).
3. Після цього можна побудувати графік функції $y=-|2x-2|=-\varphi(x)$ (симетрія графіка функції $y=\varphi(x)$ відносно осі Ox).

Приклад 3* Побудуйте графік функції $y=\sqrt{4-|x|}$.

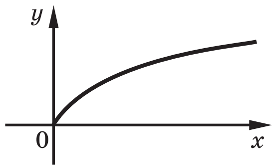
Розв'язання

▶ Запишемо рівняння заданої функції так:

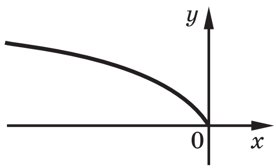
$$y=\sqrt{4-|x|}=\sqrt{-(|x|-4)}\ .$$

Послідовно будуємо графіки:

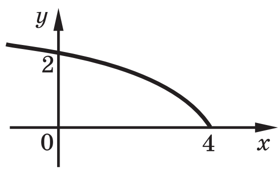
1. $y=\sqrt{x}$;



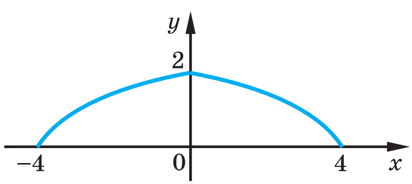
2. $y=\sqrt{-x}$;



3. $y=\sqrt{-(x-4)}$;



4. $y=\sqrt{-(|x|-4)}$.



◁

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції. Для цього її підкореневий вираз запишемо так, щоб можна було скористатися перетвореннями графіків, що наведено в таблиці 4, а саме:

$$y=\sqrt{-(|x|-4)}\ .$$

1. Ми можемо побудувати графік функції $y=f(x)=\sqrt{x}$.

2. Потім можна побудувати графік функції $y=g\,(x)=\sqrt{-x}=f\,(-x)$ (симетрія графіка функції $f\,(x)$ відносно осі Oy).

3. Після цього можна побудувати графік функції
$$y=\varphi\,(x)=\sqrt{-(x-4)}=g\,(x-4)$$
(паралельне перенесення графіка функції $g\,(x)$ уздовж осі Ox на 4 одиниці).

4. Потім уже можна побудувати графік заданої функції
$$y=\sqrt{-(|x|-4)}=\varphi(|x|)=\sqrt{4-|x|}$$
(праворуч від осі Oy відповідна частина графіка функції $y=\varphi\,(x)$ залишається без зміни, і та сама частина відображується симетрично відносно осі Oy).

Запитання для контролю

1. На прикладах поясніть, як можна з графіка функції $y = f\,(x)$ одержати графік функції:
1) $y = -f\,(x)$; 2) $y = f\,(-x)$; 3) $y = f\,(x - a)$;
4) $y = f\,(x) + c$; 5) $y = kf\,(x)$, де $k > 0$; 6) $y = f\,(\alpha x)$, де $\alpha > 0$;
7) $y = |f\,(x)|$; 8) $y = f\,(|x|)$.

2*. Обґрунтуйте геометричні перетворення, за допомогою яких з графіка функції $y = f(x)$ можна одержати графіки вказаних вище функцій.

Вправи

Побудуйте графіки функцій та відповідностей **(1–7)**:

1. 1) $y = |x - 5|$; 2) $y = |x| - 5$; 3) $y = ||x| - 5|$; 4*) $|y| = x - 5$.

2. 1°) $y = x^2 - 9$; 2) $y = |x^2 - 9|$; 3) $y = |x^2| - 9$; 4*) $|y| = x^2 - 9$.

3. 1°) $y = (x+1)^2$; 2) $y = (|x|+1)^2$; 3) $y = (x+1)^2 - 3$; 4) $y = |(x+1)^2 - 3|$.

4. 1°) $y = \frac{1}{x+2}$; 2) $y = \left|\frac{1}{x+2}\right|$; 3) $y = \frac{1}{|x|+2}$; 4*) $|y| = \frac{1}{x+2}$.

5. 1°) $y = -\frac{2}{x}$; 2°) $y = 3 - \frac{2}{x}$; 3) $y = -\frac{2}{x-1}$; 4) $y = -\frac{2}{|x|}$.

6. 1°) $y = \sqrt{x-3}$; 2°) $y = \sqrt{x} - 3$; 3) $y = \sqrt{|x| - 3}$; 4) $y = |\sqrt{x} - 3|$;

5*) $y = \left|\sqrt{|x|} - 3\right|$; 6*) $|y| = \sqrt{x-3}$; 7*) $|y| = \sqrt{x} - 3$.

7. 1°) $y = -\sqrt{x}$; 2°) $y = -\sqrt{x} + 4$; 3) $y = -\sqrt{|x|}$; 4) $y = -\sqrt{x-1}$.

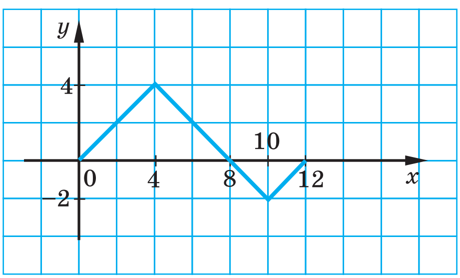
8. Функція $y = f(x)$ задана на проміжку $[0;12]$ і має графік, зображений на рисунку 30, *а*. Побудуйте графіки функцій (та відповідностей 9* і 10*):

1) $y = -f(x)$; 2) $y = f(-x)$; 3) $y = |f(x)|$; 4) $y = f(|x|)$;

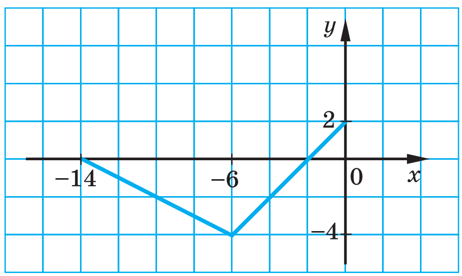
5*) $y = 2f(x)$; 6*) $y = f(2x)$; 7*) $y = \frac{1}{2}f(x)$; 8*) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$;

9*) $|y| = f(x)$; 10*) $|y| = f(|x|)$.

9. Виконайте завдання вправи 8 для функції $y = f(x)$, заданої на проміжку $[-14; 0]$, графік якої зображено на рисунку 30, *б*.



а



б

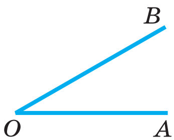
Рис. 30

§ 2 РАДІАННА МІРА КУТІВ

Таблиця 5

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття кута</td></tr>
<tr><td>У геометрії</td><td>У тригонометрії*</td></tr>
<tr><td>

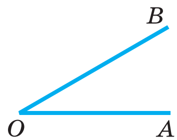
Кут — геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки



$\angle AOB$ утворений променями OA і OB

</td><td>

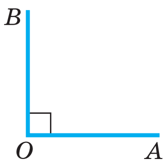
Кут — фігура, утворена при повороті променя на площині навколо початкової точки



$\angle AOB$ утворений при повороті променя OA навколо точки O

</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Вимірювання кутів</td></tr>
<tr><td colspan="2">Градусна міра кута ($1^\circ = \frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута)</td></tr>
<tr><td>

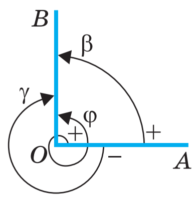
Кожному куту ставиться у відповідність градусна міра $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$.



$\angle AOB = 90^\circ$

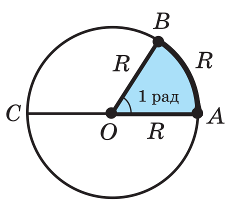
</td><td>

Кожному куту як фігурі ставиться у відповідність кут повороту, за допомогою якого утворений цей кут. Кут повороту $\alpha \in (-\infty; +\infty)$.



$\angle AOB = \beta = 90^\circ$
$\angle AOB = \gamma = -270^\circ$
$\angle AOB = \varphi =$
$= 90^\circ + 360^\circ = 450^\circ$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Радіанна міра кута</td></tr>
<tr><td colspan="2">



1 *радіан* — центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

$\angle AOB = 1$ рад. Це означає, що $\cup AB = OA = R$

$\angle AOC = 180^\circ = \pi$ (радіан)

$\angle AOC$ — розгорнутий.

$1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан

1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$

</td></tr>
</table>

* Походження та зміст терміна «тригонометрія» див. на с. 139.

Пояснення і обґрунтування

1. Поняття кута. У курсі геометрії кут означається як геометрична фігура, утворена двома променями, які виходять з однієї точки. Наприклад, кут AOB зображений у першому пункті таблиці 5, — це кут, утворений променями OA і OB.

Кут можна також розглядати як результат повороту променя на площині навколо початкової точки. Наприклад, повертаючи промінь OA навколо точки O від початкового положення OA до кінцевого положення OB, теж одержимо кут AOB. Зауважимо, що досягнути кінцевого положення OB можна при повороті променя OA як за годинниковою стрілкою, так і проти неї.

2. Вимірювання кутів. Наведені вище різні означення кута приводять до різного розуміння вимірювання кутів.

У курсі геометрії кожному куту відповідає його *градусна міра*, яка може знаходитися тільки в межах від 0° до 180°, і тому, наприклад, для прямого кута AOB (див. пункт 2 табл. 5) його міра записується однозначно:

$\angle AOB = 90^\circ$ (нагадаємо, що 1° — це $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута).

При вимірюванні кутів повороту домовилися, що **напрям повороту проти годинникової стрілки вважається додатним, а за годинниковою стрілкою — від'ємним.**

Тому при вимірюванні кутів, утворених при повороті променя навколо початкової точки, ми можемо одержати як додатні, так і від'ємні значення кутів повороту. Наприклад, якщо кут AOB, у якому промені OA і OB є взаємно перпендикулярними, одержано при повороті променя OA на кут 90° проти годинникової стрілки, то значення кута повороту β (див. відповідний рисунок у пункті 2 табл. 5) дорівнює $+90^\circ$ (або просто 90°). Якщо той самий кут AOB одержано при повороті променя OA на кут 270° за годинниковою стрілкою (зрозуміло, що повний оберт — це 360°), то значення кута повороту γ дорівнює (-270°). Той самий кут AOB можна також одержати при повороті променя OA проти годинникової стрілки на 90° і ще на повний оберт; у цьому випадку значення кута повороту φ дорівнює $90^\circ + 360^\circ$, тобто 450° і т. д.

Вибравши як значення кута повороту довільне від'ємне чи додатне число (градусів), ми завжди можемо повернути промінь OA (за годинниковою стрілкою чи проти неї) і одержати відповідний кут AOB. Таким чином, значення кута повороту (у градусах) може набувати всіх дійсних значень від $-\infty$ до $+\infty$.

Для вимірювання кутів певний кут приймають за одиницю виміру і за її допомогою вимірюють інші кути.

За одиницю виміру можна прийняти будь-який кут.

Нагадаємо, що $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута — це один градус (1°).

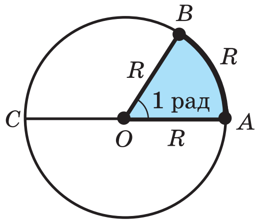


Рис. 31

У техніці за одиницю вимірювання кутів приймають повний оберт (зазначимо, що 1 градус — це $\frac{1}{360}$ частина повного оберту).

У мореплавстві за одиницю вимірювання кутів приймають румб, який дорівнює $\frac{1}{32}$ частині повного оберту.

У математиці та фізиці, крім градусної міри кутів, використовується також *радіанна міра кутів*.

Якщо розглянути деяке коло, то

1 *радіан* —це центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.

Отже, якщо кут AOB дорівнює одному радіану (рис. 31), то це означає, що $\cup AB = OA = R$.

Встановимо зв'язок між радіанними і градусними мірами кутів.

Центральному розгорнутому куту AOC (рис. 31), який дорівнює 180°, відповідає півколо, тобто дуга, довжина якої дорівнює πR, а одному радіану — дуга довжиною R. Отже, радіанна міра кута 180° дорівнює $\frac{\pi R}{R} = \pi$. Таким чином,

$$180^\circ = \pi \text{ радіан.}$$

Із цієї рівності одержуємо:

$$\boxed{1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ радіан}}, \qquad \boxed{1 \text{ радіан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ}.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Виразіть у радіанній мірі величини кутів: 30°; 45°; 60°; 90°; 270°; 360°.

▶ Оскільки 30° — це $\frac{1}{6}$ частина кута 180°, то з рівності $180^\circ = \pi$ (рад) одержуємо, що $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ (рад).

Аналогічно можна обчислити і величини інших кутів.

У загальному випадку враховуємо, що $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ радіан, тоді:

$45^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4}$ (рад); $60^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$ (рад);

$90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (рад); $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$ (рад); $360^\circ = 2\pi$ (рад). ◁

Враховуючи, що радіанними мірами розглянутих кутів доводиться користуватися досить часто, запишемо одержані результати у вигляді довідкової таблиці:

Таблиця 6

Кут у градусах	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Кут у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

З а у в а ж е н н я. Найчастіше при запису радіанної міри кутів назву одиниці виміру «радіан» (або скорочено *рад*) не пишуть. Наприклад, замість рівності $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ радіан пишуть $90^\circ = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2 Виразіть у градусній мірі величини кутів: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5.

▶ Оскільки $\frac{\pi}{10}$ — це $\frac{1}{10}$ частина кута π, то з рівності $\pi = 180^\circ$ одержуємо, що $\frac{\pi}{10} = 18^\circ$. Аналогічно можна обчислити і величини кутів $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{3\pi}{4}$.

У загальному випадку враховуємо, що 1 радіан $= \frac{180^\circ}{\pi}$, тоді:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ; \quad \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 135^\circ; \quad 5 = 5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{900^\circ}{\pi} \approx 286^\circ. \ ◁$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна означити кут за допомогою повороту променя. Як при такому означенні вимірюються кути?
2. Як ви розумієте такі твердження: «Величина кута дорівнює 450°», «Величина кута дорівнює (-225°)»? Зобразіть ці кути.
3. Як можна означити кут в 1°?
4. Дайте означення кута в 1 радіан.
5. Чому дорівнює градусна міра кута в π радіан?
6. Поясніть на прикладах, як за радіанною мірою кута знайти його градусну міру і навпаки — за градусною мірою кута знайти його радіанну міру.

Вправи

1°. Зобразіть кут, що утворений поворотом променя *OA* навколо точки *O* на:
1) 270°; 2) -270°; 3) 720°; 4) -90°;
5) 225°; 6) -45°; 7) 540°; 8) -180°;
9) 360°; 10) -60°.

2°. Чому дорівнюють кути повороту, що показані на рисунку 32?

3. Виразіть у радіанній мірі величини кутів:
1°) 225°; 2°) 36°; 3) 100°; 4) -240°;
5) $-22{,}5^\circ$; 6) -150°.

4. Виразіть у градусній мірі величини кутів:
1) 3π; 2) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $-\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{7\pi}{6}$;
5) $-\frac{\pi}{18}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 7) $-\frac{\pi}{8}$; 8) 3.

5. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть радіанні міри кутів:
1) 27°; 2) 132°; 3) 43°; 4) 114°.

6. За допомогою калькулятора (або таблиць) знайдіть градусні міри кутів:
1) 0,5585; 2) 0,8098; 3) 3,1416; 4) 4,4454.

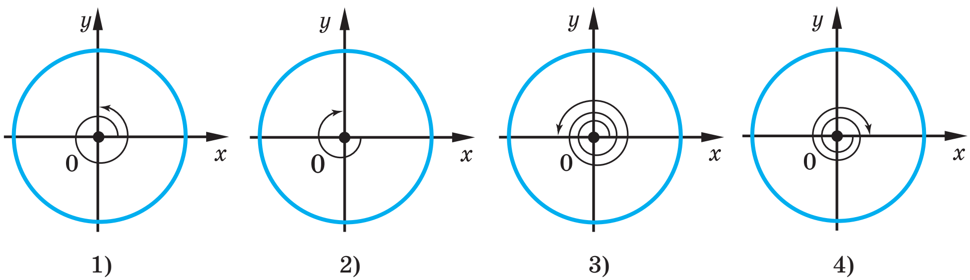
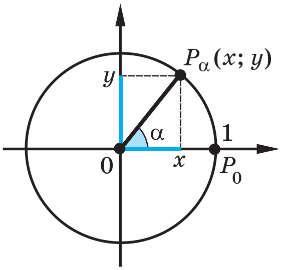
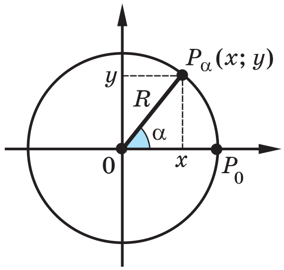
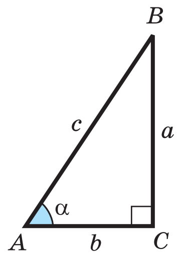


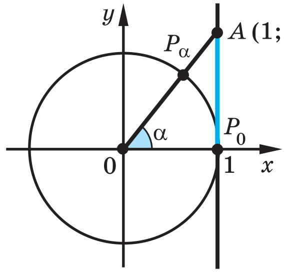
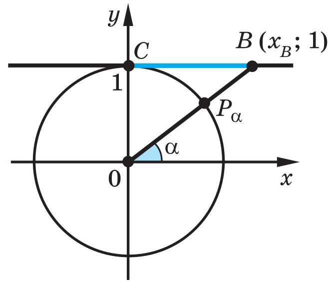
Рис. 32

§3 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ КУТА І ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

Таблиця 7

1. Означення тригонометричних функцій		
через одиничне коло ($R = 1$)	через довільне коло (R — радіус кола)	через прямокутний трикутник (для гострих кутів)
		
$\boxed{\sin\alpha = y}$ — ордината точки P_α $\boxed{\cos\alpha = x}$ — абсциса точки P_α $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$	$\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{R}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{R}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}}$	$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}}$ $\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}}$
2. Тригонометричні функції числового аргументу		
sin (числа α) = sin (кута в α радіан) cos (числа α) = cos (кута в α радіан) tg (числа α) = tg (кута в α радіан) ctg (числа α) = ctg (кута в α радіан)		

Продовж. табл. 7

3. Лінії тангенсів і котангенсів	
	
AP_0 — лінія тангенсів ($AP_0 \parallel Oy$)	CB — лінія котангенсів ($CB \parallel Ox$)
$\mathrm{tg}\,\alpha = y_A$ — ордината відповідної точки лінії тангенсів	$\mathrm{ctg}\,\alpha = x_B$ — абсциса відповідної точки лінії котангенсів

Пояснення та обґрунтування

1. Означення тригонометричних функцій. З курсу геометрії вам відомо означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику. Нагадаємо їх.

Синусом гострого кута α в прямокутному трикутнику називається відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ (рис. 33).

Косинусом гострого кута α в прямокутному трикутнику називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.

Тангенсом гострого кута α в прямокутному трикутнику називається відношення протилежного катета до прилеглого: $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$.

Котангенсом гострого кута α в прямокутному трикутнику називається відношення прилеглого катета до протилежного: $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$.

У курсі геометрії було обґрунтовано, що синус і косинус гострого кута залежать тільки від величини кута і не залежать від довжин сторін трикутника і його розташування, тобто синус і косинус (а отже, і тангенс, і котангенс) є функціями кута, які називаються *тригонометричними функціями*.

Також у курсі геометрії з використанням кола з центром у початку координат було введено означення тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180°. Але ці означення можна використати для знаходження тригонометричних функцій довільних кутів. Нагадаємо їх (але тепер будемо розглядати довільні кути α від $-\infty$ до $+\infty$).

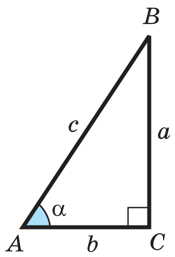


Рис. 33

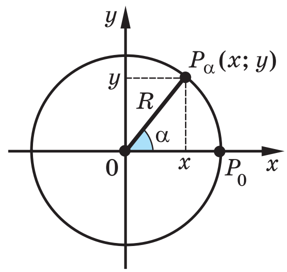


Рис. 34

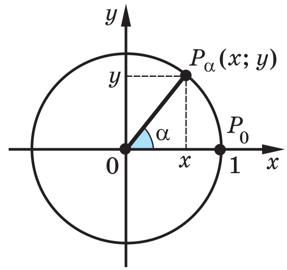


Рис. 35

Візьмемо коло радіуса R з центром у початку координат. Позначимо точку кола на додатній півосі абсцис через P_0 (рис. 34). Потрібні нам кути будемо утворювати поворотом радіуса OP_0 навколо точки O. Нехай у результаті повороту на кут α навколо точки O радіус OP_0 займе положення OP_α (кажуть, що при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α, а точка P_0 переходить у точку P_α). Нагадаємо, що при $\alpha > 0$ радіус OP_0 повертається проти годинникової стрілки, а при $\alpha < 0$ — за нею.

Нехай точка P_α має координати $(x; y)$. Тоді:

синусом кута α називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса: $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$;

косинусом кута α називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса: $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$;

тангенсом кута α називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ кола до її абсциси: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ (звичайно, при $x \neq 0$);

котангенсом кута α називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ кола до її ординати: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$ (при $y \neq 0$).

Як і для тригонометричних функцій гострих кутів, значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ залежать тільки від міри кута α і не залежать від R*. Зручно вибрати $R = 1$, що дозволить дещо спростити наведені означення тригонометричних функцій.

Коло радіуса 1 з центром у початку координат будемо називати *одиничним колом*.

Нехай при повороті на кут α точка $P_0(1; 0)$ переходить у точку $P_\alpha(x; y)$ (тобто при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α) (рис. 35).

---

* Це випливає з того, що два концентричні кола гомотетичні (центр гомотетії — точка O, а коефіцієнт k — відношення радіусів цих кіл), тоді і точки P_α на цих колах теж будуть гомотетичні. Отже, при переході від одного кола до іншого в означеннях тригонометричних функцій чисельник і знаменник відповідного дробу помножаться на k, а значення дробу не зміниться.

Синусом кута **α називається ордината точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола:**

$$\sin\alpha = y.$$

Косинусом кута **α називається абсциса точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола:**

$$\cos\alpha = x.$$

Тангенсом кута **α називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її абсциси, тобто відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.**

Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\text{де } \cos\alpha \neq 0)}.$$

Котангенсом кута **α називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола до її ординати, тобто відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.**

Отже,

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\ (\text{де } \sin\alpha \neq 0)}.$$

Приклад Користуючись цими означеннями, знайдемо синус, косинус, тангенс і котангенс кута $\frac{2\pi}{3}$ радіан.

▶ Розглянемо одиничне коло (рис. 36). При повороті на кут $\frac{2\pi}{3}$ радіус OP_0 переходить у радіус $OP_{\frac{2\pi}{3}}$ (а точка P_0 переходить у точку $P_{\frac{2\pi}{3}}$). Координати точки $P_{\frac{2\pi}{3}}$ можна знайти, використовуючи властивості прямокутного трикутника $OAP_{\frac{2\pi}{3}}$ (з кутами 60° і 30° та гіпотенузою 1): $x = -OA = -\frac{1}{2}$; $y = AP_{\frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді: $\sin\frac{2\pi}{3} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{2\pi}{3} = x = -\frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{\cos\frac{2\pi}{3}} = -\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. ◁

Аналогічно знаходяться значення синуса, косинуса, тангенса і котангенса кутів, указаних у верхньому рядку наступної таблиці 8.

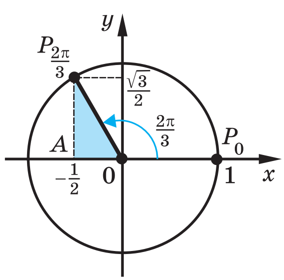


Рис. 36

Зазначимо, що таким чином можна знайти тригонометричні функції тільки деяких кутів. Тригонометричні функції довільного кута звичайно знаходять за допомогою калькулятора або таблиць.

2. Тригонометричні функції числового аргументу. Введені означення дозволяють розглядати не тільки тригонометричні функції кутів, а й тригоно-

Таблиця 8

α									
α	градуси	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	0	не існує	0
ctg α		не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не існує	0	не існує

метричні функції числових аргументів, якщо розглядати тригонометричні функції числа α як відповідні тригонометричні функції кута в α радіан. Тобто:

синус числа α — це синус кута в α радіан;
косинус числа α — це косинус кута в α радіан.

Наприклад: $\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\ \text{радіан}\right) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ (див. також пункт 2 табл. 7).

3. Лінії тангенсів і котангенсів. Для розв'язування деяких задач корисно мати уявлення про лінії тангенсів та котангенсів.

Проведемо через точку P_0 одиничного кола пряму AP_0, паралельну осі Oy (рис. 37). Ця пряма називається *лінією тангенсів*.
Нехай α — довільне число (чи кут), для якого $\cos\alpha \neq 0$. Тоді точка P_α не лежить на осі Oy і пряма OP_α перетинає лінію тангенсів у точці A.
Оскільки пряма OP_α проходить через початок координат, то її рівняння $y = kx$. Але ця пряма проходить через точку P_α з координатами $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, отже, координати точки P_α задовольняють рівнянню прямої $y = kx$, тобто

$\sin\alpha = k\cos\alpha$. Звідси $k = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким чином, пряма OP_α має рівняння $y = (\operatorname{tg}\alpha)x$.
Пряма AP_0 має рівняння $x = 1$. Щоб знайти ординату точки A, досить у рівняння прямої OP_α підставити $x = 1$. Одержуємо $y_A = \operatorname{tg}\alpha$. Отже,

тангенс кута (числа) α — це ордината відповідної точки на лінії тангенсів.

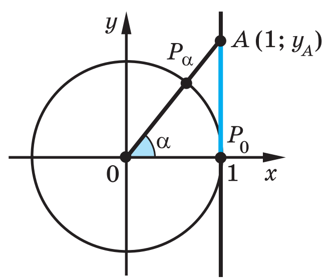


Рис. 37

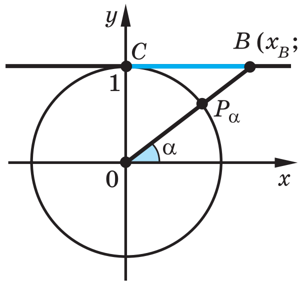


Рис. 38

Аналогічно вводиться і поняття *ліній котангенсів*: пряма CB (рис. 38), яка проходить через точку C (0; 1) одиничного кола паралельно осі Ox.

Якщо α — довільне число (чи кут), для якого $\sin\alpha \neq 0$ (тобто точка P_α не лежить на осі Ox), то пряма OP_α перетинає лінію котангенсів у деякій точці B (x_B; 1).

Аналогічно попередньому обґрунтовується, що $x_B = \operatorname{ctg}\alpha$, отже,

котангенс кута (числа) α — це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів.

Запитання для контролю

1. Сформулюйте означення тригонометричних функцій гострого кута в прямокутному трикутнику.
2. Сформулюйте означення тригонометричних функцій довільного кута:
а) використовуючи коло радіуса R з центром у початку координат;
б) використовуючи одиничне коло.
3. Що мають на увазі, коли говорять про синус, косинус, тангенс і котангенс числа α?

Вправи

1°. Побудуйте на одиничному колі точку P_α, у яку переходить точка P_0 (1; 0) одиничного кола при повороті на кут α. У якій координатній чверті знаходиться точка P_α в завданнях 3–6?

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$; 5) $\alpha = \frac{4\pi}{3}$; 6) $\alpha = \frac{7\pi}{4}$.

2. Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (якщо вони існують) при:

1) $\alpha = 3\pi$; 2) $\alpha = -4\pi$; 3) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;

4) $\alpha = \frac{5\pi}{2}$; 5*) $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$; 6*) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

3°. Користуючись означенням синуса і косинуса, за допомогою одиничного кола вкажіть знаки $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо:

1) $\alpha = \frac{6\pi}{5}$; 2) $\alpha = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

4) $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$; 5) $\alpha = \frac{\pi}{10}$.

4*. Користуючись лінією тангенсів, укажіть знак $\operatorname{tg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha=\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha=-\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=\frac{11\pi}{6}$;

4) $\alpha=-\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha=\frac{9\pi}{4}$.

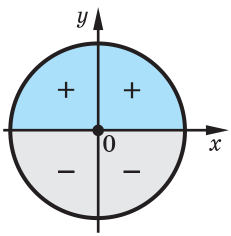
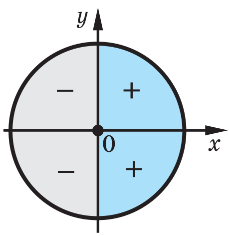
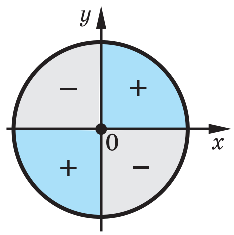
5*. Користуючись лінією котангенсів, укажіть знак $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\alpha=-\frac{4\pi}{3}$; 2) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; 3) $\alpha=-\frac{11\pi}{6}$;

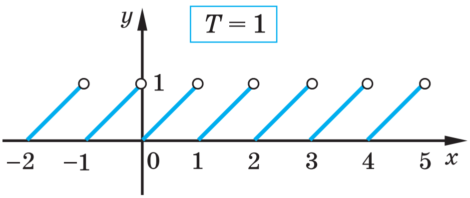
4) $\alpha=\frac{7\pi}{6}$; 5) $\alpha=-\frac{9\pi}{4}$.

§4 ВЛАСТИВОСТІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 9

<table>
<tr><td colspan="3">1. Знаки тригонометричних функцій</td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha$
</td><td>$\cos\alpha$
</td><td>$\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$
</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Парність і непарність</td></tr>
<tr><td>Косинус — парна функція
$\boxed{\cos(-\alpha)=\cos\alpha}$</td><td colspan="2">Синус, тангенс і котангенс — непарні функції
$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$
$\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 9

<table>
<tr><td colspan="3">3. Періодичність</td></tr>
<tr><td colspan="3">Функція $f(x)$ називається періодичною з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x із області визначення функції числа $(x + T)$ і $(x - T)$ також належать області визначення і виконується рівність
$$f(x + T) = f(x - T) = f(x).$$</td></tr>
<tr><td rowspan="2" colspan="2">$y = \{x\}$ — дробова частина числа x
</td><td>Через проміжки довжиною T (на осі Ox) вид графіка періодичної функції повторюється</td></tr>
<tr><td>Якщо T — період функції, то $\pm T, \pm 2T, \pm 3T, \ldots, \pm kT$ — також періоди цієї функції ($k \in N$)</td></tr>
<tr><td>$\sin(x + 2\pi) = \sin x$
$\cos(x + 2\pi) = \cos x$</td><td>Функції $\sin x$ і $\cos x$ мають період $T = 2\pi$</td><td rowspan="2">$T = 2\pi$ — спільний період для всіх функцій:
$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$</td></tr>
<tr><td>$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$</td><td>Функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ мають період $T = \pi$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Знаки тригонометричних функцій легко визначити, виходячи з означення цих функцій.

- Наприклад, $\sin\alpha$ — це ордината відповідної точки P_α одиничного кола. Тоді значення $\sin\alpha$ буде додатним, якщо точка P_α має додатну ординату, а це буде тоді, коли точка P_α знаходиться в I або II чверті (рис. 39). Якщо точка P_α знаходиться в III або IV чверті, то її ордината від'ємна, і тому $\sin\alpha$ теж від'ємний.
  Аналогічно, враховуючи, що $\cos\alpha$ — це абсциса відповідної точки P_α, одержуємо, що $\cos\alpha > 0$ в I і IV чвертях (абсциса точки P_α додатна) і $\cos\alpha < 0$ в II і III чвертях (абсциса точки P_α від'ємна) (рис. 40).

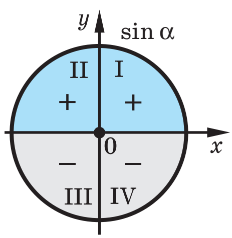


Рис. 39

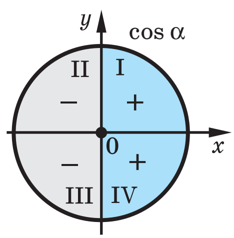


Рис. 40

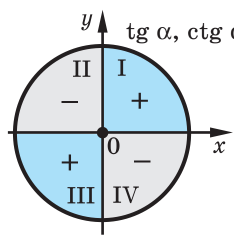


Рис. 41

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, $\operatorname{tg}\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають різні знаки, тобто в II і IV чвертях (рис. 41). ○

2. Парність і непарність тригонометричних функцій.

● Щоб дослідити тригонометричні функції на парність і непарність, зазначимо, що на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$ розміщено симетрично відносно осі Ox (рис. 42). Отже, ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати. Тоді $\cos(-\alpha) = x_{P_{-\alpha}} = x_{P_\alpha} = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = y_{P_{-\alpha}} = -y_{P_\alpha} = -\sin\alpha$.

Таким чином, **cos *x* — парна функція, а sin *x* — непарна.**

Тоді $\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Отже, **tg *x* і ctg *x* — непарні функції.** ○

Парність і непарність тригонометричних функцій можна використовувати для обчислення значень тригонометричних функцій від'ємних кутів (чисел).

Наприклад, ▶ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

3. Періодичність тригонометричних функцій. Багато процесів і явищ, що відбуваються в природі і техниці, мають повторюваний характер (наприклад, рух Землі навколо Сонця, рух маховика). Для опису такого роду процесів використовують так звані періодичні функції.

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x із області визначення функції числа $(x + T)$ і $(x - T)$ також належать області визначення і виконується рівність

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

● Враховуючи, що на одиничному колі числам (кутам) α і $\alpha + 2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$, відповідає та сама точка (рис. 43), одержуємо

$$\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha, \cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha.$$

Тоді $2\pi k$ $(k \neq 0)$ є періодом функцій $\sin x$ і $\cos x$.

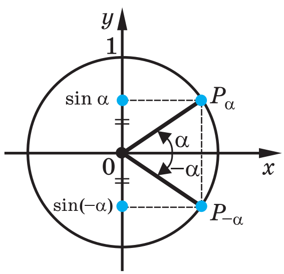


Рис. 42

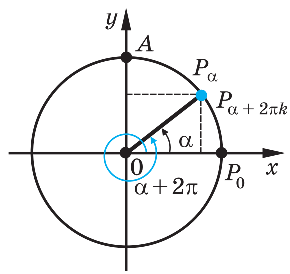


Рис. 43

При $k = 1$ одержуємо, що $T = 2\pi$ — це період функцій $\sin x$ і $\cos x$.
Доведемо, що ці функції не можуть мати меншого додатного періоду. Щоб довести, що $T = 2\pi$ — найменший додатний період косинуса, припустимо, що $T > 0$ — період функції $\cos x$. Тоді для будь-якого значення x виконується рівність $\cos(x + T) = \cos x$. Взявши $x = 0$, одержуємо $\cos T = 1$. Але це означає, що на одиничному колі при повороті на кут T точка P_0 знову потрапляє в точку P_0, тобто $T = 2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. Отже, будь-який період косинуса повинен бути кратним 2π, а значить,
2π — найменший додатний період косинуса.

- Щоб обґрунтувати, що $T = 2\pi$ — найменший додатний період функції $\sin x$, досить у рівності $\sin(x + T) = \sin x$, яка виконується для будь-яких значень x, взяти $x = \frac{\pi}{2}$. Одержуємо $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = 1$. Але це означає, що при повороті на кут $T + \frac{\pi}{2}$ точка P_0 потрапляє в точку $A(0;\ 1)$ (рис. 43), тобто $T + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, отже, $T = 2\pi k$. Таким чином, будь-який період синуса повинен бути кратним 2π, а значить,
2π — найменший додатний період синуса.

- Якщо врахувати, що на одиничному колі точки P_α і $P_{\alpha+\pi}$ є діаметрально протилежними, то цим точкам відповідає та сама точка на лінії тангенсів (рис. 44) або на лінії котангенсів (рис. 45).
Тоді $\operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi) = \operatorname{ctg}\alpha$, а також
$\operatorname{tg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(\alpha + \pi k) = \operatorname{ctg}\alpha$.
Тобто періодом функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ є πk ($k \neq 0$, $k \in \boldsymbol{Z}$).
Найменшим додатним періодом для функцій $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ є $T = \pi$.
Щоб довести це, досить у рівності $\operatorname{tg}(x + T) = \operatorname{tg} x$ взяти $x = 0$. Тоді одержуємо $\operatorname{tg} T = 0$. Отже, $T = \pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. Таким чином, будь-який період тангенса повинен бути кратним π, а значить, π — найменший додатний період тангенса. Аналогічно у відповідній рівності для $\operatorname{ctg} x$ досить взяти $x = \frac{\pi}{2}$.

- Щоб мати уявлення про поведінку *графіка періодичної функції* $y = f(x)$, згадаємо, що за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх то-

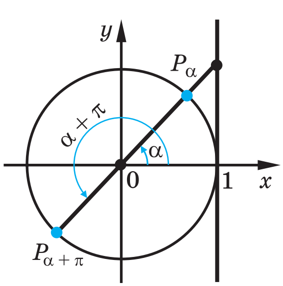


Рис. 44

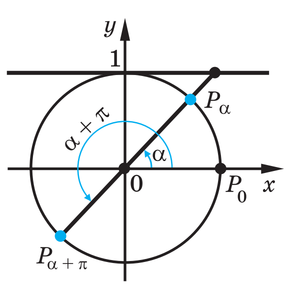


Рис. 45

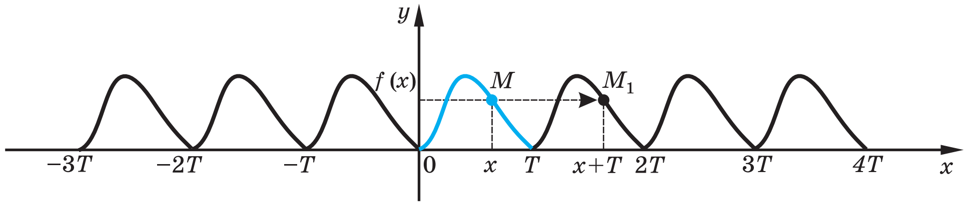


Рис. 46

чок M координатної площини, які мають координати $(x; y) = (x; f(x))$. Перша координата для точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Виберемо як першу координату значення $x + T$ (або в узагальненому вигляді — значення $x + kT$ при цілому значенні k) і врахуємо, що для періодичної функції $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$ (у загальному випадку $f(x + kT) = f(x)$). Тоді до графіка функції $y = f(x)$ буде входити також точка M_1 координатної площини з координатами:

$$(x + T; y) = (x + T; f(x + T)) = (x + T; f(x)).$$

Точку $M_1(x + T; f(x))$ можна одержати з точки $M(x; f(x))$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на T одиниць (рис. 46). У загальному випадку точку $M_2(x + kT; f(x))$ можна одержати з точки $M(x; f(x))$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на kT одиниць. Отже, через проміжок T вигляд графіка періодичної функції буде повторюватися. Тому **для побудови графіка періодичної функції з періодом T досить побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною T (наприклад, на проміжку $[0; T]$), а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані kT, де k — будь-яке натуральне число.** ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричних функцій, знайдіть:

1) $\sin\frac{21\pi}{2}$; 2) $\cos(-405°)$; 3) $\text{tg}\frac{16\pi}{3}$; 4) $\text{ctg}(-570°)$.

Розв'язання

1) ▶ $\sin\frac{21\pi}{2} = \sin\left(10\pi + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin\left(5 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$ ◁

2) ▶ $\cos(-405°) = \cos 405° =$

$= \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}.$ ◁

Коментар

1) Враховуючи, що значення функції $\sin x$ повторюються через період 2π, виділимо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 10π), а потім скористаємося рівністю $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$ ($k \in \boldsymbol{Z}$).

2) Спочатку враховуємо парність косинуса: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, а потім його періодичність із періодом $2\pi = 360°$: $\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$.

3) ▶ $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(5\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. ◁

3) **Функція тангенс періодична з періодом π, тому виділяємо в заданому аргументі число, кратне періоду (тобто 5π), а потім використовуємо рівність $\operatorname{tg}(\alpha+\pi k)=\operatorname{tg}\alpha$.**

4) ▶ $\operatorname{ctg}(-570^\circ)=-\operatorname{ctg}570^\circ=$
$=-\operatorname{ctg}(540^\circ+30^\circ)=$
$=-\operatorname{ctg}(180^\circ\cdot 3+30^\circ)=$
$=-\operatorname{ctg}30^\circ=-\sqrt{3}$. ◁

4) **Спочатку враховуємо непарність котангенса: $\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$, а потім його періодичність із періодом $\pi=180^\circ$:**
$$\operatorname{ctg}(\alpha+180^\circ\cdot k)=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Приклад 2* Доведіть твердження: **якщо функція $y=f(x)$ періодична з періодом T, то функція $y=Af(kx+b)$ також періодична з періодом $\frac{T}{|k|}$** (A, k, b — деякі числа і $k\neq 0$).

Доведення

▶ Нехай $\varphi(x)=Af(kx+b)$ і $T_1=\frac{T}{|k|}$.

Тоді $\varphi(x+T_1)=Af(k(x+T_1)+b)=$
$=Af\left(k\left(x+\frac{T}{|k|}\right)+b\right)=Af(kx\pm T+b)=$
$=Af(kx+b\pm T)=Af(kx+b)=\varphi(x)$,
а це й означає, що функція
$\varphi(x)=Af(kx+b)$ має період
$$T_1=\frac{T}{|k|}.\ ◁$$

Коментар

За означенням функція $\varphi(x)=Af(kx+b)$ буде періодичною з періодом $T_1=\frac{T}{|k|}$, якщо для будь-якого x з області визначення φ значення цієї функції в точках x і $x+T_1$ рівні, тобто $\varphi(x+T_1)=\varphi(x)$. У процесі обґрунтування враховано, що вираз $k\cdot\frac{T}{|k|}$ при $k>0$ дорівнює $k\cdot\frac{T}{k}=T$, а при $k<0$ дорівнює $k\cdot\frac{T}{-k}=-T$. Також враховано, що функція $f(x)$ за умовою періодична з періодом T, і тому $f(x_1\pm T)=f(x_1)$, де $x_1=kx+b$.

Використаємо результат, одержаний у прикладі 2, для знаходження періодів функцій.

Наприклад,

1) ▶ якщо функція $\sin x$ має період $T=2\pi$, то функція $\sin 4x$ має період
$$T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2};\ ◁$$

2) ▶ якщо функція $\operatorname{tg}x$ має період $T=\pi$, то функція $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$ має період
$$T_1=\frac{\pi}{\frac{1}{4}}=4\pi.\ ◁$$

Запитання для контролю

1. а) Назвіть знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей.
   б*) Обґрунтуйте знаки тригонометричних функцій у кожній з координатних чвертей.
2. а) Які з тригонометричних функцій є парними, а які непарними? Наведіть приклади використання парності і непарності для обчислення значень тригонометричних функцій.
   б*) Обґрунтуйте парність чи непарність відповідних тригонометричних функцій.
3. а) Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади.
   б*) Обґрунтуйте періодичність тригонометричних функцій. Укажіть найменший додатний період для синуса, косинуса, тангенса і котангенса та обґрунтуйте, що в кожному випадку цей період дійсно є найменшим додатним періодом.

Вправи

1. Користуючись періодичністю, парністю і непарністю тригонометричної функції, знайдіть:

1) $\cos\frac{19\pi}{3}$; 2) $\sin(-750^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{ctg} 945^\circ$;

5) $\sin\frac{25\pi}{4}$; 6) $\cos(-3630^\circ)$; 7) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{tg} 600^\circ$.

2*. Серед заданих функцій знайдіть періодичні і вкажіть найменший додатний період для кожної з них:

1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = \sin 2x$; 3) $f(x) = |x|$; 4) $f(x) = \operatorname{tg} 3x$; 5) $f(x) = 3$.

3. Знайдіть період кожної з заданих функцій:

1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \operatorname{tg} 5x$; 3) $y = \sin\frac{x}{3}$; 4) $y = \operatorname{ctg} 3x$; 5) $y = \cos\frac{2x}{5}$.

4. На кожному з рисунків 47–50 наведена частина графіка деякої періодичної функції з періодом T. Продовжіть графік на відрізок $[-2T; 3T]$.

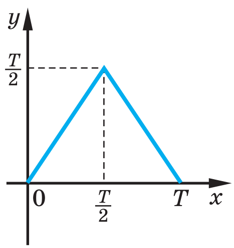


Рис. 47

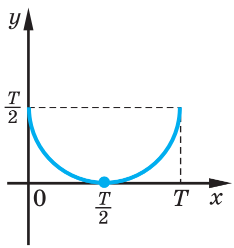


Рис. 48

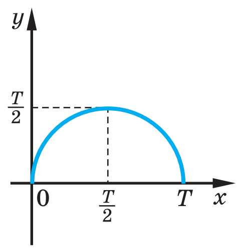


Рис. 49

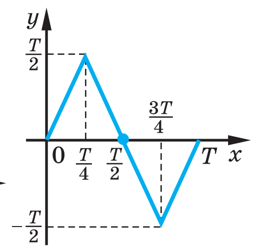


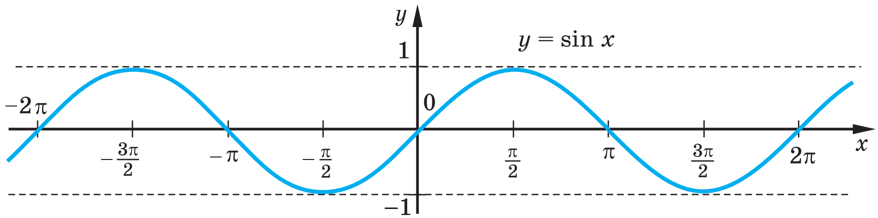
Рис. 50

§5 ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА І КОТАНГЕНСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

5.1. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = \sin x$ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 10

Графік функції $y = \sin x$ (*синусоїда*)



Властивості функції $y = \sin x$

1. *Область визначення*: $x \in R$ (x — будь-яке дійсне число). $\boxed{D(\sin x) = R}$
2. *Область значень*: $y \in [-1;\ 1]$. $\boxed{E(\sin x) = [-1;\ 1]}$
3. *Функція* ***непарна***: $\sin(-x) = -\sin x$
   (*графік симетричний відносно початку координат*).
4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin x > 0 \text{ при } x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k),\ k \in Z \\ \sin x < 0 \text{ при } x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z \end{array}}$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

функція $\sin x$ зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$,

і спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

8. ***Найбільше значення функції* дорівнює 1 при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.**

***Найменше значення функції* дорівнює -1 при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.**

Пояснення й обґрунтування

Характеризуючи властивості функцій, ми будемо найчастіше виділяти такі їх характеристики: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) періодичність; 5) точки перетину з осями координат; 6) проміжки знакосталості; 7) проміжки зростання і спадання*; 8) найбільше та найменше значення функції.

З а у в а ж е н н я. Абсциси точок перетину графіка функції з віссю Ox (тобто ті значення аргументу, при яких функція дорівнює нулю) називають *нулями функції*.

Нагадаємо, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола (рис. 51). Оскільки ординату можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то *область визначення* функції $y = \sin x$ — усі дійсні числа. Це можна записати так: $\boldsymbol{D(\sin x) = R}$.

Для точок одиничного кола ординати набувають усіх значень від -1 до 1, отже, *область значень* функції $y = \sin x$: $y \in [-1; 1]$. Це можна записати так:

$$\boldsymbol{E(\sin x) = [-1; 1].}$$

Як бачимо, *найбільше значення* функції $\sin x$ дорівнює одиниці. Це значення досягається тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, тобто при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Найменше значення функції $\sin x$ дорівнює мінус одиниці. Це значення досягається тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, тобто при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Як було показано в § 4, синус — *непарна функція*: $\sin(-x) = -\sin x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

В § 4 було обґрунтовано також, що синус — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, отже, через проміжки довжиною 2π вигляд графіка функції $\sin x$ повторюється. Тому при побудові графіка цієї функції досить побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT = 2\pi k$, де k — будь-яке натуральне число.

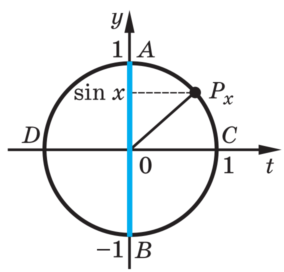


Рис. 51

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \sin 0 = 0$, тобто графік функції $y = \sin x$ проходить через початок координат.

* Проміжки зростання і спадання функції інколи ще називають проміжками монотонності функції.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\sin x$, тобто ордината відповідної точки одиничного кола, буде дорівнювати нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола буде точка C або D, тобто при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 4, значення функції синус додатні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола додатна) у I і II чвертях (рис. 52). Отже, $\sin x > 0$ при $x \in (0; \pi)$, а також, враховуючи період, при всіх $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значення функції синус від'ємні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола від'ємна) у III і IV чвертях, отже, $\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки зростання і спадання.

Враховуючи періодичність функції $\sin x$ з періодом $T = 2\pi$, досить дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Якщо $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 53, *а*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) ордината відповідної точки одиничного кола збільшується (тобто $\sin x_2 > \sin x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ зростає. Враховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також зростає в кожному з проміжків $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Якщо $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (рис. 53, *б*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) ордината відповідної точки одиничного кола зменшується (тобто $\sin x_2 < \sin x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\sin x$ спадає. Враховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проведене дослідження дозволяє обґрунтовано побудувати графік функції $y = \sin x$. Враховуючи періодичність цієї функції (з періодом 2π), досить спо-

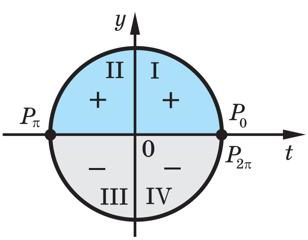


Рис. 52

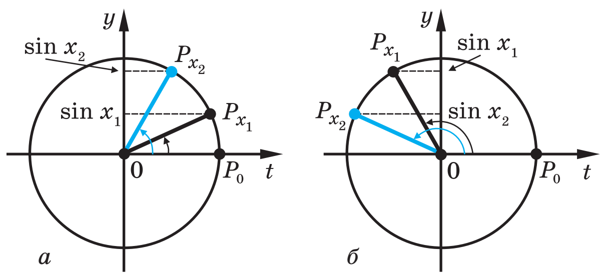


Рис. 53

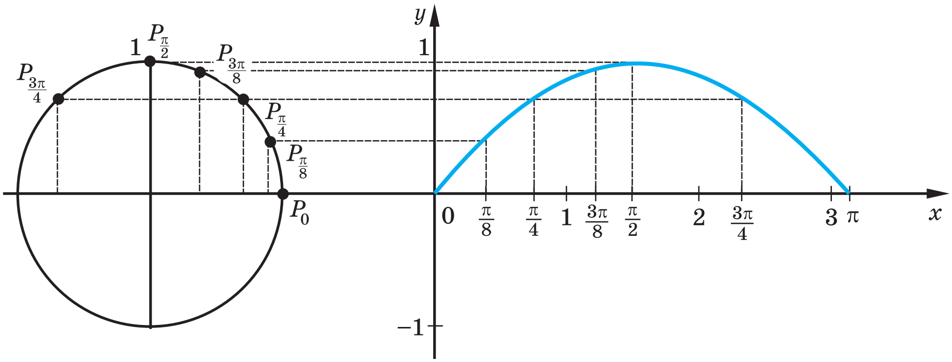


Рис. 54

чатку побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад, на проміжку $[-\pi; \pi]$. Для більш точної побудови точок графіка користуємося тим, що значення синуса — це ордината відповідної точки одиничного кола. На рисунку 54 показана побудова графіка функції $y = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$. Враховуючи непарність функції $\sin x$ (її графік симетричний відносно початку координат), для побудови графіка на проміжку $[-\pi; 0]$ відображуємо одержану криву симетрично відносно початку координат (рис. 55).

Оскільки ми побудували графік на проміжку довжиною 2π, то, враховуючи періодичність синуса (з періодом 2π), повторюємо вид графіка на кожному проміжку довжиною 2π (тобто переносимо паралельно графік уздовж осі Ox на $2\pi k$, де k — ціле число).

Одержуємо графік, наведений на рисунку 56, який називається *синусоїдою*.

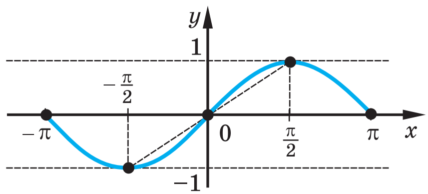


Рис. 55

З а у в а ж е н н я. Тригонометричні функції широко застосовуються в математиці, фізиці та техниці. Наприклад, багато процесів, таких як коливання струни, маятника, напруги в колі змінного струму і т. п., описуються функцією, яка задається формулою $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Такі процеси називають *гармонічними коливаннями*.

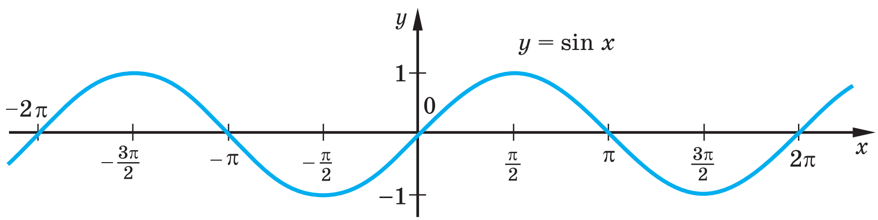


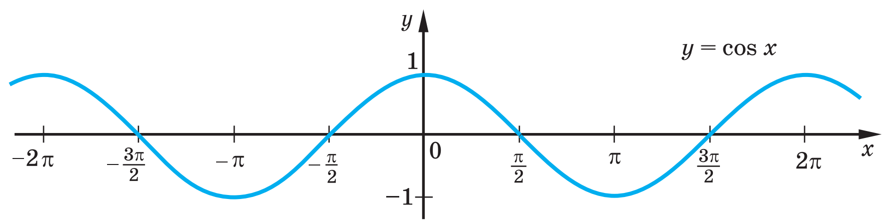
Рис. 56

Графік функції $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ можна одержати із синусоїди $y = \sin x$ стискуванням або розтягуванням її вздовж координатних осей і паралельним перенесенням уздовж осі Ox. Найчастіше гармонічне коливання є функцією часу t. Тоді воно задається формулою $y = A\sin(\omega t + \varphi)$, де A — амплітуда коливання, ω — кутова частота, φ — початкова фаза, $\dfrac{2\pi}{\omega}$ — період коливання.

5.2. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = \cos x$ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 11

Графік функції $y = \cos x$ (*косинусоїда*)



Властивості функції $y = \cos x$

1. *Область визначення*: $x \in R$ (x — будь-яке дійсне число). $\boxed{D(\cos x) = R}$
2. *Область значень*: $y \in [-1; 1]$. $\boxed{E(\cos x) = [-1; 1]}$
3. *Функція **парна***: $\cos(-x) = \cos x$ (графік симетричний відносно осі Oy).
4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = 2\pi}$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.
5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$
6. *Проміжки знакосталості*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z \\[2ex] \cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z \end{array}}$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

функція $\cos x$ зростає на кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$, і спадає на кожному з проміжків $[2\pi k;\ \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.

8. ***Найбільше значення функції* дорівнює 1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$.**
***Найменше значення функції* дорівнює -1 при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.**

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що значення косинуса — це абсциса відповідної точки одиничного кола (рис. 57). Оскільки абсцису можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то *область визначення* функції $y = \cos x$ — усі дійсні числа. Це можна записати так:

$$\boldsymbol{D}\ (\cos x) = \boldsymbol{R}.$$

Для точок одиничного кола абсциси набувають усіх значень від −1 до 1, отже, *область значень* функції $y = \cos x$: $y \in [-1; 1]$. Це можна записати так:

$$\boldsymbol{E}\ (\cos x) = [-1; 1].$$

Як бачимо, *найбільше значення* функції $\cos x$ дорівнює одиниці. Це значення досягається тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, тобто при $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Найменше значення функції $\cos x$ дорівнює мінус одиниці. Це значення досягається тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, тобто при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Як було показано в § 4, косинус — *парна функція*: $\cos(-x) = \cos x$, тому її графік симетричний відносно осі Oy.

У § 4 було обґрунтовано також, що косинус — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Отже, через проміжки довжиною 2π вид графіка функції $\cos x$ повторюється.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \cos 0 = 1$.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\cos x$, тобто абсциса відповідної точки одиничного кола, буде дорівнювати нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка C або D, тобто при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 4, значення функції косинус додатні (тобто абсциса відповідної точки одиничного кола додатна) в I і IV чвертях (рис. 58). Отже, $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а також, враховуючи період, при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

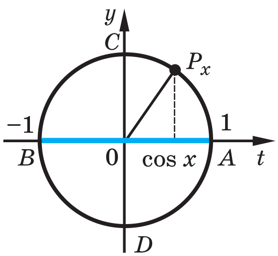


Рис. 57

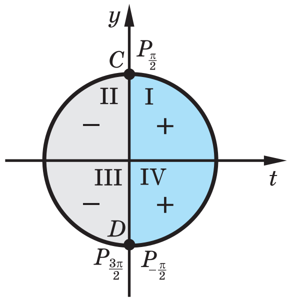


Рис. 58

Значення функції косинус від'ємні (тобто абсциса відповідної точки одиничного кола від'ємна) у II і III чвертях, отже, $\cos x < 0$ при

$$x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Проміжки зростання і спадання.

Враховуючи періодичність функції $\cos x$ ($T = 2\pi$), досить дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною 2π, наприклад, на проміжку $[0; 2\pi]$.

Якщо $x \in [0; \pi]$ (рис. 59, *а*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) абсциса відповідної точки одиничного кола зменшується (тобто $\cos x_2 < \cos x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\cos x$ спадає. Враховуючи періодичність функції $\cos x$, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Якщо $x \in [\pi; 2\pi]$ (рис. 59, *б*), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) абсциса відповідної точки одиничного кола збільшується (тобто $\cos x_2 > \cos x_1$), отже, у цьому проміжку функція $\cos x$ зростає. Враховуючи періодичність функції $\cos x$, робимо висновок, що вона також зростає в кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.

Проведене дослідження дозволяє побудувати графік функції $y = \cos x$ аналогічно до того, як було побудовано графік функції $y = \sin x$. Але графік функції $y = \cos x$ можна також одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = \sin x$, використовуючи формулу

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x}.$$

Цю формулу можна обґрунтувати, наприклад, так. Розглянемо одиничне коло (рис. 60) і відмітимо на ньому точки $A = P_x$ і $B = P_{\frac{\pi}{2}+x}$ та абсциси і ординати цих точок. Враховуючи, що $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$, одержуємо, що при по-

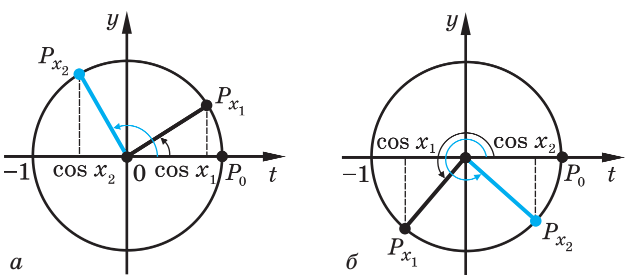


Рис. 59

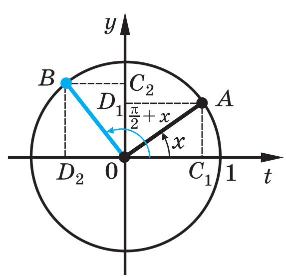


Рис. 60

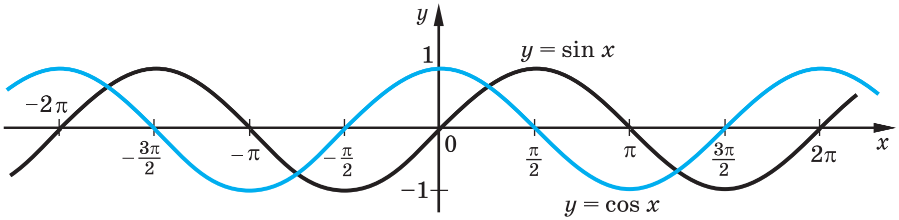


Рис. 61

вороті прямокутника OC_1AD_1 навколо точки O на кут $\frac{\pi}{2}$ проти годинникової стрілки, він перейде в прямокутник OC_2BD_2. Але тоді $OD_2 = OD_1$ і $OC_2 = OC_1$. Отже, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = y_B = OC_2 = OC_1 = t_A = \cos x$.

Зазначимо також формули, які нам знадобляться далі:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = t_B = -OD_2 = -OD_1 = -y_A = -\sin x.\ \text{Тоді,}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\operatorname{ctg} x.\ \text{Отже,}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{ctg} x}.$$

Враховуючи, що $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, графік функції $y = \cos x$ можна одержати із графіка функції $y = \sin x$ його паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 61). Одержуємо графік, який називається *косинусоїдою* (рис. 62).

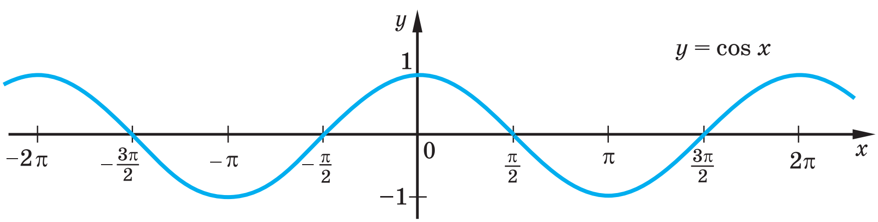
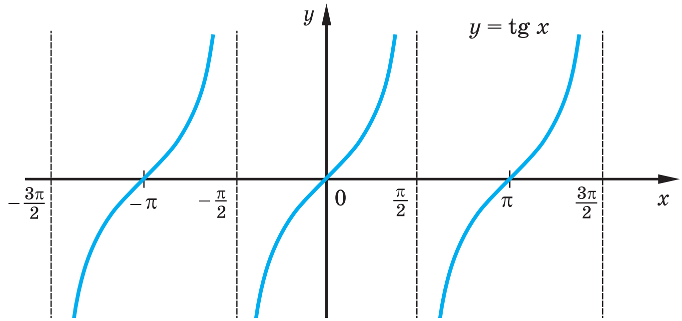


Рис. 62

5.3. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = \operatorname{tg} x$ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 12

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ (*тангенсоїда*)



Властивості функції $y = \operatorname{tg} x$

1. *Область визначення*: $\boxed{D(\operatorname{tg} x):\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$.

2. *Область значень*: $y \in R$. $\boxed{E(\operatorname{tg} x) = R}$

3. *Функція **непарна***: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ (*графік симетричний відносно початку координат*).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: *Oy* $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}}$ **Ox** $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z \\ \operatorname{tg} x < 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in Z \end{array}}$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

функція $\operatorname{tg} x$ зростає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

8. ***Найбільшого і найменшого значень* функція не має.**

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Отже, *областю визначення* тангенса будуть всі значення аргументу, при яких $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Одержуємо

$\boldsymbol{D}\,(\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x})$**:** $\boldsymbol{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z}$**.** Цей результат можна одержати і геометрично. Значення тангенса — це ордината відповідної точки T_x на лінії тангенсів (рис. 63). Оскільки точки A і B одиничного кола лежать на прямих OA і OB, паралельних лінії тангенсів, ми не зможемо знайти значення тангенса для $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Для всіх інших значень аргументу ми можемо знайти відповідну точку на лінії тангенсів і її ординату — тангенс. Отже, всі значення $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ входять до області визначення функції $y = \text{tg}\,x$.

Для точок одиничного кола (які не збігаються з точками A і B) ординати відповідних точок на лінії тангенсів набувають усіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Таким чином, *область значень* функції $y = \text{tg}\,x$ — всі дійсні числа, тобто $y \in \boldsymbol{R}$. Це можна записати так: $\boldsymbol{E}\,(\mathbf{tg}\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}$**.** З наведених міркувань також випливає, що *найбільшого* і *найменшого значень* функція $\text{tg}\,x$ не має.

Як було показано в § 4, тангенс — *непарна* функція: $\text{tg}\,(-x) = -\text{tg}\,x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Тангенс — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $\text{tg}\,(x + \pi) = \text{tg}\,x$ (див. § 4). Тому при побудові графіка цієї функції досить побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною π, а потім одержану лінію перенести паралельно праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT = \pi k$, де k — будь-яке натуральне число.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \text{tg}\,0 = 0$, тобто графік функції $y = \text{tg}\,x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\text{tg}\,x$, тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка C або D (рис. 63), тобто при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 4, значення функції тангенс додатні (тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів додатна) у I і III чвертях. Отже, $\text{tg}\,x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а також, враховуючи період, при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Значення функції тангенс від'ємні (тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів від'ємна) у II і IV чвертях. Отже, $\text{tg}\,x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

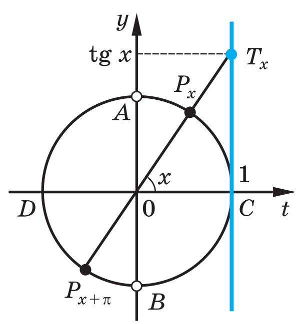


Рис. 63

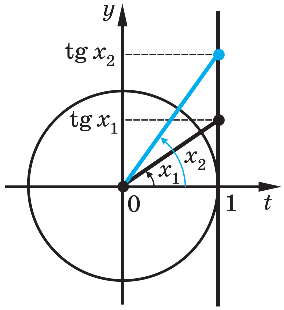


Рис. 64

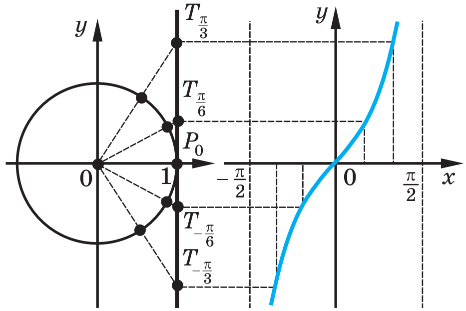


Рис. 65

Проміжки зростання і спадання.

Враховуючи періодичність функції tg x (період $T = \pi$), досить дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною π, наприклад, на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 64), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) ордината відповідної точки лінії тангенсів збільшується (тобто tg $x_2 >$ tg x_1). Отже, у цьому проміжку функція tg x зростає. Враховуючи періодичність функції tg x, робимо висновок, що вона зростає також у кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проведене дослідження дозволяє обґрунтовано побудувати графік функції $y = \text{tg}\, x$. Враховуючи періодичність цієї функції (з періодом π), спочатку побудуємо графік на будь-якому проміжку довжиною π, наприклад, на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Для більш точної побудови точок графіка скористаємося також тим, що значення тангенса — це ордината відповідної точки лінії тангенсів. На рисунку 65 показана побудова графіка функції $y = \text{tg}\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

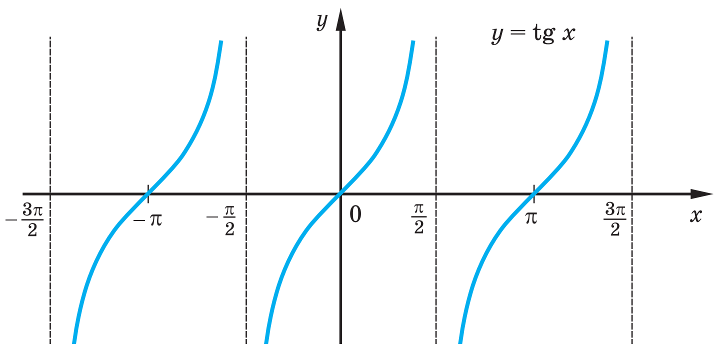


Рис. 66

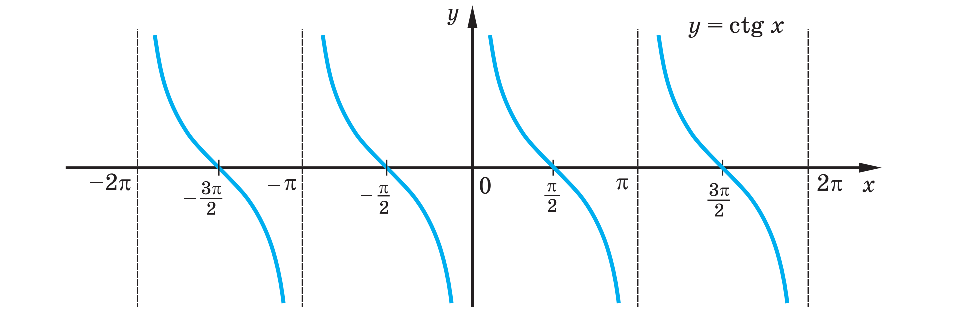
Далі, враховуючи періодичність тангенса (з періодом π), повторюємо вигляд графіка на кожному проміжку довжиною π (тобто паралельно переносимо графік уздовж осі Ox на πk, де k — ціле число).

Одержуємо графік, наведений на рисунку 66, який називається *тангенсоїдою*.

5.4. ГРАФІК ФУНКЦІЇ $y = \mathrm{ctg}\, x$ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 13

Графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$ (*котангенсоїда*)



Властивості функції $y = \mathrm{ctg}\, x$

1. *Область визначення*: $\boxed{D(\mathrm{ctg}\, x): x \neq \pi k,\ k \in Z}$

2. *Область значень*: $y \in R$. $\boxed{E(\mathrm{ctg}\, x) = R}$

3. *Функція* ***непарна***: $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x$
   (графік симетричний відносно початку координат).

4. *Функція періодична* з періодом $\boxed{T = \pi}$: $\mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}\, x$.

5. *Точки перетину з осями координат*: Oy $\boxed{\textbf{немає}}$ Ox $\boxed{\begin{cases} y = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z \end{cases}}$

6. *Проміжки знакосталості*:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{ctg}\, x > 0 \text{ при } x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z \\ \mathrm{ctg}\, x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in Z \end{array}}$$

7. *Проміжки зростання і спадання*:

   функція $\mathrm{ctg}\, x$ спадає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in Z$.

8. ***Найбільшого*** **і** ***найменшого значень*** **функція** ***не має.***

Пояснення й обґрунтування

Нагадаємо, що $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Отже, *областю визначення* котангенса будуть всі значення аргументу, при яких $\sin x \neq 0$, тобто $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Таким чином,

$$\boldsymbol{D}\ (\mathbf{ctg}\ \boldsymbol{x})\mathbf{:}\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{\pi k},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Той самий результат можна одержати, використовуючи геометричну ілюстрацію. Значення котангенса — це абсциса відповідної точки на лінії котангенсів (рис. 67). Оскільки точки A і B одиничного кола лежать на прямих OA і OB, паралельних лінії котангенсів, ми не зможемо знайти значення котангенса для $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Для всіх інших значень аргументу ми можемо знайти відповідну точку на лінії котангенсів і її абсцису — котангенс. Таким чином, усі значення $x \neq \pi k$ входять до області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Для точок одиничного кола (які не збігаються з точками A і B) абсциси відповідних точок на лінії котангенсів набувають усіх значень від $-\infty$ до $+\infty$, отже, *область значень* функції $y = \operatorname{ctg} x$ — усі дійсні числа, тобто $y \in \boldsymbol{R}$. Це можна записати так: $\boldsymbol{E}\ (\mathbf{ctg}\ \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{R}$. З наведених міркувань також випливає, що *найбільшого і найменшого значень* функція $\operatorname{ctg} x$ не має.

Як було показано в § 4, котангенс — *непарна* функція: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, тому її графік симетричний відносно початку координат.

Також в § 4 було обґрунтовано, що котангенс — *періодична* функція з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$, тому через проміжки довжиною π вигляд графіка функції $\operatorname{ctg} x$ повторюється.

Щоб знайти *точки перетину графіка функції з осями координат*, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Але $\operatorname{ctg} 0$ не існує, значить, графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ не перетинає вісь Oy.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x, при яких $\operatorname{ctg} x$, тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка C або D, тобто при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості. Як було обґрунтовано в § 4, значення функції котангенс додатні (тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів додатна) у I і III чвертях (рис. 68). Тоді $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи період, отримуємо, що $\operatorname{ctg} x > 0$ при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

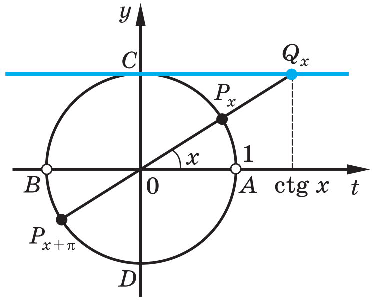


Рис. 67

Значення функції котангенс від'ємні (тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів від'ємна) у II і IV чвертях, отже, $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

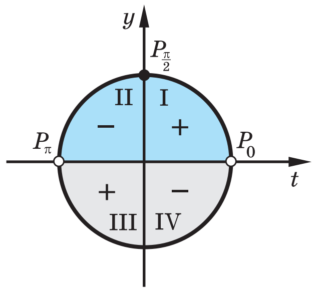


Рис. 68

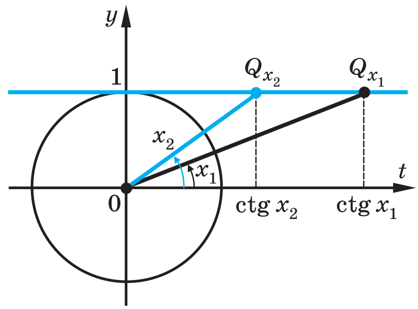


Рис. 69

Проміжки зростання і спадання.

Враховуючи періодичність функції ctg x (найменший додатний період $T = \pi$), досить дослідити її на зростання і спадання на будь-якому проміжку довжиною π, наприклад, на проміжку $(0; \pi)$.

Якщо $x \in (0; \pi)$ (рис. 69), то при збільшенні аргументу x ($x_2 > x_1$) абсциса відповідної точки лінії котангенсів зменшується (тобто $\text{ctg}\, x_2 < \text{ctg}\, x_1$), отже, у цьому проміжку функція ctg x спадає. Враховуючи періодичність, робимо висновок, що вона також спадає в кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проведене дослідження дозволяє побудувати графік функції $y = \text{ctg}\, x$ аналогічно до того, як було побудовано графік функції $y = \text{tg}\, x$. Але графік функції $y = \text{ctg}\, x$ можна одержати також за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y = \text{tg}\, x$. За формулою, наведеною на с. 63, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\text{ctg}\, x$, тобто $\text{ctg}\, x = -\text{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Тому графік функції $y = \text{ctg}\, x$ можна одержати з графіка функції $y = \text{tg}\, x$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ і симетричним відображенням одержаного графіка відносно осі Ox. Отримуємо графік, який називається *котангенсоїдою* (рис. 70).

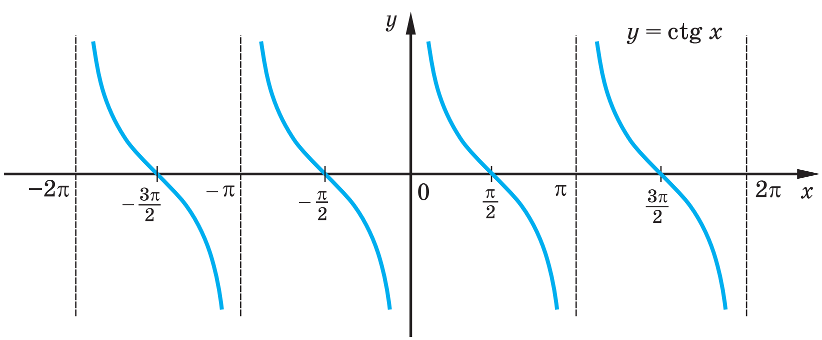


Рис. 70

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості: 1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \sin 2x$.

Коментар

Графіки всіх заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x) = \sin x$ (табл. 4). Отже, графіком кожної із цих функцій буде синусоїда.

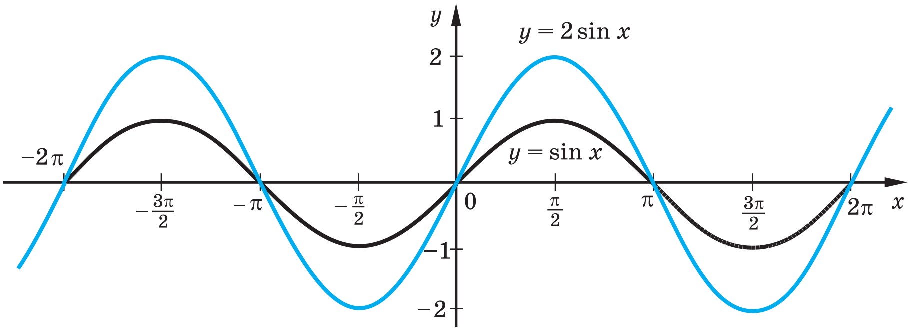
1) $y = 2\sin x = 2f(x)$ — розтягування графіка $y = \sin x$ удвічі вздовж осі Oy;
2) $y = \sin 2x = f(2x)$ — стискування графіка $y = \sin x$ удвічі вздовж осі Ox.

Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

Щоб записати проміжки знакосталості функції, зазначимо, що функція $y = 2\sin x$ періодична з періодом $T = 2\pi$, а функція $y = \sin 2x$ періодична з періодом $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Тому для кожної функції досить з'ясувати на одному періоді, де значення функції додатні (графік знаходиться вище осі Ox) і де від'ємні (графік знаходиться нижче осі Ox), а потім одержані проміжки повторити через період.

Розв'язання

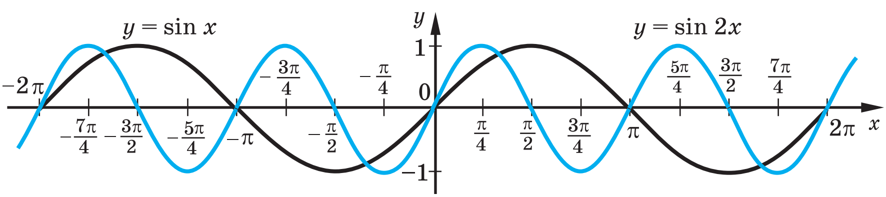
1) ▶ Графік функції $y = 2\sin x$ одержуємо із графіка функції $y = \sin x$ розтягуванням його вдвічі вздовж осі Oy.



Нулі функції: $x = \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Проміжки знакосталості: $2\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k;\ \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$;
$2\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k;\ 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

2) ▶ Графік функції $y = \sin 2x$ одержуємо із графіка функції $y = \sin x$ стискуванням його вдвічі вздовж осі Ox.



Нулі функції: $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Проміжки знакосталості: $\sin 2x > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\sin 2x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Приклад 2 Розташуйте в порядку зростання числа:
$\sin 1{,}9$; $\sin 3$; $\sin(-1)$; $\sin(-1{,}5)$.

Коментар

Для розміщення заданих чисел у порядку їх зростання з'ясуємо, які з них додатні, а які від'ємні, а потім порівняємо між собою окремо додатні числа і окремо від'ємні, користуючись відомими проміжками зростання і спадання функції $\sin x$.

Розв'язання

▶ Числа $\sin 1{,}9$ і $\sin 3$ — додатні (точки $P_{1,9}$ і P_3 знаходяться в II чверті), а числа $\sin(-1)$ і $\sin(-1{,}5)$ — від'ємні (P_{-1} і $P_{-1,5}$ знаходяться в IV чверті).

Враховуючи, що $\frac{\pi}{2} < 1{,}9 < \pi$, $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$ і те, що функція $\sin x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ спадає, з нерівності $1{,}9 < 3$ одержуємо $\sin 1{,}9 > \sin 3$.

Також $-\frac{\pi}{2} < -1 < 0$, $-\frac{\pi}{2} < -1{,}5 < 0$. Функція $\sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ зростає. Враховуючи, що $-1 > -1{,}5$, одержуємо $\sin(-1) > \sin(-1{,}5)$.

Отже, у порядку зростання ці числа розташовуються так:

$\sin(-1{,}5)$; $\sin(-1)$; $\sin 3$; $\sin 1{,}9$. ◁

Приклад 3 Побудуйте графік функції: 1) $y = |\sin x|$; 2) $y = \sin|x|$.

Коментар

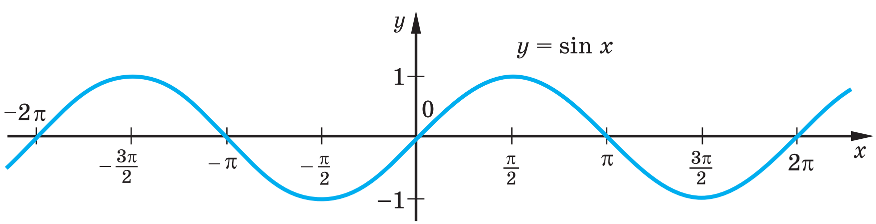
Графіки заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $f(x) = \sin x$. Згадаємо відповідні перетворення:

1) $y = |\sin x| = |f(x)|$ — вище осі Ox (і на самій осі) графік $y = \sin x$ залишається без зміни, нижче осі Ox — симетрично відображується відносно осі Ox;

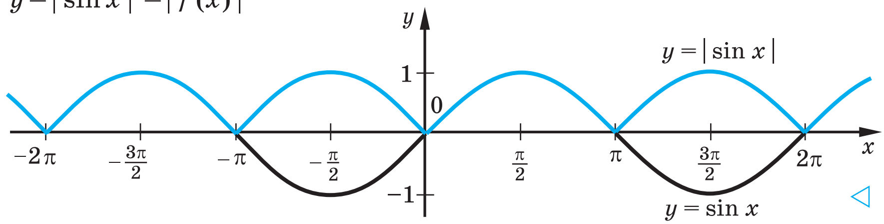
2) $y = \sin|x| = f(|x|)$ — праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік $y = \sin x$ — без зміни, і та сама частина графіка симетрично відображується відносно осі Oy.

Розв'язання

▶ Побудуємо спочатку графік функції $y = f(x) = \sin x$:

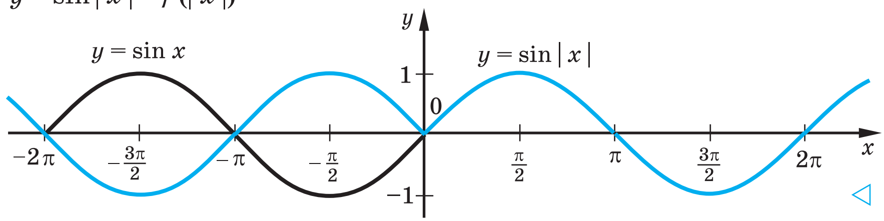


1) $y = |\sin x| = |f(x)|$



◁

2) $y = \sin|x| = f(|x|)$



◁

Приклад 4 Побудуйте графік функції та вкажіть проміжки її спадання і зростання:

1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = -\text{tg}\, x$.

Коментар

Графіки заданих функцій можна одержати за допомогою геометричних перетворень графіків функцій:

1) $f(x) = \cos x$;

2) $\varphi(x) = \text{tg}\, x$. Тоді одержуємо:

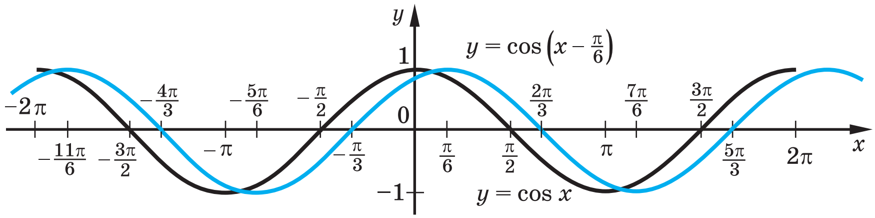
1) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ — паралельним перенесенням графіка функції $f(x)$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{6}$ одиниць;

2) $y = -\text{tg}\, x = -\varphi(x)$ — симетрією графіка функції $\varphi(x)$ відносно осі Ox.

Щоб записати проміжки спадання і зростання функцій, відмітимо, що функція $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ періодична з періодом $T = 2\pi$, а функція $y = -\text{tg}\, x$ періодична з періодом $T = \pi$. Тому для кожної функції досить з'ясувати на одному періоді, де вона спадає і де зростає, а потім одержані проміжки повторити через період.

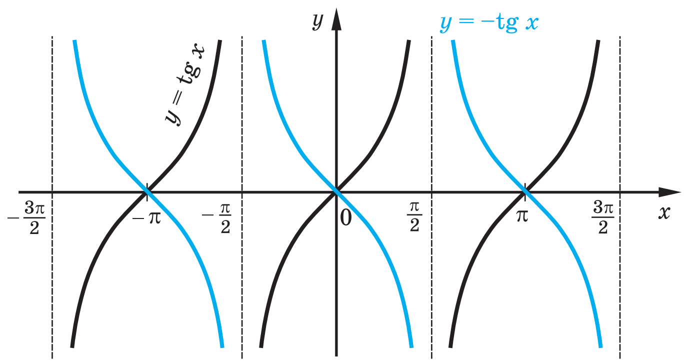
Розв'язання

1) ▶ Графік функції $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ одержуємо з графіка функції $y = \cos x$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{6}$ одиниць.



Функція спадає на кожному з проміжків $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, і зростає на кожному з проміжків $\left[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

2) ▶ Графік функції $y = -\mathrm{tg}\, x$ одержуємо симетричним відображенням графіка функції $y = \mathrm{tg}\, x$ відносно осі Ox.



Функція спадає на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Запитання для контролю

1. а) Побудуйте графік функції $y = \sin x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функці.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \sin x$.
2. а) Побудуйте графік функції $y = \cos x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \cos x$.
3. а) Побудуйте графік функції $y = \mathrm{tg}\, x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \mathrm{tg}\, x$.
4. а) Побудуйте графік функції $y = \mathrm{ctg}\, x$. Користуючись графіком, охарактеризуйте властивості цієї функції.
   б*) Обґрунтуйте властивості функції $y = \mathrm{ctg}\, x$.

Вправи

1. Користуючись властивостями функції $y = \sin x$, порівняйте числа:

1°) $\sin 100°$ і $\sin 130°$; 2) $\sin 1°$ і $\sin 1$; 3°) $\sin\frac{21\pi}{5}$ і $\sin\frac{12\pi}{5}$.

2. Користуючись властивостями функції $y = \cos x$, порівняйте числа:

1°) $\cos 10°$ і $\cos 40°$; 2) $\cos(-2)$ і $\cos(-3)$; 3°) $\cos\frac{3\pi}{7}$ і $\cos\frac{6\pi}{7}$.

3. Користуючись властивостями функції $y = \text{tg}\, x$, порівняйте числа:

1°) $\text{tg}\, 15°$ і $\text{tg}\, 140°$; 2°) $\text{tg}\frac{2\pi}{9}$ і $\text{tg}\frac{10\pi}{9}$; 3) $\text{tg}(-1{,}2\pi)$ і $\text{tg}(-0{,}1\pi)$.

4. Користуючись властивостями функції $y = \text{ctg}\, x$, порівняйте числа:

1) $\text{ctg}\, 3°$ і $\text{ctg}\, 5°$; 2) $\text{ctg}\frac{\pi}{10}$ і $\text{ctg}\frac{13\pi}{10}$; 3) $\text{ctg}(-1)$ і $\text{ctg}(-1{,}2)$.

5. Розташуйте числа в порядку їх зростання:
1) $\sin 3{,}3$, $\sin 3{,}9$, $\sin 1{,}2$; 2) $\cos 0{,}3$, $\cos 1{,}9$, $\cos 1{,}2$;
3) $\text{tg}\, 0{,}7$, $\text{tg}(-1{,}3)$, $\text{tg}\, 1{,}5$; 4) $\text{ctg}\, 0{,}5$, $\text{ctg}\, 2{,}9$, $\text{ctg}\, 1{,}1$.

Побудуйте графік функції та вкажіть нулі функції і проміжки знакосталості **(6–9)**.

6. 1) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 2°) $y = \sin\frac{x}{3}$; 3) $y = \sin(-x)$; 4°) $y = -\sin x$;
5°) $y = 3\sin x$; 6) $y = -|\sin x|$; 7*) $y = \sin x + |\sin x|$.

7. 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2°) $y = \cos 3x$; 3) $y = \cos(-x)$; 4°) $y = -\cos x$;
5°) $y = 2\cos x$; 6) $y = |\cos x|$; 7*) $y = \cos x - |\cos x|$.

8. 1) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y = \text{tg}\, 2x$; 3) $y = \text{tg}(-x)$; 4) $y = \text{tg}|x|$; 5) $y = |\text{tg}\, x|$.

9. 1) $y = \text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; 2) $y = \text{ctg}(-x)$; 3) $y = -\text{ctg}\, x$; 4) $y = 3\,\text{ctg}\, x$.

Побудуйте графік функції та вкажіть проміжки зростання і спадання функції **(10–13)**.

10. 1°) $y = \sin 3x$; 2°) $y = 3\sin x$; 3°) $y = \sin x + 1$; 4*) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

11. 1°) $y = \cos\frac{x}{2}$; 2°) $y = \cos x - 1$; 3) $y = \cos|x|$; 4*) $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

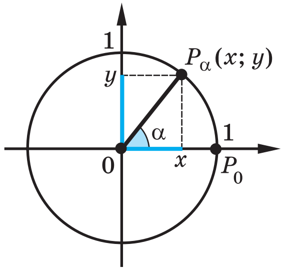
12. 1) $y = \text{tg}\, 4x$; 2) $y = \text{tg}\, x + 3$; 3) $y = -2\,\text{tg}\, x$; 4*) $y = \text{tg}\, x + |\text{tg}\, x|$.

13. 1) $y = \text{ctg}\frac{x}{3}$; 2) $y = -2\text{ctg}\, x$; 3) $y = |\text{ctg}\, x|$; 4*) $y = \text{ctg}\, x + \text{ctg}|x|$.

§6 СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

Таблиця 14

$x^2 + y^2 = 1$



$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

Основна тригонометрична тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} \qquad \boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} \qquad \boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

Пояснення й обґрунтування

На рисунку в таблиці 14 зображене одиничне коло, тобто коло радіуса 1 з центром в початку координат. Рівняння цього кола: $x^2 + y^2 = 1$.

Нехай при повороті на кут α точка $P_0(1; 0)$ одиничного кола переходить у точку $P_\alpha(x; y)$ (тобто при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α). Нагадаємо, що синусом α називається ордината точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола, тобто $\sin\alpha = y$, а косинусом α називається абсциса цієї точки, тобто $\cos\alpha = x$. Координати точки P_α задовольняють рівнянню кола, тоді $y^2 + x^2 = 1$, отже,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Це співвідношення називають *основною тригонометричною тотожністю*.

Нагадаємо також, що:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ (де } \cos\alpha \neq 0); \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ } (\sin\alpha \neq 0).$$

Тоді $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1$, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \text{ } (\sin\alpha \neq 0 \text{ і } \cos\alpha \neq 0).$$

За допомогою цих співвідношень і основної тригонометричної тотожності одержуємо:

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ тобто}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ } (\cos\alpha \neq 0)$$

Аналогічно отримуємо: $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, тобто

$$\mathbf{1+ctg^2\,\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}\ (\sin\alpha\neq 0).}$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій та інтервал, у якому знаходиться α, знайдіть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $90^\circ<\alpha<180^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання

1) ▶ З рівності $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ одержуємо: $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Звідси $\cos^2\alpha=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$. Оскільки $90^\circ<\alpha<180^\circ$, то $\cos\alpha<0$, а значить, $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$.

Тоді $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}$,

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\frac{3}{4}$. ◁

2) ▶ З рівності $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$ отримуємо $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=3$. Підставляємо в рівність $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ значення $\mathrm{tg}\,\alpha$ і одержуємо:

$1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Звідси $\cos^2\alpha=\frac{9}{10}$.

Оскільки $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha<0$,

тоді $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3}{\sqrt{10}}$.

$\sin\alpha=\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{10}}$. ◁

Коментар

1) Рівність $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ пов'язує $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу. Наприклад, $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. Тоді $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$. Враховуючи, у якій чверті знаходиться α, ми можемо визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в II чверті). Знаючи $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, знаходимо $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Зазначимо, що після знаходження $\mathrm{tg}\,\alpha$ значення $\mathrm{ctg}\,\alpha$ можна також знайти із співвідношення $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$.

2) Рівність $\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$ пов'язує $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу як обернену величину.

Рівність $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ пов'язує $\mathrm{tg}\,\alpha$ та $\cos\alpha$ і дозволяє виразити одну з цих функцій через іншу.

Наприклад, $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$. Тоді $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$. Знаючи, у якій чверті знаходиться α, ми можемо

визначити знак, який потрібно взяти в правій частині формули (це знак косинуса в III чверті).
Для знаходження sin a можна скористатися співвідношенням

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos\alpha = \sin\alpha.$$

Приклад 2 Спростіть вираз $\frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Розв'язання

▶ $\frac{1-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \cos^2\alpha.$ ◁

Коментар

Для перетворення чисельника даного виразу з основної тригонометричної тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ знаходимо: $1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$. Потім використовуємо означення тангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і спрощуємо одержаний дріб.

Приклад 3 Спростіть вираз $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$.

Коментар

Для перетворення тригонометричних виразів поряд з тригонометричними формулами використовують також алгебраїчні формули і, зокрема, формули скороченого множення. Так, вираз $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$ можна розглядати як різницю квадратів: $(\sin^2\alpha)^2 - (\cos^2\alpha)^2$. Тоді його можна розкласти на множники (як добуток суми і різниці $\sin^2\alpha$ та $\cos^2\alpha$), а після цього вже використати основну тригонометричну тотожність: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Розв'язання

▶ $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$
$= 1 \cdot (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha.$ ◁

Приклад 4* Спростіть вираз $\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}}$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Коментар

Спочатку використаємо означення тангенса і котангенса: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, а після перетворення знаменника дробу — основну тригонометричну тотожність: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, далі спрощуємо одержаний дріб. У кінці враховуємо, що $\sqrt{a^2} = |a|$. Для розкриття знаку модуля знаходимо знак косинуса в заданому проміжку і враховуємо, що при $a < 0$ значення $|a| = -a$.

Розв'язання

$$\blacktriangleright \sqrt{\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}} = \sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}} = \sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}} = \sqrt{\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{\cos\alpha\cdot\sin\alpha}}} =$$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha} = |\cos\alpha| = -\cos\alpha,\ \text{оскільки в II чверті } \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right) \cos\alpha < 0. \triangleleft$$

Приклад 5 Доведіть тотожність $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha} = 2$.

Коментар

Доведемо, що ліва частина рівності дорівнює правій. Для цього в знаменнику використаємо формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, а в чисельнику піднесемо вираз у дужках до квадрата і використаємо формулу $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Нагадаємо, що *тотожністю називається рівність, правильна при всіх допустимих значеннях букв, які входять до неї*. Тому задана рівність є тотожністю тільки за умови $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$ і $\cos\alpha \neq 0$.

Розв'язання

$$\blacktriangleright \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha} = \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = 2.$$

$2 = 2$. Отже, задана рівність є тотожністю. $\triangleleft$

Зауваження. При доведенні тотожностей найчастіше використовують такі прийоми:

1) за допомогою тотожних перетворень доводять, що одна частина рівності дорівнює іншій;
2) розглядають різницю лівої і правої частин тотожності і доводять, що ця різниця дорівнює нулю (цей прийом використовують у тих випадках, коли планується перетворювати обидві частини тотожності).

Запитання для контролю

1. Запишіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.
2*. Доведіть співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу.

Вправи

1. Чи існує число α, яке одночасно задовольняє умовам:

1°) $\sin\alpha=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=\frac{1}{3}$; 2°) $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}$; 3°) $\sin\alpha=0{,}7,\ \cos\alpha=0{,}3$;

4°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{3}$; 5°) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{7},\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{4}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=2+\sqrt{3},\ \operatorname{ctg}\alpha=2-\sqrt{3}$?

2. Знаючи значення однієї з тригонометричних функцій і інтервал, у якому міститься α, обчисліть значення інших трьох тригонометричних функцій:

1°) $\sin\alpha=-\frac{12}{13},\ \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; 2°) $\cos\alpha=-0{,}8,\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{2},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}2,\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

3. Спростіть вираз:

1°) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 2°) $(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)$; 3°) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$;

4°) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; 5) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

6) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$; 7) $\frac{\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$;

8) $\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$; 9*) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$;

10*) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ при $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

4. Доведіть тотожність:

1°) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1=\operatorname{tg}^2\alpha$; 2°) $\frac{1}{\sin^2\alpha}-1=\operatorname{ctg}^2\alpha$;

3°) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$; 4) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha$;

5) $\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}$;

7) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$; 8) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2=\frac{2}{\cos^2\alpha}$;

9*) $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha}=\cos\alpha-\sin\alpha$; 10*) $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.

5*. 1) Відомо, що $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$.

2) Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2$. Знайдіть: а) $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$; б) $\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{ctg}^3\alpha$.

§ 7 ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ ТА ЇХ НАСЛІДКИ

7.1. ФОРМУЛИ ДОДАВАННЯ

Таблиця 15

1. Косинус різниці і суми	
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$ $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$	
2. Синус суми і різниці	
$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$	
3. Тангенс суми і різниці	
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

Пояснення й обґрунтування

1. Косинус різниці і суми.

Щоб одержати формулу для $\cos(\alpha - \beta)$, спочатку розглянемо випадок, коли α і β знаходяться в проміжку $[0; \pi]$ і $\alpha > \beta$. На одиничному колі позначимо точки P_α і P_β та зобразимо вектори $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ (рис. 71). Ці вектори мають ті самі координати, що й точки P_α і P_β, тобто:

$$\overline{OP_\alpha}\,(\cos\alpha; \sin\alpha), \quad \overline{OP_\beta}\,(\cos\beta; \sin\beta).$$

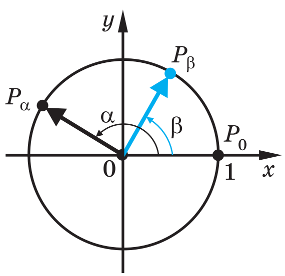


Рис. 71

Довжини (модулі) цих векторів дорівнюють одиниці: $\left|\overline{OP_\alpha}\right| = 1$, $\left|\overline{OP_\beta}\right| = 1$, а кут між ними дорівнює $\alpha - \beta$ (тобто $\angle P_\alpha O P_\beta = \alpha - \beta$).

Знайдемо скалярний добуток векторів $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ двома способами:

1) як суму добутків однойменних координат:

$$\overline{OP_\alpha}\cdot\overline{OP_\beta}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta;$$

2) як добуток довжин (модулів) векторів на косинус кута між ними:

$$\overline{OP_\alpha}\cdot\overline{OP_\beta}=\left|\overline{OP_\alpha}\right|\cdot\left|\overline{OP_\beta}\right|\cdot\cos\angle P_\alpha OP_\beta=1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta).$$

Отже,

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}\,. \qquad (1)$$

Одержану формулу називають *формулою косинуса різниці*. Словесно її можна сформулювати так:

косинус різниці двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого плюс добуток синуса першого на синус другого.

Щоб обґрунтувати цю формулу в загальному випадку, згадаємо, що за означенням кут між векторами ($\angle P_\alpha OP_\beta$) може бути тільки в межах від 0 до π, тому при $\alpha>\beta$ кут між векторами $\overline{OP_\alpha}$ і $\overline{OP_\beta}$ може дорівнювати $\alpha-\beta$ (рис. 71), або може дорівнювати $2\pi-(\alpha-\beta)$ (рис. 72), або може відрізнятися від цих значень на ціле число обертів (тобто на $2\pi k$, де $k\in \boldsymbol{Z}$).
Враховуючи періодичність (з періодом 2π) та парність функції косинус, одержуємо, що в будь-якому випадку $\cos\angle P_\alpha OP_\beta=\cos(\alpha-\beta)$, отже, наведене обґрунтування залишається правильним для будь-яких значень α і β.

За допомогою формули (1) легко вивести *формулу косинуса суми:*

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$ Отже,

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\,. \qquad (2)$$

Косинус суми двох кутів (чисел) дорівнює добутку косинуса першого кута (числа) на косинус другого мінус добуток синуса першого на синус другого.

2. Синус суми і різниці.

Виведемо тепер формули синуса суми і синуса різниці.
Спочатку за формулою (1) одержимо два корисні співвідношення. А саме:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\varphi+\sin\frac{\pi}{2}\sin\varphi=$$
$$=0\cdot\cos\varphi+1\cdot\sin\varphi=\sin\varphi.$$

Запишемо одержану формулу справа наліво:

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right). \qquad (3)$$

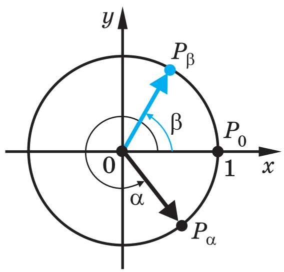


Рис. 72

Якщо підставити у формулу (3) $\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha$, маємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \quad (4)$$

Використовуючи формули (3), (1) і (4), одержуємо:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$ Отже,

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}\ . \quad (5)$$

Синус суми двох кутів (чисел) дорівнює добутку синуса першого кута (числа) на косинус другого плюс добуток косинуса першого на синус другого.

Для синуса різниці маємо:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$ Отже,

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}.$$

Синус різниці двох кутів дорівнює добутку синуса першого кута (числа) на косинус другого мінус добуток косинуса першого на синус другого. ○

3. Тангенс суми і різниці.

За допомогою формул додавання для синуса (5) і косинуса (2) легко одержати формули додавання для тангенса чи котангенса. Наприклад,

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Поділимо чисельник і знаменник останнього дробу на добуток $\cos\alpha\cos\beta$ (звичайно, за умови, що $\cos\alpha\neq 0$ і $\cos\beta\neq 0$) і одержимо:

$$\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$ Отже,

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}}.$$

Для тангенса різниці маємо:

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\mathrm{tg}(\alpha+(-\beta))=\frac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}(-\beta)}{1-\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}(-\beta)}=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$ Отже,

$$\boxed{\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}}.$$ ○

Приклади розв’язання завдань

Приклад 1 Обчисліть: 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\cos 15^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Розв’язання

1) ▶ $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) =$
$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$ ◁

2) ▶ $\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) =$
$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$ ◁

3) ▶ $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) =$
$$= \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} =$$
$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{12-6\sqrt{3}}{6} = 2-\sqrt{3}.$$ ◁

Коментар

Подамо 15° як різницю:
$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ,$$
а значення тригонометричних функцій кутів 45° і 30° ми знаємо. Тому, записавши синус 15° як синус різниці, одержимо значення $\sin 15^\circ$. Аналогічно знайдемо $\cos 15^\circ$ і $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Зауважимо, що для знаходження $\operatorname{tg} 15^\circ$ можна було також використати формулу $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

У завданні 3 в одержаному виразі $\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ зручно позбутися ірраціональності в знаменнику дробу, що значно спрощує відповідь.

Приклад 2 Спростіть вираз $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$.

Коментар

У чисельнику і знаменнику дробу використаємо формули косинуса суми і косинуса різниці та зведемо подібні члени.

Розв’язання

▶ $$\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = 1.$$ ◁

Приклад 3 Знайдіть значення виразу $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \sin 23^\circ$.

Розв’язання

▶ $\cos 37^\circ \cos 23^\circ - \sin 37^\circ \cos 23^\circ =$

$= \cos(37^\circ + 23^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$ ◁

Коментар

Використаємо формулу косинуса суми справа наліво:
$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta).$$

Приклад 4 Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

Коментар

Для обґрунтування цих тотожностей доведемо, що їхні праві частини дорівнюють лівим, використовуючи формули синуса суми і синуса різниці: $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$
$=\sin\alpha+\cos\alpha$; ◁

2) ▶ $\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$
$=\sin\alpha-\cos\alpha$. ◁

Запитання для контролю

1. Запишіть формули додавання: а) косинус суми і косинус різниці; б) синус суми і синус різниці; в) тангенс суми і тангенс різниці.
2*. Доведіть формули додавання: а) косинус суми і косинус різниці; б) синус суми і синус різниці; в) тангенс суми і тангенс різниці.

Вправи

1. Обчисліть:

1) $\sin 13^\circ\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\sin 17^\circ$; 2) $\sin 16^\circ\cos 29^\circ+\sin 29^\circ\cos 16^\circ$;

3) $\sin 78^\circ\cos 18^\circ-\sin 18^\circ\cos 78^\circ$; 4) $\sin 63^\circ\cos 33^\circ-\sin 33^\circ\cos 63^\circ$;

5) $\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\sin 66^\circ\sin 6^\circ$; 6) $\cos 71^\circ\cos 26^\circ+\sin 71^\circ\sin 26^\circ$;

7) $\cos 20^\circ\cos 25^\circ-\sin 20^\circ\sin 25^\circ$; 8) $\cos 18^\circ\cos 12^\circ-\sin 18^\circ\sin 12^\circ$;

9) $\frac{\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}35^\circ}{1-\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}35^\circ}$; 10) $\frac{\operatorname{tg}73^\circ-\operatorname{tg}13^\circ}{1+\operatorname{tg}73^\circ\operatorname{tg}13^\circ}$; 11) $\frac{1+\operatorname{tg}67^\circ\operatorname{tg}7^\circ}{\operatorname{tg}67^\circ-\operatorname{tg}7^\circ}$.

2. Спростіть:

1°) $\sin 5\alpha\cos 3\alpha-\cos 5\alpha\sin 3\alpha$; 2) $\cos 4\alpha\cos 2\alpha+\sin 4\alpha\sin 2\alpha$;

3) $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta$; 4) $\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)$;

5°) $\frac{\cos 7\alpha\cos 4\alpha+\sin 7\alpha\sin 4\alpha}{\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha}$; 6°) $\frac{\sin 8\alpha\cos 2\alpha-\cos 8\alpha\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha\cos 4\alpha-\sin 2\alpha\sin 4\alpha}$;

7°) $\frac{\operatorname{tg}4\alpha+\operatorname{tg}3\alpha}{1-\operatorname{tg}4\alpha\operatorname{tg}3\alpha}$; 8°) $\frac{\operatorname{tg}7\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{1+\operatorname{tg}7\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$;

9) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$; 10) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta}$.

3. За допомогою формул додавання обчисліть:

1) $\sin 75^\circ$; 2) $\cos 75^\circ$; 3) $\mathrm{tg}\,75^\circ$; 4) $\sin 105^\circ$; 5) $\cos 105^\circ$; 6) $\mathrm{tg}\,105^\circ$.

4. Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$;

2) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta$; 4) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\mathrm{ctg}\,\beta-\mathrm{ctg}\,\alpha$.

5) $\sin(30^\circ-\alpha)-\cos(60^\circ-\alpha)=-\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $\sin(30^\circ-\alpha)+\sin(30^\circ+\alpha)=\cos\alpha$;

7*) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)+\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\mathrm{tg}\,\alpha-1$; 8*) $\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{tg}\,\alpha=1+\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{tg}\,\alpha$;

9*) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha+2\cos(60^\circ+\alpha)}{2\sin(60^\circ+\alpha)-\sqrt{3}\cos\alpha}=\mathrm{ctg}\,\alpha$; 10*) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}=\mathrm{tg}\,\alpha$.

7.2. ФОРМУЛИ ПОДВІЙНОГО АРГУМЕНТУ

Таблиця 16

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha-1}$$

$$\boxed{\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}}$$

Пояснення й обґрунтування

Щоб одержати формули подвійного аргументу, досить у формулах додавання

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\;\mathrm{tg}\,\beta}$$

взяти $\beta=\alpha$. Одержимо тотожності:

$\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, тобто

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.}$$

$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, тобто

$$\mathbf{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha},\ \text{тобто}$$

$$\mathbf{tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}}.\ \bigcirc$$

З формули $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, користуючись основною тригонометричною тотожністю $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, можна одержати формули, які дозволяють виразити $\cos 2\alpha$ тільки через $\sin\alpha$ або тільки через $\cos\alpha$.

● Дійсно, з основної тригонометричної тотожності одержуємо

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha,\ \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.\ \text{Тоді}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1,\ \text{тобто}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1. \tag{1}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,\ \text{тобто}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.\ \bigcirc \tag{2}$$

З формул (1) і (2) можна одержати наслідки, які корисно запам'ятати:

$$\boxed{\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}},\qquad \boxed{\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}.$$

Ці формули називають *формулами зниження степеня*.

Якщо в останніх формулах позначити $2\alpha = x$, тобто $\alpha = \frac{x}{2}$, то можна записати такі формули:

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},\quad 1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}. \tag{3}$$

Зазначимо, що формули синуса і косинуса подвійного аргументу справедливі для будь-яких значень аргументу, тоді як формула тангенса подвійного аргументу справедлива тільки для тих значень аргументу α, для яких означені $\mathrm{tg}\,\alpha$ і $\mathrm{tg}\,2\alpha$, тобто тільки при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ і $2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

Зазначимо також, що, як завжди, одержані формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, замість виразу $2\sin 3\alpha\cos 3\alpha$ можна записати $\sin(2 \cdot 3\alpha) = \sin 6\alpha$, а замість виразу $\cos^2 1{,}5\alpha - \sin^2 1{,}5\alpha$ записати $\cos 3\alpha$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть: 1) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$; 2) $\sin 15^\circ \cos 15^\circ$.

Розв'язання

1) ▶ $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ◁

Коментар

У першому завданні досить «упізнати» праву частину формули косинуса подвійного аргументу і записати результат. У другому завданні слід звернути увагу на те, що заданий ви-

2) ▶ $\sin 15°\cos 15° = \frac{1}{2}\cdot 2\sin 15°\cos 15° =$

$= \frac{1}{2}\sin(2\cdot 15°) = \frac{1}{2}\sin 30° = \frac{1}{4}.$ ◁

раз відрізняється від правої частини формули синуса подвійного аргументу тільки відсутністю двійки. Тому, якщо цей вираз помножити і поділити на 2, то він не зміниться, але тепер за формулою одержуємо:

$2\sin 15°\cos 15° = \sin(2\cdot 15°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$

Приклад 2 Доведіть тотожність $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Зазначимо, що в чисельнику дробу знаходиться вираз, який можна безпосередньо перетворити за формулою (3). Але застосування цієї формули зменшує аргумент удвічі: $1 + \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$. Бажано і в знаменнику дробу перейти до того самого аргументу 2α, який з'явився в чисельнику. Для цього розглянемо $\sin 4\alpha$ як синус подвійного аргументу (відносно аргументу 2α): $\sin 4\alpha = \sin(2\cdot 2\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha$.

Розв'язання

▶ $\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$ ◁

Приклад 3* Скоротіть дріб $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Коментар

Перетворюючи тригонометричні вирази, слід пам'ятати не тільки тригонометричні, а й алгебраїчні формули. Зокрема, якщо використати в знаменнику дробу формулу косинуса подвійного аргументу: $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, одержуємо вираз, який є різницею квадратів $\cos\alpha$ та $\sin\alpha$. Його можна розкласти на множники як добуток суми та різниці цих виразів. З огляду на вираз, одержаний у знаменнику, у чисельнику розглянемо вираз $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ як подвоєний добуток $\sin\alpha$ на $\cos\alpha$. Тоді для отримання квадрата суми цих виразів нам потрібна ще сума $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$, але за основною тригонометричною тотожністю цю суму дає одиниця, яка стоїть у чисельнику.

Розв'язання

▶ $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos\alpha-\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}.$ ◁

Приклад 4 Знаючи, що $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ і що $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Розв'язання

▶ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{9}{25}$, тобто $\sin^2\alpha = \frac{16}{25}$. Отже, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ або $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$. Враховуючи, що $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, одержуємо $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$.

Тоді:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha =$

$$= 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{5} = -\frac{24}{25};$$ ◁

2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$

$$= \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25};$$ ◁

3) $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = \frac{24}{7};$ ◁

4) $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{24}.$ ◁

Коментар

Щоб знайти значення $\sin 2\alpha$ за формулою синуса подвійного аргументу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, потрібно, крім заданого значення $\cos\alpha$, мати ще й значення $\sin\alpha$, яке легко знаходиться з використанням основної тригонометричної тотожності:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha.$$

Нагадаємо, що для знаходження $\sin\alpha$ слід також врахувати знак синуса в заданому проміжку (за умовою α знаходиться в IV чверті, де синус від'ємний).

Зазначимо, що $\cos 2\alpha$ можна також знайти за формулою

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

не обчислюючи $\sin\alpha$, а $\operatorname{ctg} 2\alpha$ — за формулою $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\alpha}$, підставивши знайдене значення $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Запитання для контролю

1. Запишіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргументу.

2*. Доведіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргументу.

Вправи

1°. Обчисліть:

1) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$; 2) $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$; 3) $(\cos 15^\circ + \sin 15^\circ)^2$;

4) $(\cos 75^\circ - \sin 75^\circ)^2$; 5) $\frac{2\operatorname{tg} 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

Доведіть тотожність **(2–3)**.

2°. 1) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\cos x;$ 2) $\sin 5x\cos 5x=\frac{1}{2}\sin 10x;$

3) $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x;$ 4) $(\sin x-\cos x)^2=1-\sin 2x.$

3. 1) $\frac{\sin 4\alpha}{4\sin\alpha}=\cos\alpha\cos 2\alpha;$ 2) $\frac{\sin 4\alpha}{4\cos\alpha}=\sin\alpha\cos 2\alpha;$

3) $(\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha)\sin 2\alpha=2\cos 2\alpha;$ 4) $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha};$

5) $\mathrm{ctg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha-1}{2\mathrm{ctg}\,\alpha}.$

4. Спростіть вираз:

1°) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}-\sin\alpha;$ 2°) $\cos^2\alpha-\cos 2\alpha;$

3) $\frac{\sin 2\alpha-2\sin\alpha}{\cos\alpha-1};$ 4*) $\frac{\cos 2\alpha-\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha}.$

5. Знаючи, що $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ і що $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha;$ 2) $\cos 2\alpha;$ 3) $\mathrm{tg}\,2\alpha;$ 4) $\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

6. Знаючи, що $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ і що $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha;$ 2) $\cos 2\alpha;$ 3) $\mathrm{tg}\,2\alpha;$ 4) $\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

7. Знаючи, що $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{3}{4}$ і що $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha;$ 2) $\cos 2\alpha;$ 3) $\mathrm{tg}\,2\alpha;$ 4) $\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

8. Знаючи, що $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\frac{4}{3}$ і що $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, обчисліть:

1) $\sin 2\alpha;$ 2) $\cos 2\alpha;$ 3) $\mathrm{tg}\,2\alpha;$ 4) $\mathrm{ctg}\,2\alpha.$

9*. Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\frac{\sin\alpha+3\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=3.$

10*. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos 2\alpha-|\cos\alpha|.$

11. Побудуйте графік функції:

1) $y=\sin x\cos x;$ 2) $y=\sin^4 x-\cos^4 x;$ 3*) $y=\mathrm{tg}\,x\sin 2x.$

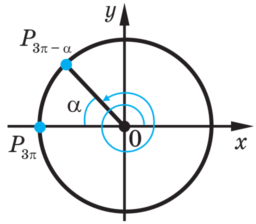
7.3. ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Таблиця 17

<table>
<tr><td colspan="2">Формулами зведення називають формули, за допомогою яких тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(k \in \boldsymbol{Z})$ зводять до тригонометричних функцій від аргументу α.</td></tr>
<tr><td>Алгоритм</td><td>Приклади</td></tr>
<tr><td rowspan="2">1. Якщо до числа α додається число $k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на відповідну (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс).

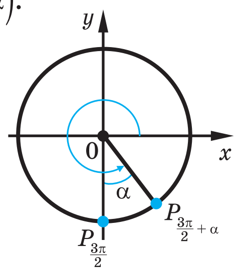
2. Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим.</td>
<td>1. Спростіть за формулами зведення $\mathrm{tg}(3\pi - \alpha)$.

▶ $\mathrm{tg}\,(3\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$. ◁



К о м е н т а р. Назва заданої функції не змінюється, оскільки 3π зображується на горизонтальному діаметрі (зліва) одиничного кола. Якщо α — гострий кут, то $3\pi - \alpha$ знаходиться в II чверті, де тангенс від'ємний, тому в правій частині формули взято знак «–».</td></tr>
<tr><td>2. Спростіть $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

▶ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$. ◁



К о м е н т а р. Назва заданої функції змінюється, оскільки $\frac{3\pi}{2}$ зображується на вертикальному діаметрі (внизу) одиничного кола. Якщо α — гострий кут, то $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ знаходиться в IV чверті, де косинус додатний, тому в правій частині формули взято знак «+».</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Формули додавання дозволяють обґрунтувати формули зведення, за якими тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$ зводять до тригонометричних функцій від аргументу α.

Розглянемо декілька прикладів.

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\pi\cos\alpha-\cos\pi\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\cos(\pi+\alpha)=\cos\pi\cos\alpha-\sin\pi\sin\alpha=(-1)\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=-\cos\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=\frac{\cos(6\pi-\alpha)}{\sin(6\pi-\alpha)}=\frac{\cos 6\pi\cos\alpha+\sin 6\pi\sin\alpha}{\sin 6\pi\cos\alpha-\cos 6\pi\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$$

(звичайно, в останньому випадку той самий результат можна одержати, використовуючи періодичність і непарність функції котангенс);

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=1\cdot\cos\alpha-0\cdot\sin\alpha=\cos\alpha;$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{7\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{7\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha-(-1)\cdot\sin\alpha=\sin\alpha;$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{3\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}{\cos\frac{3\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{3\pi}{2}\sin\alpha}=\frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Для аналізу одержаних результатів складемо таку таблицю:

Таблиця 18

Вид аргументу	Одержана формула	Зміна назви заданої функції	Чверть (якщо умовно вважати α гострим кутом)	Знак заданої функції у відповідній чверті
$k\pi \pm \alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$	$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$	немає	II	+
	$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$	немає	III	–
	$\operatorname{ctg}(6\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$	немає	IV	–
$(2k+1)\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k \in \mathbf{Z})$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$	є	I	+
	$\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$	є	IV	+
	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$	є	IV	–

Аналогічно можна обґрунтувати, що у всіх випадках тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$ і $(2k+1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ $(k \in \boldsymbol{Z})$ можна зводити до тригонометричних функцій від аргументу α за таким алгоритмом:

якщо до числа α додається число $k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ (тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на відповідну (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс і котангенс на тангенс). Знак одержаного виразу визначається знаком початкового виразу, якщо умовно вважати кут α гострим.

У таблиці 19 наведено *основні формули зведення*. Всі інші випадки можуть бути зведеними до них за допомогою використання періодичності відповідних тригонометричних функцій.

Таблиця 19

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Зазначимо, що за формулами зведення $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$, $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\,\alpha$, $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\,\alpha$. Якщо останні формули записати справа наліво, то одержимо корисні співвідношення, які часто називають *формулами доповняльних аргументів* (аргументи α і $\frac{\pi}{2}-\alpha$ доповнюють один одного до $\frac{\pi}{2}$):

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Наприклад, $\sin 60^\circ=\cos(90^\circ-60^\circ)=\cos 30^\circ$; $\cos 89^\circ=\sin(90^\circ-89^\circ)=\sin 1^\circ$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\cos 210^\circ$; 2) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Розв'язання

1) ► $\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) =$

$= -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; ◁

2) ► $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$. ◁

Коментар

Подамо задані аргументи так, щоб можна було використати формули зведення (тобто виділимо в аргументі такі частини, які зображаються на горизонтальному або вертикальному діаметрі одиничного кола). Наприклад, $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$. Звичайно, можна було подати цей аргумент ще й так: $210^\circ = 270^\circ - 60^\circ$ і теж використати формули зведення.

Приклад 2* Доведіть тотожність

$$\frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos 2\alpha.$$

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Спочатку використаємо формули зведення, а потім спростимо одержані вирази, використовуючи формули: $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ та $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$. При спрощенні виразів $\cos(3\pi - \alpha)$ та $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$ можна застосувати як безпосередньо формули зведення, так і періодичність відповідних функцій. Наприклад, враховуючи, що періодом функції $\cos x$ є 2π, одержуємо: $\cos(3\pi - \alpha) = \cos(2\pi + \pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Розв'язання

► $$\frac{\cos(3\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} - \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{(-\cos\alpha)\cdot\cos\alpha}{(-\operatorname{ctg}\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha} - (-\sin\alpha)^2 =$$

$$= \frac{-\cos^2\alpha}{-1} - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha.$$ ◁

Запитання для контролю

1. Проілюструйте на прикладах використання формул зведення. Поясніть одержаний результат.
2*. Доведіть декілька формул зведення.

Вправи

1. Обчисліть за допомогою формул зведення:

1) $\sin 240^\circ$; 2) $\mathrm{tg}\, 300^\circ$; 3) $\cos 330^\circ$; 4) $\mathrm{ctg}\, 315^\circ$;

5) $\cos\frac{4\pi}{3}$; 6) $\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$; 7) $\mathrm{tg}\frac{7\pi}{6}$; 8) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

2. Обчисліть:

1) $\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ$; 2) $\sin 68^\circ \sin 38^\circ - \sin 52^\circ \cos 112^\circ$.

3. Спростіть вираз:

1°) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)}{\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}$; 2°) $\dfrac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)}$; 3°) $\dfrac{\sin(3\pi+\alpha)\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi-2\alpha)}$;

4) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{\left(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha)\right)^2-1}$; 5*) $\mathrm{tg}\,1^\circ\cdot\mathrm{tg}\,2^\circ\cdot\mathrm{tg}\,3^\circ\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}\,87^\circ\cdot\mathrm{tg}\,88^\circ\cdot\mathrm{tg}\,89^\circ$.

4. Доведіть тотожність:

1°) $2\sin(90^\circ+\alpha)\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin 2\alpha$; 2°) $\mathrm{ctg}\,20^\circ\cdot\mathrm{ctg}\,70^\circ = 1$;

3) $\dfrac{\sin(\pi-2\alpha)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2\alpha} = -2\,\mathrm{ctg}\,\alpha$; 4*) $\dfrac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\mathrm{ctg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$.

7.4. ФОРМУЛИ СУМИ І РІЗНИЦІ ОДНОЙМЕННИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ У СУМУ

Таблиця 20

1. Формули суми і різниці тригонометричних функцій	
$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
2. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	
$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$	

Пояснення й обґрунтування

1. Формули суми і різниці тригонометричних функцій.

За формулами додавання:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y;$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y.$$

Додаючи почленно ці рівності, одержуємо:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y. \qquad (1)$$

Якщо позначити:

$$x+y=\alpha, \qquad (2)$$
$$x-y=\beta, \qquad (3)$$

то, додаючи і віднімаючи рівності (2) і (3), маємо: $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Тоді з формули (1) одержуємо формулу *перетворення суми синусів у добуток:*

$$\boxed{\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad (4)$$

Словесно її можна сформулювати так:

Сума синусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку синуса півсуми цих аргументів на косинус їх піврізниці.

Якщо замінити у формулі (4) β на $(-\beta)$ і врахувати непарність синуса: $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, то одержимо формулу:

$$\boxed{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Різниця синусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку синуса піврізниці цих аргументів на косинус їх півсуми.

Аналогічно, додаючи почленно рівності

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y, \qquad (5)$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y, \qquad (6)$$

одержуємо:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y, \qquad (7)$$

і, виконуючи заміни (2) і (3), маємо:

$$\boxed{\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Сума косинусів двох аргументів дорівнює подвоєному добутку косинуса півсуми цих аргументів на косинус їх піврізниці.

Якщо відняти рівності (5) і (6), то одержимо:

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y. \qquad (8)$$

Тоді

$$\boxed{\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Різниця косинусів двох аргументів дорівнює: мінус подвоєний добуток синуса півсуми цих аргументів на синус їх піврізниці.

Для обґрунтування формули перетворення суми (різниці) тангенсів досить використати означення тангенса і формули додавання:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}. \qquad (9)$$

Якщо у формулі (9) замінити β на $(-\beta)$ і врахувати непарність тангенса $(\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta)$ і парність косинуса $(\cos(-\beta)=\cos\beta)$, то одержуємо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}. \qquad (10)$$

Зазначимо, що формули (9) і (10) справедливі тільки тоді, коли $\cos\alpha\neq 0$ і $\cos\beta\neq 0$. ○

2. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

● Зазначимо, що в процесі обґрунтування формул перетворення суми і різниці синусів і косинусів у добуток ми фактично отримали і формули перетворення добутків тригонометричних функцій у суму. Дійсно, якщо поділити обидві частини рівності (1) на 2 і записати одержану рівність справа наліво, маємо:

$$\boxed{\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x-y)+\sin(x+y)\right)}. \qquad (11)$$

Аналогічно, з формули (7) одержуємо:

$$\boxed{\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right)}, \qquad (12)$$

а з формули (8) (після ділення на -2), одержуємо:

$$\boxed{\sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)}. \qquad (13)$$

Замінюючи у формулах (11–13) значення x на α, а y на β, одержуємо той запис цих формул, який наведено в таблиці 20. ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Перетворіть задану суму чи різницю в добуток і, якщо можливо, спростіть: 1) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$; 2*) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$.

К о м е н т а р

1) У першому завданні можна безпосередньо застосувати формулу $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, а потім використати табличні значення $\sin 45^\circ$ і $\cos 30^\circ$.

2) Якщо вираз $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$ розглянути як різницю квадратів, то його можна розкласти на множники, а потім до кожного з одержаних виразів застосувати формули перетворення різниці чи суми косинусів у добуток. Для подальшого спрощення одержаного виразу використовуємо формулу синуса подвійного аргументу, а саме:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin(\alpha+\beta) \text{ і } 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin(\alpha-\beta).$$

Розв'язання

1) ▶ $\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. ◁

2) ▶ $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = (\cos\alpha - \cos\beta)(\cos\alpha + \cos\beta) =$

$$= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = -\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta).$$ ◁

Приклад 2 Перетворіть у добуток $\sin\alpha + \cos\beta$.

Коментар

Ми вміємо перетворювати в добуток суму синусів або косинусів. Для переходу до таких виразів досить згадати, що $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ $\left(\text{або } \sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right)$.

Розв'язання

▶ $$\sin\alpha + \cos\beta = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 2\sin\frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{2} =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$ ◁

Приклад 3 Спростіть вираз $\frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)}{1 - \cos 6\alpha}$.

Коментар

Для спрощення заданого дробу можна спробувати скоротити його, а для цього подамо чисельник і знаменник у вигляді добутків, які містять однакові вирази. У чисельнику використаємо формули перетворення різниці синусів і косинусів у добуток (а також непарність синуса: $\sin(-3\alpha) = -\sin 3\alpha$), а в знаменнику скористаємося формулою $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

Розв'язання

▶ $$\frac{(\sin 8\alpha - \sin 2\alpha)(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)}{1 - \cos 6\alpha} = \frac{2\sin 3\alpha\cos 5\alpha\cdot(-2)\sin 5\alpha\sin(-3\alpha)}{2\sin^2 3\alpha} =$$

$$= 2\cos 5\alpha\sin 5\alpha = \sin 10\alpha.$$ ◁

Приклад 4* Доведіть тотожність $4\sin 70° - \frac{1}{\sin 10°} = -2.$

Коментар

Доведемо, що ліва частина тотожності дорівнює правій. Після приведення до спільного знаменника перетворимо добуток синусів на різницю косинусів, а потім врахуємо, що $\cos 60° = \frac{1}{2}$, а $\cos 80° = \sin 10°$ (оскільки $80° + 10° = 90°$).

Розв'язання

▶ $$4\sin 70° - \frac{1}{\sin 10°} = \frac{4\sin 70° \sin 10° - 1}{\sin 10°} = \frac{4\cdot\frac{1}{2}(\cos 60° - \cos 80°) - 1}{\sin 10°} =$$

$$= \frac{2\cdot\frac{1}{2} - 2\cos 80° - 1}{\sin 10°} = \frac{-2\cos 80°}{\sin 10°} = \frac{-2\sin 10°}{\sin 10°} = -2. \triangleleft$$

Приклад 5* Доведіть, якщо A, B, C — кути трикутника, то

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

Коментар

Для кутів трикутника $A + B + C = \pi$. Тоді $C = \pi - (A + B)$, і за формулами зведення $\sin(\pi - (A + B)) = \sin(A + B)$. Після перетворення суми синусів $\sin A + \sin B$ у добуток помічаємо, що аргумент $(A + B)$ удвічі більший за аргумент $\frac{A+B}{2}$. Це дозволяє записати $\sin(A + B)$ за формулою синуса подвійного аргументу і в одержаній сумі винести за дужки $2\sin\frac{A+B}{2}$, а потім перетворити в дужках суму косинусів у добуток. Потім треба врахувати, що $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ і використати формули зведення.

Розв'язання

▶ Враховуючи, що для кутів трикутника $C = \pi - (A + B)$, одержуємо

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin A + \sin B + \sin(\pi - (A + B)) =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin(A+B) = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi - C}{2}\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} = 4\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}. \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Запишіть формули перетворення суми і різниці синусів або суми і різниці косинусів у добуток. Наведіть приклади використання цих формул.
2*. Запишіть формули перетворення суми і різниці тангенсів. Наведіть приклади використання цих формул.
3*. Доведіть формули перетворення суми і різниці тригонометричних функцій у добуток.
4. Наведіть приклади використання формул:

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y));\quad \cos x\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y));$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)).$$

5*. Доведіть формули, наведені в запитанні 4.

Вправи

1. Перетворіть суму (або різницю) тригонометричних функцій у добуток і спростіть:

1°) $\cos 152^\circ+\cos 28^\circ$; 2°) $\cos 48^\circ-\cos 12^\circ$; 3) $\cos 20^\circ-\sin 20^\circ$;

4) $\dfrac{\sin 25^\circ+\sin 15^\circ}{\sin 25^\circ-\sin 15^\circ}$; 5*) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta$; 6*) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\sin 4\alpha$;

7*) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha$.

2. Доведіть тотожність:

1°) $\dfrac{\sin 75^\circ+\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ-\cos 15^\circ}=-\sqrt{3}$; 2°) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 3) $\dfrac{\cos 6\alpha-\cos 10\alpha}{\sin 8\alpha}=2\sin 2\alpha$;

4) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$; 5) $\dfrac{(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)}{1-\cos 8\alpha}=\sin 4\alpha$;

6*) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha-\sin\beta}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 7*) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}=\operatorname{ctg} 2\alpha$.

3. Перетворіть у суму:

1) $\cos 45^\circ\cos 15^\circ$; 2) $\sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24}$; 3) $\sin 20^\circ\sin 10^\circ$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{10}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

4. Обчисліть:

1) $2\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ-\cos 20^\circ$; 2*) $4\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$.

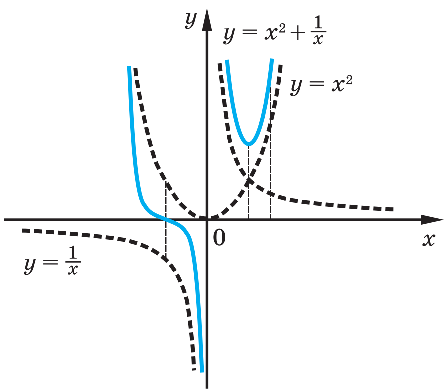
5*) Доведіть, що при $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ виконуються рівності:

1) $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

2) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

§8 ГРАФІКИ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Таблиця 21

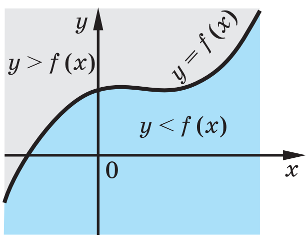
<table>
<tr><td colspan="2">1. Побудова графіків функцій виду $y = f(x) + g(x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо нам відомі графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, то ескіз графіка функції $y = f(x) + g(x)$ можна побудувати так: зобразити в одній системі координат графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$, а потім будувати шуканий графік за точками, виконуючи для кожного значення x (з області визначення функції $f(x) + g(x)$) необхідні операції над відрізками, які зображають відповідні ординати $f(x)$ і $g(x)$.
Аналогічно можна будувати і схематичні графіки функцій
$y = f(x) \cdot g(x)$ та $y = \dfrac{1}{f(x)}$.</td></tr>
<tr><td>Приклад</td><td>Коментар</td></tr>
<tr><td>Побудуйте графік функції
$y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.
</td><td>Будуємо в одній системі координат графіки функцій-доданків: $y = x^2$ та $y = \dfrac{1}{x}$ (на рисунку побудовані штриховими лініями). Для кожного значення x (крім $x = 0$, яке не входить до області визначення заданої функції) додаємо відповідні відрізки — значення функцій (справа від осі Oy) або віднімаємо, якщо значення $f(x)$ і $g(x)$ протилежні за знаком (у даному випадку – зліва від осі Oy). На рисунку синьою лінією зображено результат — графік функції $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.</td></tr>
</table>

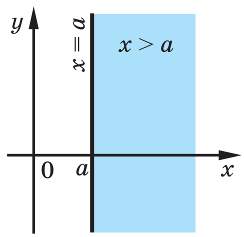
Продовж. табл. 21

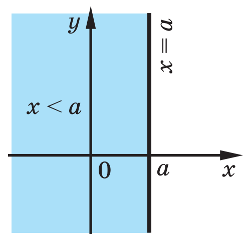
2. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними

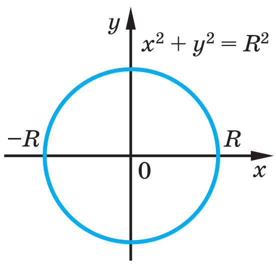
Означення. ***Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними x і y* називається множина всіх точок координатної площини з координатами $(x; y)$, де пара чисел $(x; y)$ є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).**

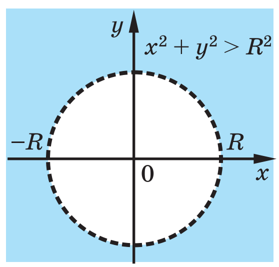
Графіки деяких рівнянь і нерівностей

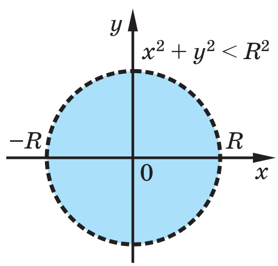




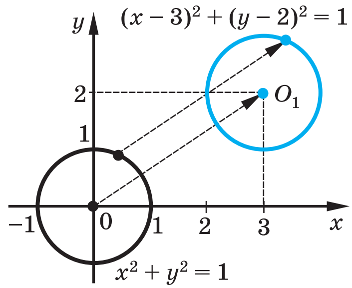




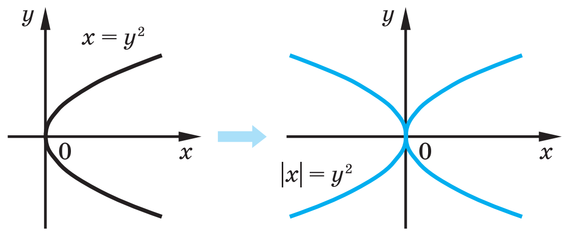
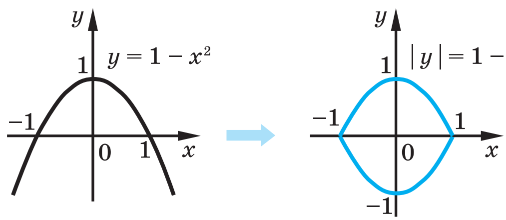




3. Геометричні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$

Перетворення	Приклад
$\boxed{F(x-a;\, y-b) = 0}$ *Паралельне перенесення* графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *на вектор* $\overline{n}(a; b)$.	

Продовж. табл. 21

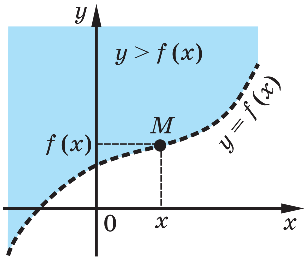
Перетворення	Приклад
$\boxed{F(\lvert x \rvert; y)=0}$ Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *праворуч від осі* Oy (і на самій осі) *залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі* Oy.	
$\boxed{F(x; \lvert y \rvert)=0}$ Частина графіка рівняння $F(x; y) = 0$ *вище від осі* Ox (і на самій осі) *залишається без зміни, і ця сама частина відображується симетрично відносно осі* Ox.	

Пояснення й обґрунтування

1. Побудова графіків функцій виду $y = f(x) + g(x)$. Якщо відомі графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, то можна побудувати орієнтовний вид графіка функції $y = f(x) + g(x)$, або $y = f(x) \cdot g(x)$, чи $y = \frac{1}{f(x)}$. Для цього досить зобразити в одній системі координат графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$, а потім будувати шуканий графік за точками, виконуючи для кожного значення x (з області визначення заданої функції) необхідні операції над відрізками (або над довжинами цих відрізків), які зображають відповідні ординати $f(x)$ і $g(x)$.

Приклад побудови графіка функції виду $y = f(x) + g(x)$ наведено в таблиці 21, а графіка функції виду $y = \frac{1}{f(x)}$ — на с. 107 (в останньому випадку зручно будувати графіки функцій $y = f(x)$ і $y = \frac{1}{f(x)}$ не в одній системі координат, а в різних, розміщених так, щоб їхні осі ординат знаходилися на одній прямій).

Зауважимо, що такий спосіб побудови графіка функції не завжди дає можливість виявити всі характерні особливості поведінки графіка (часто це можна зробити тільки в результаті спеціального дослідження функції, яке буде розглянуто в 11 класі), але в багатьох випадках наведений спосіб дозволяє отримати певне уявлення про вид графіка заданої функції.



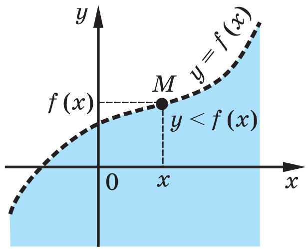


Рис. 73

2. Графіки рівнянь та нерівностей з двома змінними. З поняттям графіка рівняння з двома змінними ви ознайомилися в курсі алгебри. Аналогічно вводиться і поняття графіка нерівності з двома змінними. Тому можна дати спільне означення цих графіків:

Графіком рівняння (нерівності) з двома змінними x **і** y **називається множина всіх точок координатної площини з координатами (**x**;** y**), де пара чисел (**x**;** y**) є розв'язком відповідного рівняння (нерівності).**

Для побудови графіка нерівності $y > f(x)$ (чи $y < f(x)$) досить мати графік функції $y = f(x)$. Дійсно, за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини з координатами $(x; y) = (x; f(x))$. Тоді для кожного значення x точки, координати яких задовольняють нерівності $y > f(x)$, будуть знаходитися вище точки M (рис. 73, *а*), а точки, координати яких задовольняють нерівності $y < f(x)$, будуть знаходитися нижче точки M (рис. 73, *б*). Таким чином,

графік нерівності $y > f(x)$ **складається з усіх точок координатної площини, які знаходяться вище від графіка функції** $y = f(x)$**, а графік нерівності** $y < f(x)$ **складається з усіх точок координатної площини, які знаходяться нижче від графіка функції** $y = f(x)$**.**

Наприклад, на рисунку 74 зображено графік нерівності $y > x^2$, а на рисунку 75 графік нерівності $y \leqslant x^2$. Оскільки точки графіка $y = x^2$ не належать

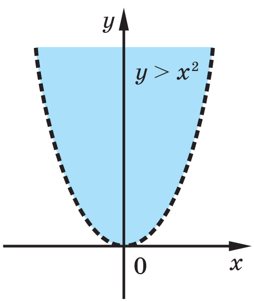


Рис. 74

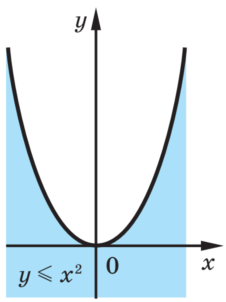


Рис. 75

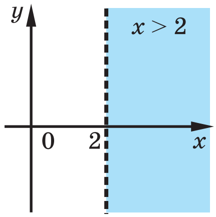


Рис. 76

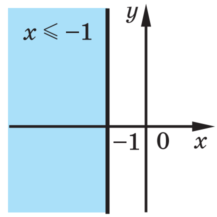


Рис. 77

графіку нерівності $y > x^2$, то на першому графіку парабола $y = x^2$ зображена штриховою лінією; але точки графіка $y = x^2$ належать графіку нерівності $y \leqslant x^2$, тому на другому графіку парабола $y = x^2$ зображена суцільною лінією.

Аналогічно, якщо на координатній площині є пряма $x = a$, то

графіком нерівності $x > a$ будуть усі точки координатної площини, які знаходяться праворуч від цієї прямої, а графіком нерівності $x < a$ будуть усі точки координатної площини, які знаходяться ліворуч від цієї прямої.

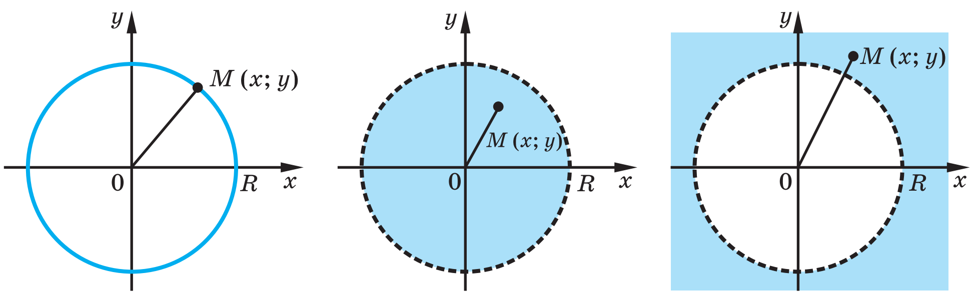
Наприклад, на рисунку 76 зображено графік нерівності $x > 2$, а на рисунку 77 — графік нерівності $x \leqslant -1$.

Зазначимо, що в тому випадку, коли на координатній площині є зображення кола $x^2 + y^2 = R^2$, то

графіком нерівності $x^2 + y^2 < R^2$ будуть усі точки координатної площини, які знаходяться всередині кола, а графіком нерівності $x^2 + y^2 > R^2$ будуть всі точки координатної площини, які знаходяться поза колом.

Дійсно, якщо на координатній площині розглянути точку $M\ (x,\ y)$, то $OM^2 = x^2 + y^2$ (O — початок координат). Якщо $x^2 + y^2 = R^2$ (де $R > 0$), то $OM^2 = R^2$, отже, $OM = R$ — точка M лежить на колі радіуса R з центром у початку координат (рис. 78, *а*).

Якщо $x^2 + y^2 < R^2$, то $OM^2 < R^2$, отже, $OM < R$. Тобто нерівності $x^2 + y^2 < R^2$ задовольняють координати всіх точок (і тільки цих точок), які знаходяться всередині круга, обмеженого колом радіуса R з центром у початку координат (рис. 78, *б*).



а *б* *в*

Рис. 78

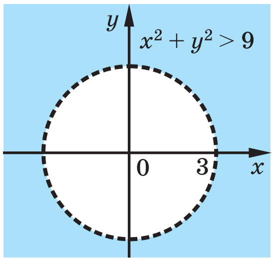


Рис. 79

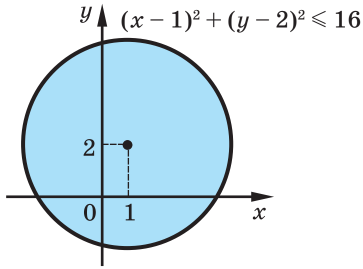


Рис. 80

Якщо $x^2 + y^2 > R^2$, то $OM^2 > R^2$, отже, $OM > R$. Тобто нерівності $x^2 + y^2 > R^2$ задовольняють координати всіх точок (і тільки цих точок), які знаходяться поза кругом, обмеженим колом радіуса R з центром у початку координат (рис. 78, *в*).

Аналогічно, якщо на площині є зображення кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, то графіком нерівності $(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$ будуть усі точки координатної площини, які знаходяться всередині кола, а графіком нерівності $(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$ будуть усі точки координатної площини, які знаходяться поза колом. Наприклад, на рисунку 79 зображено графік нерівності $x^2 + y^2 > 9$, а на рисунку 80 — графік нерівності $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 16$.

3. Геометричні перетворення графіка рівняння $F(x; y) = 0$.

За означенням графік рівняння

$$F(x; y) = 0 \qquad (1)$$

складається з усіх точок $M(x_0; y_0)$ координатної площини, координати $(x_0; y_0)$ яких є розв'язками цього рівняння. Це означає, що при підстановці пари чисел $(x_0; y_0)$ у задане рівняння воно перетворюється на правильну числову рівність, отже, $F(x_0; y_0) = 0$ — правильна рівність.

Розглянемо точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$. Якщо координати цієї точки підставити в рівняння

$$F(x-a; y-b) = 0, \qquad (2)$$

то одержимо рівність $F(x_0; y_0) = 0$, яка є правильною. Тому координати точки M_1 є розв'язками рівняння (2), а значить, точка M_1 належить графіку рівняння $F(x-a; y-b) = 0$. Точку $M_1(x_0 + a; y_0 + b)$ можна одержати з точки $M(x_0; y_0)$ паралельним перенесенням її на вектор $\overline{n}(a; b)$. Оскільки кожна точка M_1 графіка рівняння $F(x-a; y-b) = 0$ одержується з точки M графіка рівняння $F(x; y) = 0$ паралельним перенесенням її на вектор $\overline{n}(a; b)$ (рис. 81), то і весь

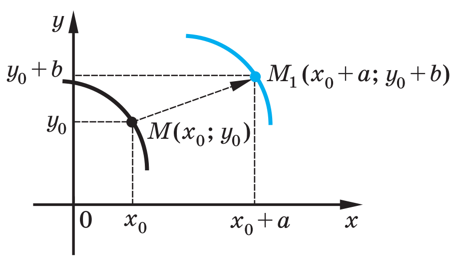


Рис. 81

графік рівняння $F(x-a; y-b)=0$ можна одержати з графіка рівняння $F(x; y)=0$ паралельним перенесенням його на вектор $\overline{n}(a; b)$.

Для обґрунтування зв'язку між графіками $F(x; y)=0$ і $F(|x|; y)=0$ досить помітити, що при $x \geqslant 0$ рівняння $F(|x|; y)=0$ збігається з рівнянням $F(x; y)=0$, отже, збігаються і їхні графіки праворуч від осі Oy і на самій осі. Нехай точка $M(x_0; y_0)$ (де $x_0 \geqslant 0$) — одна із спільних точок цих графіків. Тоді $F(x_0; y_0)=0$ — правильна рівність. Розглянемо точку $M_1(-x_0; y_0)$. Якщо координати цієї точки підставити в рівняння $F(|x|; y)=0$ і врахувати, що $x_0 \geqslant 0$, то одержимо рівність $F(x_0; y_0)=0$, яка є правильною. Тому координати точки M_1 є розв'язками рівняння $F(|x|; y)=0$, а значить, точка M_1 належить графіку цього рівняння. Враховуючи, що точки M і M_1 симетричні відносно осі Oy (рис. 82):

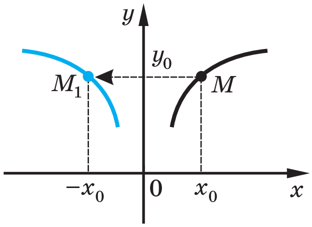


Рис. 82

графік рівняння $F(|x|; y)=0$ можна одержати з графіка рівняння $F(x; y)=0$ так: частина графіка рівняння $F(x; y)=0$ праворуч від осі Oy (і на самій осі) залишається без зміни, і ця ж сама частина відображується симетрично відносно осі Oy.

Аналогічно обґрунтовується, що

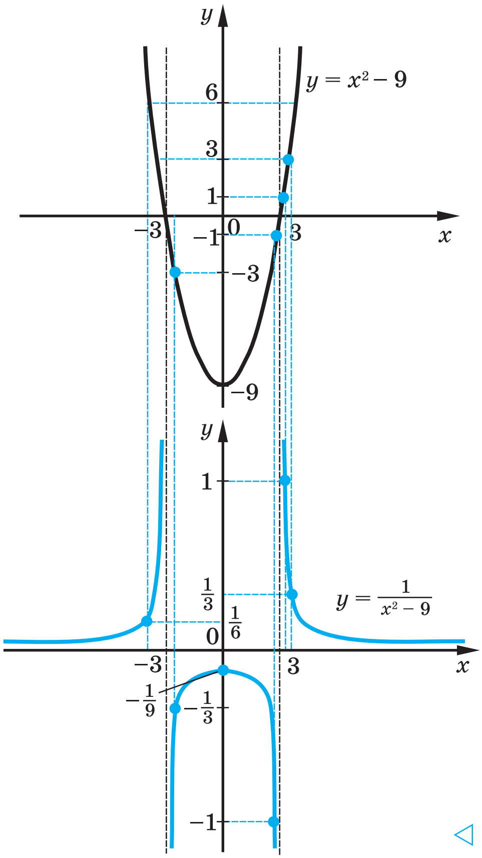
для побудови графіка рівняння $F(x; |y|)=0$: частина графіка рівняння $F(x; y)=0$ вище від осі Ox (і на самій осі) залишається без зміни, і ця ж сама частина відображується симетрично відносно осі Ox.

У таблиці 21 наведено найпростіші приклади використання геометричних перетворень графіків рівнянь. Указані співвідношення доводиться використовувати в завданнях типу: побудувати графік рівняння чи нерівності або зобразити на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють заданому рівнянню (нерівності).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції $y=\frac{1}{x^2-9}$.

Розв'язання	Коментар
▶ $x^2-9=0$ при $x=\pm 3$. Тому область визначення заданої функції: $x^2-9 \neq 0$, тобто $x \neq \pm 3$.	Побудуємо дві системи координат так, щоб осі ординат були у них на одній прямій. У тих точках, де



функція $f(x) = x^2 - 9$ дорівнює нулю ($x = \pm 3$), не існує графіка функції $y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 9}$. Тому проведемо через ці точки вертикальні прямі, що не перетинають графік функції $y = \frac{1}{f(x)}$.

Потім для кожного значення x поділимо 1 на відповідне значення ординати $f(x)$ (використовуючи те, що ординати $f(x)$ відмічені на верхньому графіку). На рисунку синьою лінією зображено результат — графік функції $y = \frac{1}{x^2 - 9}$. (Для цього графіка масштаб по осях Ox і Oy вибрано різний.) ◁

Приклад 2 Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі $\begin{cases} x^2 + y \leqslant 0, \\ x - y < 2. \end{cases}$

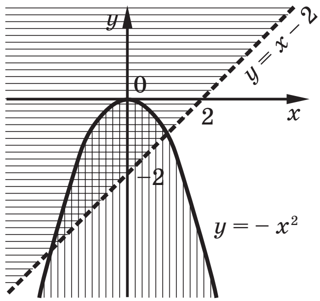
Розв'язання

▶ Задана система рівносильна системі $\begin{cases} y \leqslant -x^2, \\ y > x - 2. \end{cases}$

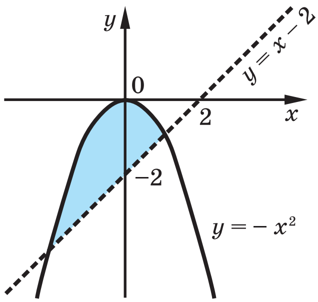
Зобразимо штриховкою графіки нерівностей системи (першої — вертикальною, другої — горизонтальною):

Коментар

Перепишемо задану систему так, щоб нам було зручно зображати графіки заданих нерівностей (тобто запишемо нерівності у вигляді $y > f(x)$ або $y < f(x)$). Множина точок, координати яких задовольняють нерівності $y \leqslant -x^2$, є об'єднання параболи $y = -x^2$ і точок координатної площини, які



Тоді множина точок, координати яких задовольняють системі, буде така:



◁

знаходяться нижче цієї параболи (на рисунку ця множина позначена вертикальною штриховкою). Множина точок, координати яких задовольняють нерівності $y > x - 2$, складається із точок координатної площини, які знаходяться вище прямої $y = x - 2$ (на рисунку ця множина позначена горизонтальною штриховкою).

Системі нерівностей задовольняють координати тих і тільки тих точок, які належать перетину множин точок, що задаються кожною з нерівностей даної системи (на рисунку перетину множин відповідає та область, де штриховки наклалися одна на другу).

Зауважимо, що в подібних завданнях можна не виконувати проміжних рисунків, а відразу штрихувати шукану множину точок координатної площини (вище прямої $y = x - 2$ і нижче параболи $y = -x^2$ разом з тією частиною параболи, яка лежить вище прямої).

Приклад 3 Побудуйте графік рівняння $|x - y| + 2|x + y| = x + 6$.

Орієнтир

Для спрощення виразу з кількома модулями з двома змінними можна знайти нулі підмодульних виразів (тобто прирівняти їх до нуля) і розбити область визначення розглядуваного виразу на декілька частин, у кожній з яких знак кожного модуля розкривається однозначно.

Використовуючи цей орієнтир, одержуємо *план розв'язання* прикладу.

Прирівняємо до нуля підмодульні вирази $x - y = 0$ (звідси $y = x$) і $x + y = 0$ (звідси $y = -x$). Прямі $y = x$ і $y = -x$ розбивають координатну площину на чотири області. Укожній із цих областей знак кожного модуля розкривається однозначно і після перетворення одержаної рівності будується відповідна частина графіка заданого рівняння.

Розв'язання

▶ 1. Область визначення: $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$.

2. $x - y = 0$ при $y = x$; $x + y = 0$ при $y = -x$.

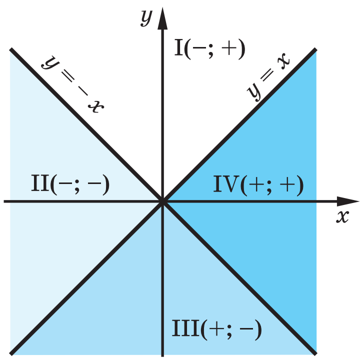
3. Прямі $y = x$ і $y = -x$ розбивають координатну площину на чотири частини, у кожній з яких позначено знаки першого і другого підмодульних виразів (рис. 83, *а*). (Будемо вважати, що кожна область береться разом з променями, які її обмежують.) Дійсно, якщо точки знаходяться в області I або на її межі, то їхні координати задовольняють системі нерівностей $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ яку можна записати так: $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \geqslant 0. \end{cases}$ Тоді в області I перший підмодульний вираз є від'ємним, а другий — додатним, і тому задане рівняння має вигляд: $-(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = 2$. Будуємо ту частину графіка цієї функції, що знаходиться в області I (рис. 83, *б*).

Аналогічно для точок області II: $\begin{cases} y \geqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x - y \leqslant 0, \\ x + y \leqslant 0. \end{cases}$

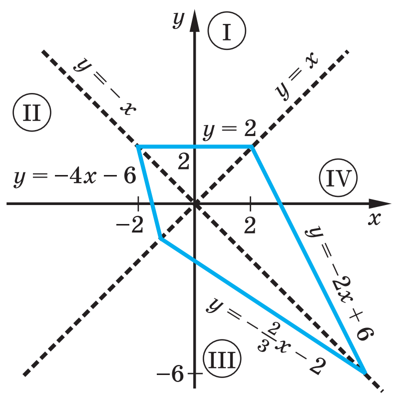
Отже, в області II задане рівняння має вигляд: $-(x - y) - 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = -4x - 6$. Будуємо ту частину графіка цієї функції, що знаходиться в області II.

Якщо точки знаходяться в області III: $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \leqslant -x, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 0, \end{cases}$ із заданого рівняння одержуємо $(x - y) - 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = -\frac{2}{3}x - 2$.

Якщо точки знаходяться в області IV: $\begin{cases} y \leqslant x, \\ y \geqslant -x, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x - y \geqslant 0, \\ x + y \geqslant 0, \end{cases}$ із заданого рівняння маємо $(x - y) + 2(x + y) = x + 6$. Звідси $y = -2x + 6$. Остаточний вигляд графіка рівняння наведено на рисунку 83, *б*. ◁



а



б

Рис. 83

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна, маючи графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$, побудувати ескіз графіка функції $y = f(x) + g(x)$ та функції $y = \frac{1}{f(x)}$.
2. Що називається графіком рівняння з двома змінними? Що називається графіком нерівності з двома змінними? Наведіть приклади.
3. Як, знаючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік нерівності $y > f(x)$ та нерівності $y < f(x)$? Наведіть приклади.
4. Як, знаючи графік рівняння $F(x; y) = 0$, можна побудувати графік рівняння $F(x - a;\ y - b) = 0$ та рівнянь $F(|x|;\ y) = 0$ і $F(x;\ |y|) = 0$? Наведіть приклади.

5*. Обґрунтуйте правила геометричних перетворень графіка рівняння $F(x; y) = 0$ для одержання графіків рівнянь $F(x - a; y - b) = 0$, $F(|x|; y) = 0$, $F(x; |y|) = 0$.

6. Поясніть на прикладі, як можна знайти на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі нерівностей з двома змінними.

Вправи

1. Побудуйте ескіз графіка функції:

1) $y = x + \frac{1}{x}$; 2) $y = x - \frac{1}{x}$; 3) $y = x^3 + \frac{1}{x}$; 4) $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

2. Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = x - 2$; 2) $|y| = x^2 - x$; 3) $|x| = -y^2$;
4) $|x| + |y| = 2$; 5) $|x| - |y| = 2$.

3. Побудуйте графік нерівності:

1) $y > x^2 - 3$; 2) $y < \frac{1}{x}$; 3) $x^2 + y^2 \leqslant 25$;
4) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 > 4$.

4. Покажіть штриховкою на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють системі:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 4, \\ y > x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 9, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x^2, \\ y < -x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leqslant 5 - x, \\ y \geqslant x, \\ y \leqslant 2x + 4. \end{cases}$

5. Побудуйте графік рівняння:

1) $|x - y| - |x + y| = y + 3$; 2) $|x - 2y| + |2x - y| = 2 - y$;
3) $|3x + y| + |x - y| = 4$.

§9 МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ

При розв'язуванні математичних завдань інколи виникає потреба обґрунтувати, що певна властивість виконується для довільного натурального числа n.

Перевірити задану властивість для кожного натурального числа ми не можемо — їх кількість нескінченна. Доводиться міркувати так: 1) я можу перевірити, що ця властивість виконується при $n = 1$; 2) я можу показати, що для

Таблиця 22

Схема доведення тверджень за допомогою методу математичної індукції	Приклад
1. *Перевіряємо*, чи виконується дане твердження при $n = 1$ (іноді починають з $n = p$). 2. *Припускаємо*, що задане твердження справедливе при $n = k$, де $k \geqslant 1$ (другий варіант — при $n \leqslant k$). 3. *Доводимо* (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і при $n = k + 1$. 4. *Робимо висновок*, що дане твердження справедливе для будь-якого натурального числа n (для будь-якого $n \geqslant p$).	Доведіть, що для довільного натурального n: $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$ ▶ Для зручності запису позначимо $S_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1)$. 1. При $n = 1$ рівність виконується: $1\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3,$ тобто $2 = 2$. 2. Припускаємо, що задана рівність правильна при $n = k$, де $k \geqslant 1$, тобто $S_k = 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)=$ $=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$ (1) 3. Доведемо, що рівність виконується і при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $S_{k+1} = 1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)+$ $+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$ Враховуючи, що $S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)$, і підставляючи S_k з рівності (1), одержуємо $S_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=$ $=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$ що й потрібно було довести. 4. Отже, задана рівність правильна для будь-якого натурального n. ◁

кожного наступного значення n вона теж виконується, отже, властивість буде виконуватись для кожного наступного числа, починаючи з одиниці, тобто для всіх натуральних чисел.

Такий спосіб міркувань при доведенні математичних тверджень називається *методом математичної індукції*. Він є одним з універсальних методів доведення математичних тверджень, у яких містяться слова «для довільного натурального n» (можливо, не сформульовані явно). Доведення за допомогою цього методу завжди складається з двох етапів:

1) *початок індукції*: перевіряється, чи виконується розглядуване твердження при $n = 1$;
2) *індуктивний перехід*: доводиться, що коли задане твердження виконується для k, то воно виконується і для $k + 1$.

Таким чином, почавши з $n = 1$, ми на основі доведеного індуктивного переходу одержуємо справедливість сформульованого твердження для $n = 2, 3, \ldots$, тобто для будь-якого натурального n.

На практиці цей метод зручно використовувати за схемою, наведеною в таблиці 22.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Доведіть, що $10^n - 9n - 1$ ділиться на 81 при будь-якому натуральному n.

Коментар

Оскільки твердження необхідно довести для будь-якого натурального n, то використаємо метод математичної індукції за схемою, наведеною в таблиці 22. При виконанні індуктивного переходу (від $n = k$ до $n = k + 1$) подамо вираз, який одержуємо при $n = k + 1$, як суму двох виразів: того, що одержали при $n = k$, і ще одного виразу, який ділиться на 81.

Розв'язання

1. ▶ Перевіряємо, чи виконується задане твердження при $n = 1$. Якщо $n = 1$, заданий вираз дорівнює 0, тобто ділиться на 81. Отже, задана властивість виконується при $n = 1$.
2. Припускаємо, що задане твердження виконується при $n = k$, тобто що $10^k - 9k - 1$ ділиться на 81.
3. Доведемо, що задане твердження виконується і при $n = k + 1$, тобто що $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$ ділиться на 81.
$$10^{k+1} - 9(k + 1) - 1 = 10^k \cdot 10 - 9k - 9 - 1 = 10(10^k - 9k - 1) + 81k.$$
Вираз у дужках — це значення заданого виразу при $n = k$, яке за припущенням індукції ділиться на 81. Отже, кожний доданок останньої суми ділиться на 81, тоді і вся сума, тобто $10^{k+1} - 9(k + 1) - 1$, ділиться на 81. Таким чином, задане твердження виконується і при $n = k + 1$.
4. Отже, $10^n - 9n - 1$ ділиться на 81 при будь-якому натуральному n. ◁

Приклад 2 Доведіть, що $2^n > 2n+1$, якщо $n \geq 3$, $n \in N$.

Коментар

Оскільки твердження повинно виконуватися, починаючи з $n = 3$, то перевірку проводимо саме для цього числа. Записуючи припущення індукції, зручно використати, що за означенням поняття «більше» $a > b$ тоді і тільки тоді, коли $a - b > 0$. Доводячи нерівність при $n = k + 1$, знову використовуємо те саме означення і доводимо, що різниця між лівою і правою частинами відповідної нерівності додатна.

Розв'язання

1. При $n = 3$ одержуємо $2^3 > 2 \cdot 3 + 1$, тобто $8 > 7$ — правильна нерівність. Отже, при $n = 3$ задана нерівність виконується.
2. Припускаємо, що задана нерівність виконується при $n = k$ (де $k \geqslant 3$):
$$2^k > 2k + 1, \text{ тобто } 2^k - 2k - 1 > 0. \qquad (1)$$
3. Доведемо, що задана нерівність виконується і при $n = k + 1$, тобто доведемо, що $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$.
Розглянемо різницю $2^{k+1} - (2(k + 1) + 1) = 2^k \cdot 2 - 2k - 3 =$
$= 2(2^k - 2k - 1) + 2k - 1 > 0$ (оскільки вираз у дужках за нерівністю (1) додатний і при $k \geqslant 3$ вираз $2k - 1$ теж додатний). Отже, $2^{k+1} > 2(k + 1) + 1$, тобто задана нерівність виконується і при $n = k + 1$.
4. Таким чином, задана нерівність виконується при всіх натуральних $n \geqslant 3$.

Вправи

Доведіть за допомогою методу математичної індукції **(1–12)**.

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$ при всіх натуральних n ($n \in N$).
2. $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\frac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\frac{n}{4n+1}$, де $n \in N$.
3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, де $n \in N$.
4. $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$, де $n \in N$.
5. Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ позначається $n!$ (читається: «n факторіал»). Доведіть, що $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$, де $n \in N$.
6. $4^n > 7n - 5$, якщо $n \in N$.
7. $2^n > n^3$, якщо $n \geqslant 10$.
8. Доведіть, що $9^n - 8n - 1$ ділиться на 16 при будь-якому натуральному n.
9. Доведіть, що $5^n + 5 \cdot 3^n - 3$ ділиться на 8 при будь-якому натуральному n.
10. Доведіть, що $7^n + 3^n - 2$ ділиться на 8 при будь-якому натуральному n.
11. Доведіть, що $2^{3n+3} - 7n + 41$ ділиться на 49 при будь-якому натуральному n.
12. Доведіть, що коли $a_1 = 2$, $a_2 = 8$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, то $a_n = 3^n - 1$, де $n \in N$.

§ 10 МНОГОЧЛЕНИ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ДІЇ НАД НИМИ

10.1. ОЗНАЧЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ ТА ЇХ ТОТОЖНА РІВНІСТЬ

Розглянемо одночлен і многочлен, які залежать тільки від однієї змінної, наприклад, від змінної x.

За означенням одночлена числа і букви (у нашому випадку одна буква — x) у ньому пов'язані тільки двома діями — множенням і піднесенням до натурального степеня. Якщо в цьому одночлені добуток усіх чисел записати перед буквою, а добуток усіх степенів букви записати як цілий невід'ємний степінь цієї букви (тобто записати одночлен у стандартному вигляді), то одержимо вираз виду ax^n, де a — деяке число. Тому *одночлен від однієї змінної x — це вираз виду ax^n, де a — деяке число, n — ціле невід'ємне число*. Якщо $a \neq 0$, то показник степеня n змінної x називається *степенем одночлена*. Наприклад, $25x^6$ — одночлен шостого степеня, $\frac{2}{3}x^2$ — одночлен другого степеня. Якщо одночлен є числом (не рівним нулю), то його степінь вважається рівним нулю. *Для одночлена, який заданий числом* 0, *поняття степеня не означається* (оскільки $0 = 0 \cdot x = 0 \cdot x^2 = 0 \cdot x^3 \ldots$).

За означенням многочлен від однієї змінної x — це сума одночленів від однієї змінної x. Тому

многочленом від однієї змінної x називається вираз виду
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad (1)$$
де коефіцієнти $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ — деякі числа.

Якщо $a_n \neq 0$, то цей многочлен називають *многочленом n-го степеня* від змінної x. При цьому член a_nx^n називають *старшим членом многочлена* $f(x)$, число a_n — *коефіцієнтом при старшому члені*, а член a_0 — *вільним членом*. Наприклад, $5x^3 - 2x + 1$ — многочлен третього степеня, у якого вільний член дорівнює 1, а коефіцієнт при старшому члені дорівнює 5.

Зазначимо, що іноді нумерацію коефіцієнтів многочлена починають з початку запису виразу (1), і тоді загальний вид многочлена $f(x)$ записують так:
$$f(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n,$$
де $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — деякі числа.

Т е о р е м а 1. ***Одночлени ax^n, де $a \neq 0$, та bx^m, де $b \neq 0$, тотожно рівні тоді і тільки тоді, коли $a = b$ і $n = m$.***
Одночлен ax^n тотожно рівний нулю тоді і тільки тоді, коли $a = 0$.

Оскільки рівність одночленів
$$ax^n = bx^m \qquad (2)$$
виконується при всіх значеннях x (за умовою ці одночлени тотожно рівні), то, підставляючи в цю рівність $x = 1$, отримуємо, що $a = b$. Скорочуючи

обидві частини рівності (2) на a (де $a \neq 0$ за умовою), одержуємо $x^n = x^m$. При $x = 2$ з цієї рівності маємо: $2^n = 2^m$. Оскільки $2^n = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ разів}}$, а $2^m = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{m \text{ разів}}$, то рівність $2^n = 2^m$ можлива лише тоді, коли $n = m$. Отже, з тотожної рівності $ax^n = bx^m$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ отримуємо, що $a = b$ і $n = m$.

Якщо відомо, що $ax^n = 0$ для всіх x, то при $x = 1$ одержуємо $a = 0$. Тому одночлен ax^n тотожно рівний нулю при $a = 0$ (тоді $ax^n = 0 \cdot x^n \equiv 0$*). ○

Надалі будь-який одночлен виду $0 \cdot x^n$ замінюватимемо на 0.

Теорема 2. ***Якщо многочлен $f(x)$ тотожно рівний нулю (тобто набуває нульових значень при всіх значеннях x), то всі його коефіцієнти рівні нулю.***

● Для доведення використовуємо метод математичної індукції.

Нехай $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$.

При $n = 0$ маємо $f(x) = a_0 \equiv 0$, тому $a_0 = 0$. Тобто в цьому випадку твердження теореми виконується.

Припустимо, що при $n = k$ це твердження також виконується: якщо многочлен $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0$, то $a_k = a_{k-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.

Доведемо, що задане твердження виконується й при $n = k + 1$. Нехай

$$f(x) = a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0. \qquad (3)$$

Оскільки рівність (3) виконується при всіх значеннях x, то, підставляючи в цю рівність $x = 0$, одержуємо, що $a_0 = 0$. Тоді рівність (3) перетворюється на таку рівність: $a_{k+1} x^{k+1} + a_k x^k + \ldots + a_1 x \equiv 0$. Винесемо x у лівій частині цієї рівності за дужки і одержимо

$$x(a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1) \equiv 0. \qquad (4)$$

Рівність (4) повинна виконуватися при всіх значеннях x. Для того щоб вона виконувалася при $x \neq 0$, повинна виконуватися тотожність

$$a_{k+1} x^k + a_k x^{k-1} + \ldots + a_1 \equiv 0.$$

У лівій частині цієї тотожності стоїть многочлен із степенями змінної від x^0 до x^k. Тоді за припущенням індукції всі його коефіцієнти дорівнюють нулю: $a_{k+1} = a_k = \ldots = a_1 = 0$. Але ми також довели, що $a_0 = 0$, тому наше твердження виконується і при $n = k + 1$. Отже, твердження теореми справедливе для будь-якого цілого невід'ємного n, тобто для всіх многочленів. ○

Многочлен, у якого всі коефіцієнти рівні нулю, звичайно називають *нульовим многочленом*, або *нуль-многочленом*, і позначають $0(x)$ або просто 0 (оскільки $0(x) = 0$).

Теорема 3. ***Якщо два многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тотожно рівні, то вони збігаються (тобто їхні степені однакові і коефіцієнти при однакових степенях рівні).***

---

* Значком ≡ позначена тотожна рівність многочленів.

Нехай многочлен $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, а многочлен $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2x^2 + b_1x + b_0$. Розглянемо многочлен $f(x) - g(x)$. Оскільки многочлени $f(x)$ і $g(x)$ за умовою тотожно рівні, то многочлен $f(x) - g(x)$ тотожно дорівнює 0. Отже, всі його коефіцієнти дорівнюють нулю.
Але $f(x) - g(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \ldots$.
Тоді $a_0 - b_0 = 0$, $a_1 - b_1 = 0$, $a_2 - b_2 = 0$, ... Звідси $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ...
Як бачимо, якщо припустити, що у якогось із двох заданих многочленів степінь вище, ніж у другого многочлена (наприклад, n більше m), то коефіцієнти різниці будуть дорівнювати нулю. Тому, починаючи з $(m + 1)$-го номера, усі коефіцієнти a_i також дорівнюватимуть нулю. Тобто дійсно, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ мають однаковий степінь і відповідно рівні коефіцієнти при однакових степенях. ○

Теорема 3 є основою так званого методу невизначених коефіцієнтів. Покажемо його застосування на такому прикладі.

Приклад Доведіть, що $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16$ є повний квадрат.

▶ Заданий многочлен є многочленом четвертого степеня, тому він може бути повним квадратом тільки многочлена другого степеня. Многочлен другого степеня має вигляд $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.

Одержуємо тотожність:

$$(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x + 8) + 16 = (ax^2 + bx + c)^2. \qquad (5)$$

Розкриваючи дужки в лівій і правій частинах цієї тотожності і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержуємо систему рівностей. Цей етап зручно оформляти в такому вигляді:

x^4	$1 = a^2$
x^3	$2 + 4 + 6 + 8 = 2ab$
x^2	$2 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 + 6 \cdot 8 = b^2 + 2ac$
x^1	$2 \cdot 4 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 2 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 8 = 2bc$
x^0	$2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 16 = c^2$

З першої рівності одержуємо $a = 1$ або $a = -1$.

При $a = 1$ з другої рівності маємо $b = 10$, а з третьої — $c = 20$. Як бачимо, при цих значеннях a, b і c останні дві рівності також виконуються. Отже, тотожність (5) виконується при $a = 1$, $b = 10$, $c = 20$ (аналогічно можна також одержати $a = -1$, $b = -10$, $c = -20$).

Таким чином, $(x + 2)(x + 4)(x + 6)(x+8) + 16 = (x^2 + 10x + 20)^2$. ◁

Вправи

1. Знаючи, що многочлени $f(x)$ і $g(x)$ тотожно рівні, знайдіть значення коефіцієнтів a, b, c, d:
1) $f(x) = 2x^2 - (3 - a)x + b$, $g(x) = cx^3 + 2dx^2 + x + 5$;
2) $f(x) = (a + 1)x^3 + 2$, $g(x) = 3x^3 + bx^2 + (c - 1)x + d$.

2. Знайдіть такі числа a, b, c, щоб задана рівність $(x^2 - 1)a + b(x - 2) + c(x + 2) = 2$ виконувалася при будь-яких значеннях x.

3. Доведіть тотожність:
1) $(x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^6 - 1$;
2) $1 + x^4 = \left(1 + x\sqrt{2} + x^2\right)\left(1 - x\sqrt{2} + x^2\right)$.

4. Доведіть, що заданий вираз є повний квадрат:
1) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) + 1$;
2) $(x + a)(x + 2a)(x + 3a)(x + 4a) + a^4$.

5. Знайдіть такі a і b, щоб при будь-яких значеннях x виконувалася рівність $3x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 3x + 2 = (3x^2 + ax + 1)(x^2 + x + b)$.

6. Запишіть алгебраїчний дріб $\frac{2}{15x^2 + x - 2}$ як суму двох алгебраїчних дробів виду $\frac{a}{3x - 1}$ і $\frac{b}{5x + 2}$.

10.2. ДІЇ НАД МНОГОЧЛЕНАМИ. ДІЛЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН З ОСТАЧЕЮ

Додавання і множення многочленів від однієї змінної виконується за допомогою відомих правил додавання і множення многочленів. У результаті виконання дій додавання або множення над многочленами від однієї змінної завжди одержуємо многочлен від тієї самої змінної.

З означення добутку двох многочленів випливає, що *старший член добутку двох многочленів дорівнює добутку старших членів множників, а вільний член добутку дорівнює добутку вільних членів множників. Звідси одержуємо, що степінь добутку двох многочленів дорівнює сумі степенів множників.*

При додаванні многочленів одного степеня одержуємо многочлен цього самого степеня, хоча іноді можна одержати многочлен меншого степеня.

Наприклад, $2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 + (-2x^3 + 5x^2 + x + 5) = 4x + 6$.

При додаванні многочленів різних степенів завжди одержуємо многочлен, степінь якого дорівнює більшому степеню доданку.

Наприклад, $(3x^3 - 5x + 7) + (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 + x^2 - 3x + 8$.

Ділення многочлена на многочлен означається аналогічно діленню цілих чисел. Нагадаємо, що число a ділиться на число b $(b \neq 0)$, якщо існує таке число q, що $a = b \cdot q$.

Означення. Многочлен $A(x)$ ділиться на многочлен $B(x)$ (де $B(x)$ — не нульовий многочлен), якщо існує такий многочлен $Q(x)$, що

$$A(x) = B(x) \cdot Q(x).$$

Як і для цілих чисел, операція ділення многочлена на многочлен виконується не завжди, тому у множині многочленів вводиться операція *ділення з остачею*. Говорять, що

многочлен $A(x)$ ділиться на многочлен $B(x)$ (де $B(x)$ — не нульовий многочлен) з остачею, якщо існує така пара многочленів $Q(x)$ і $R(x)$, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причому степінь остачі $R(x)$ менший за степінь дільника $B(x)$. (Зазначимо, що в цьому випадку многочлен $Q(x)$ називається *неповною часткою*.)

Наприклад, оскільки $x^3 - 5x + 2 = (x^2 - 5)x + 2$, то при діленні многочлена $x^3 - 5x + 2$ на многочлен $x^2 - 5$ одержуємо неповну частку x і остачу 2.

Іноді ділення многочлена на многочлен зручно виконувати «куточком», як і ділення багатозначних чисел, користуючись таким алгоритмом.

При діленні многочленів від однієї змінної змінні в діленому і в дільнику розміщують за спаданням степенів і ділять старший член діленого на старший член дільника. Потім одержаний результат множиться на дільник, і цей добуток віднімається від діленого. З одержаною різницею виконують аналогічну операцію: ділять її старший член на старший член дільника і одержаний результат знову множать на дільник і т. д. Цей процес продовжуємо до тих пір, поки не одержимо в остачі 0 *(якщо один многочлен ділиться на другий), або поки в остачі не одержимо многочлен, степінь якого менший за степінь дільника.*

Приклад Розділимо многочлен $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ на многочлен $B(x) = x^2 - 2x + 3$.

▶
$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4 - 2x^3 + 3x^2\qquad\qquad\quad} & x^2 - 3x - 8 \\
-\;-3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\
\underline{-3x^3 + 6x^2 - 9x\qquad} & \\
-\;-8x^2 + 17x - 20 & \\
\underline{-8x^2 + 16x - 24} & \\
x + 4 &
\end{array}
$$
◁

Доведемо, що одержаний результат дійсно є результатом ділення $A(x)$ на $B(x)$ з остачею.

● Якщо позначити результат виконання першого кроку алгоритму через $f_1(x)$, другого кроку — через $f_2(x)$, третього — через $f_3(x)$, то операцію ділення, яку виконали вище, можна записати у вигляді системи рівностей:

$$f_1(x) = A(x) - x^2 \cdot B(x); \qquad (1)$$
$$f_2(x) = f_1(x) - (-3x) \cdot B(x); \qquad (2)$$
$$f_3(x) = f_2(x) - (-8) \cdot B(x). \qquad (3)$$

Додамо почленно рівності (1), (2), (3) і отримаємо

$$A(x) = (x^2 - 3x - 8)\,B(x) + f_3(x). \qquad (4)$$

Враховуючи, що степінь $f_3(x) = x + 4$ менший за степінь дільника $B(x) = x^2 - 2x + 3$, позначимо $f_3(x) = R(x)$ (остача), а $x^2 - 3x - 8 = Q(x)$ (неповна частка). Тоді з рівності (4) маємо: $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, тобто $x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - 3x - 8) + x + 4$, а це й означає, що ми разділили $A(x)$ на $B(x)$ з остачею. ○

Очевидно, що наведене обґрунтування можна провести для будь-якої пари многочленів $A(x)$ і $B(x)$ у випадку їх ділення стовпчиком. Тому описаний вище алгоритм дозволяє для довільних діленого $A(x)$ і дільника $B(x)$ (де $B(x)$ — не нульовий многочлен) знайти неповну частку $Q(x)$ і остачу $R(x)$.

Зазначимо, що у випадку, коли степінь діленого $A(x)$ менший за степінь дільника $B(x)$, вважають, що неповна частка $Q(x) = 0$, а остача $R(x) = A(x)$.

Вправи

1. Виконайте ділення многочлена на многочлен:
1) $3x^3 - 5x^2 + 2x - 8$ на $x - 2$; 2) $x^{10} + 1$ на $x^2 + 1$;
3) $x^5 + 3x^3 + 8x - 6$ на $x^2 + 2x + 3$.

2. Виконайте ділення многочлена на многочлен з остачею:
1) $4x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ на $x^2 + x + 2$;
2) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ на $x^2 - x - 2$.

3. При яких значеннях a і b многочлен $A(x)$ ділиться без остачі на многочлен $B(x)$?
1) $A(x) = x^3 + ax + b$, $B(x) = x^2 + 5x + 7$;
2) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 + ax + b$, $B(x) = x^2 - 4$;
3) $A(x) = x^4 - x^3 + x^2 - ax + b$, $B(x) = x^2 - x + 2$.

4. Знайдіть неповну частку і остачу при діленні многочлена $A(x)$ на многочлен $B(x)$ методом невизначених коефіцієнтів:
1) $A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$, $B(x) = x^2 - 1$;
2) $A(x) = x^3 - 19x - 30$, $B(x) = x^2 + 1$.

10.3. ТЕОРЕМА БЕЗУ. КОРЕНІ МНОГОЧЛЕНА. ФОРМУЛИ ВІЄТА

Розглянемо ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - a)$. Оскільки степінь дільника дорівнює 1, то степінь остачі, яку ми одержимо, повинен бути меншим за 1, тобто в цьому випадку остачею буде деяке число R. Таким чином, якщо розділити многочлен $f(x)$ на двочлен $(x - a)$, то одержимо

$$f(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R.$$

Ця рівність виконується тотожно, тобто при будь-якому значенні x. При $x = a$ маємо: $f(a) = R$. Одержаний результат називається теоремою Безу*.

---

* Безу Етьєн (1730–1783), французький математик, який вніс значний вклад у розвиток теорії алгебраїчних рівнянь.

Т е о р е м а 1 (Теорема Безу). ***Остача від ділення многочлена $f(x)$ на двочлен $(x - a)$ дорівнює $f(a)$ (тобто значенню многочлена при $x = a$).***

Приклад 1 Доведіть, що $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ ділиться без остачі на $x - 1$.

▶ Підставивши в $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 4x - 4$ замість x значення 1, одержуємо: $f(1) = 0$. Отже, остача від ділення $f(x)$ на $(x - 1)$ дорівнює 0, тобто $f(x)$ ділиться на $(x - 1)$ без остачі. ◁

О з н а ч е н н я. ***Число α називається коренем многочлена $f(x)$, якщо $f(\alpha) = 0$.***

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)$, то α — корінь цього многочлена.

Дійсно, якщо $f(x)$ ділиться на $(x - \alpha)$, то $f(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$ і тому $f(\alpha) = (\alpha - \alpha) \cdot Q(\alpha) = 0$. Отже, α — корінь многочлена $f(x)$. ○

Справедливе і зворотне твердження. Воно є *наслідком теореми Безу*.

Т е о р е м а 2. ***Якщо число α є коренем многочлена $f(x)$, то цей многочлен ділиться на двочлен $(x - \alpha)$ без остачі.***

За теоремою Безу остача від ділення $f(x)$ на $(x - \alpha)$ дорівнює $f(\alpha)$. Але за умовою α — корінь $f(x)$, отже, $f(\alpha) = 0$. ○

Узагальненням теореми 2 є таке твердження.

Т е о р е м а 3. ***Якщо многочлен $f(x)$ має попарно різні корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то він ділиться без остачі на добуток $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$.***

Для доведення використовуємо метод математичної індукції.
При $n = 1$ твердження доведено в теоремі 2.
Припустимо, що твердження справедливе при $n = k$. Тобто, якщо $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — попарно різні корені многочлена $f(x)$, то він ділиться на добуток $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)$. Тоді

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k) \cdot Q(x). \qquad (1)$$

Доведемо, що твердження теореми справедливе й при $n = k + 1$. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ — попарно різні корені многочлена $f(x)$. Оскільки α_{k+1} — корінь $f(x)$, то $f(\alpha_{k+1}) = 0$. Беручи до уваги рівність (1), яка виконується згідно з припущенням індукції, одержуємо:

$$f(\alpha_{k+1}) = (\alpha_{k+1} - \alpha_1)(\alpha_{k+1} - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (\alpha_{k+1} - \alpha_k) \cdot Q(\alpha_{k+1}) = 0.$$

За умовою всі корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}$ різні, тому жодне з чисел $\alpha_{k+1} - \alpha_1$, $\alpha_{k+1} - \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1} - \alpha_k$ не дорівнює нулю. Тоді $Q(\alpha_{k+1}) = 0$. Отже, α_{k+1} — корінь многочлена $Q(x)$. Тоді за теоремою 2 многочлен $Q(x)$ ділиться на $(x - \alpha_{k+1})$, тобто $Q(x) = (x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x)$ і з рівності (1) маємо

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_k)(x - \alpha_{k+1}) \cdot Q_1(x).$$

Це означає, що $f(x)$ ділиться на добуток

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_k)(x-\alpha_{k+1}),$$

тобто теорема доведена й при $n = k + 1$.

Отже, теорема справедлива для будь-якого натурального n.

Наслідок. ***Многочлен степеня n має не більше n різних коренів.***

Припустимо, що многочлен n-го степеня має $(n + 1)$ різних коренів: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$. Тоді $f(x)$ ділиться на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\times$ $\times(x-\alpha_{n+1})$ — многочлен степеня $(n + 1)$, але це неможливо. Тому многочлен n-го степеня не може мати більше, ніж n коренів.

Нехай тепер многочлен n-го степеня $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x +$ $+ a_0$ $(a_n \neq 0)$ має n різних коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Тоді цей многочлен ділиться без остачі на добуток $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$. Цей добуток є многочленом того самого n-го степеня. Отже, у результаті ділення можна одержати тільки многочлен нульового степеня, тобто число. Таким чином,

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = b(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n). \quad (2)$$

Якщо розкрити дужки в правій частині рівності (2) і прирівняти коефіцієнти при старших степенях, то одержимо, що $b = a_n$, тобто

$$\boxed{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)}\,. \quad (3)$$

Порівнюючи в тотожності (3) коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, одержуємо співвідношення між коефіцієнтами рівняння та його коренями, які називаються **формулами Вієта**:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}; \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\ldots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \quad (4)$$

Наприклад, при $n = 2$ маємо:

$$\boxed{\alpha_1+\alpha_2 = -\frac{a_1}{a_2},\quad \alpha_1\alpha_2 = \frac{a_0}{a_2},}$$

а при $n = 3$:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}; \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{a_1}{a_3}; \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases} \quad (5)$$

Виконання таких рівностей є необхідною і достатньою умовою того, щоб числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ були коренями многочлена

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \ (a_n \neq 0).$$

Формули (3) і (4) справедливі не тільки для випадку, коли всі корені многочлена $f(x)$ різні. Введемо *поняття кратного кореня многочлена*.

Якщо многочлен $f(x)$ ділиться без остачі на $(x-\alpha)^k$, але не ділиться без остачі на $(x-\alpha)^{k+1}$, то говорять, що число α є корінь кратності k многочлена $f(x)$.

Наприклад, якщо добуток $(x+2)^3(x-1)^2(x+3)$ записати у вигляді многочлена, то для цього многочлена число (-2) є коренем кратності 3, число 1 є коренем кратності 2, а число (-3) є коренем кратності 1.

При використанні формул Вієта у випадку кратних коренів необхідно кожен корінь записати стільки разів, яка його кратність.

Приклад 2 Перевірте справедливість формул Вієта для многочлена

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8.$$

▶ $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = x^2(x+2) - 4(x+2) = (x+2)(x^2-4) = (x-2)(x+2)^2$. Тому $f(x)$ має корені: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = -2$ (оскільки (-2) — корінь кратності 2).

Перевіримо справедливість формул (5).

У нашому випадку: $a_3 = 1$, $a_2 = 2$, $a_1 = -4$, $a_0 = -8$. Тоді

$$2+(-2)+(-2) = -\frac{2}{1};\ \ 2\cdot(-2)+2\cdot(-2)+(-2)\cdot(-2) = \frac{-4}{1};\ \ 2\cdot(-2)\cdot(-2) = -\frac{-8}{1}.$$

Як бачимо, всі рівності виконуються, тому формули Вієта є справедливими для даного многочлена. ◁

Приклад 3 Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$.

▶ Позначимо корені рівняння $x^2 - 8x + 4 = 0$ через x_1 і x_2. Тоді коренями рівняння, яке ми шукаємо, повинні бути числа $\alpha_1 = x_1^2$ і $\alpha_2 = x_2^2$. Отже, це рівняння має вигляд: $x^2 + px + q = 0$,

де $p = -(\alpha_1 + \alpha_2) = -(x_1^2 + x_2^2) = -\left((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right)$, $q = \alpha_1\alpha_2 = x_1^2 x_2^2 = (x_1x_2)^2$.

За формулами Вієта маємо: $x_1 + x_2 = 8$ і $x_1x_2 = 4$. Звідси знаходимо, що

$$q = (x_1x_2)^2 = 4^2 = 16,\ \text{а}\ \ p = -\left((x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right) = -(8^2 - 2\cdot 4) = -56.$$

Таким чином, шукане рівняння має вигляд $x^2 - 56x + 16 = 0$. ◁

Вправи

1. Знайдіть остачу від ділення многочлена $x^5 - 4x^4 + 2x^3 - 5x + 1$ на $x + 2$.
2. Знайдіть коефіцієнт a, знаючи, що остача від ділення многочлена $x^3 - ax^2 + 5x - 3$ на $x - 1$ дорівнює 6.

3. Многочлен $f(x)$ при діленні на $x-1$ дає остачу 4, а при діленні на $x-3$ дає остачу 6. Знайдіть остачу від ділення многочлена $f(x)$ на x^2-4x+3.
4. При яких значеннях a і b многочлен $x^4+2x^3+ax^2-bx+2$ ділиться без остачі на $x+2$, а при діленні на $x-1$ має остачу, яка дорівнює 3?
5. Остача від ділення многочлена $f(x)$ на $3x^2-5x+2$ дорівнює $7x+1$. Знайдіть остачу від ділення цього многочлена на двочлени $x-1$ і $3x-2$.
6. Запишіть формули Вієта при $n=4$.
7. Складіть кубічний многочлен, який має корені 5, −2, 1 і коефіцієнт при старшому члені −2. Розв'яжіть задачу двома способами.
8. При яких значеннях a сума квадратів коренів тричлена $x^2-(a+2)x+3a$ дорівнює 12?
9. Яку кратність має корінь 2 для многочлена
$$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8?$$
10. Складіть кубічний многочлен, який має корінь 3 кратності 2 і корінь (−1), а коефіцієнт при старшому члені 2.
11. Знайдіть такі a і b, щоб число 3 було коренем не менш ніж другої кратності для многочлена $f(x)=x^3-5x^2+ax+b$.
12. Складіть квадратне рівняння, корені якого протилежні кореням рівняння $x^2-5x+1=0$.
13. Складіть квадратне рівняння, корені якого обернені до коренів рівняння $2x^2-5x+1=0$.
14. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є квадрати коренів рівняння $x^2+6x+3=0$.

10.4. СХЕМА ГОРНЕРА

Ділити многочлен $f(x)$ на двочлен $(x-a)$ іноді зручно за допомогою спеціальної схеми, яку називають схемою Горнера.

Нехай многочлен $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$ потрібно розділити на двочлен $(x-a)$. У результаті ділення многочлена n-го степеня на многочлен першого степеня одержимо деякий многочлен $Q(x)$ $(n-1)$-го степеня (тобто $Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1}$, де $b_0\neq 0$) і остачу R. Тоді $f(x)=(x-a)\cdot Q(x)+R$, тобто

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=$$
$$=(x-a)\cdot(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\ldots+b_{n-2}x+b_{n-1})+R.$$

Оскільки ліва і права частини тотожно рівні, то перемножимо многочлени, які стоять справа, і прирівняємо коефіцієнти при відповідних степенях x:

$$\begin{array}{l|l}
x^n & a_0=b_0 \\
x^{n-1} & a_1=b_1-ab_0 \\
x^{n-2} & a_2=b_2-ab_1 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
x^1 & a_{n-1}=b_{n-1}-ab_{n-2} \\
x^0 & a_n=R-ab_{n-1}
\end{array}$$

Знайдемо з цих рівностей коефіцієнти $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ і остачу R:

$$b_0 = a_0,\ b_1 = ab_0 + a_1,\ b_2 = ab_1 + a_2,\ \ldots,\ b_{n-1} = ab_{n-2} + a_{n-1},\ R = ab_{n-1} + a_n.$$

Як бачимо, перший коефіцієнт неповної частки дорівнює першому коефіцієнту діленого, а решта коефіцієнтів неповної частки і остача знаходяться однаково: для того щоб знайти коефіцієнт b_{k+1} неповної частки, достатньо попередній знайдений коефіцієнт b_k помножити на a і додати k-й коефіцієнт діленого. Цю процедуру доцільно оформляти у вигляді спеціальної схеми-таблиці, яка називається *схемою Горнера*.

	a_0 $\oplus$	a_1 $\oplus$	a_2 $\oplus$	$\ldots$	a_{n-1} $\oplus$	a_n
a $\otimes$	$b_0 = a_0$	$b_1 = ab_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$	$\ldots$	b_{n-1}	R остача

Приклад 1 Розділіть за схемою Горнера $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 4x + 1$ на двочлен $x - 2$.

▶ Запишемо спочатку всі коефіцієнти многочлена $f(x)$ (якщо в многочлені пропущений степінь 2, то відповідний коефіцієнт вважаємо рівним 0), а потім знайдемо коефіцієнти неповної частки і остачу за вказаною схемою:

	3	−2	0	−4	1
2 $\otimes$	3 $\oplus$	4 $\oplus$	8 $\oplus$	12 $\oplus$	25 остача

Отже, $3x^4 - 2x^3 - 4x + 1 = (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 8x + 12) + 25$. ◁

Приклад 2 Перевірте, чи є $x = -3$ коренем многочлена

$$f(x) = 2x^4 + 6x^3 + 4x^2 - 2x - 42.$$

▶ За теоремою Безу остача від ділення многочлена $f(x)$ на $x - a$ дорівнює $f(a)$, тому знайдемо за допомогою схеми Горнера остачу від ділення $f(x)$ на $x - (-3) = x + 3$.

	2	6	4	−2	−42
−3	2	0	4	−14	0 (остача $= f(-3)$)

Оскільки $f(-3) = 0$, то $x = -3$ — корінь многочлена $f(x)$. ◁

Вправи

1. Використовуючи схему Горнера, знайдіть неповну частку і остачу від ділення многочлена $A(x)$ на двочлен $B(x)$:
1) $A(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $B(x) = x + 1$;

2) $A(x) = 5x^3 - 26x^2 + 25x - 4$; $B(x) = x - 5$;
3) $A(x) = x^3 - 15x^2 + 10x + 24$; $B(x) = x + 3$.

2. Використовуючи схему Горнера, перевірте, чи ділиться многочлен $f(x)$ на двочлен $q(x)$:
1) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 27x - 18$; $q(x) = x + 2$;
2) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$; $q(x) = x - 2$.

3. Розділіть многочлен $A(x)$ на двочлен $B(x)$:
1) $A(x) = 2x^3 - 19x^2 + 32x + 21$; $B(x) = x - 7$;
2) $A(x) = 4x^3 - 24x^2 + 21x - 5$; $B(x) = 2x - 1$.

10.5. ЗНАХОДЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ КОРЕНІВ МНОГОЧЛЕНА З ЦІЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Теорема 4. ***Якщо многочлен з цілими коефіцієнтами*** $f(x) = a_n x^n + + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ***має раціональний корінь*** $x = \frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$***, то*** p ***є дільником вільного члена*** (a_0)***, а*** q ***— дільником коефіцієнта при старшому члені*** a_n.

Якщо $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена $f(x)$, то $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$. Підставляємо $\frac{p}{q}$ замість x у $f(x)$ і з останньої рівності маємо

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1}\frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0. \qquad (1)$$

Помножимо обидві частини рівності (1) на q^n $(q \neq 0)$. Одержуємо

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0. \qquad (2)$$

У рівності (2) всі доданки, окрім останнього, діляться на p. Тому $a_0 q^n = -(a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1})$ ділиться на p.

Але коли ми записуємо раціональне число у вигляді $\frac{p}{q}$, то цей дріб вважається нескоротним, тобто p і q не мають спільних дільників. Добуток $a_0 q^n$ може ділитися на p (коли p і q — взаємно прості числа) тільки тоді, коли a_0 ділиться на p. Тобто p — дільник вільного члена a_0.
Аналогічно всі доданки рівності (2), крім першого, діляться на q. Тоді $a_n p^n = -(a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n)$ ділиться на q. Оскільки p і q взаємно прості числа, то a_n ділиться на q, тобто q — дільник коефіцієнта при старшому члені. ○

Відзначимо два наслідки з цієї теореми. Якщо взяти $q = 1$, то коренем многочлена буде ціле число p — дільник a_0. Отже, має місце:

Наслідок 1. ***Будь-який цілий корінь многочлена з цілими коефіцієнтами є дільником його вільного члена.***

Якщо в заданому многочлені $f(x)$ $a_n = 1$, то дільниками a_n можуть бути тільки числа ± 1, тобто в цьому випадку $q = \pm 1$, і має місце:

Наслідок 2. ***Якщо коефіцієнт при старшому члені рівняння з цілими коефіцієнтами дорівнює 1, то всі раціональні корені цього рівняння (якщо вони існують) — цілі числа.***

Приклад 1 Знайдіть раціональні корені многочлена $2x^3 - x^2 + 12x - 6$.

▶ Нехай нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ є коренем многочлена. Тоді p необхідно шукати серед дільників вільного члена, тобто серед чисел $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$, а q — серед дільників старшого коефіцієнта: $\pm 1, \pm 2$.
Таким чином, раціональні корені многочлена потрібно шукати серед чисел $\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Перевіряти, чи є дане число коренем многочлена, доцільно за допомогою схеми Горнера. При $x = \frac{1}{2}$ маємо таблицю.

	2	−1	12	−6
$\frac{1}{2}$	2	0	12	0

Крім того, за схемою Горнера можна записати, що

$$2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 12).$$

Многочлен $2x^2 + 12$ не має дійсних коренів (а тим більше раціональних), тому заданий многочлен має єдиний раціональний корінь $x = \frac{1}{2}$. ◁

Приклад 2 Розкладіть многочлен $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x - 2$ на множники.

▶ Шукаємо цілі корені многочлена серед дільників вільного члена: $\pm 1, \pm 2$. Підходить 1. Ділимо $P(x)$ на $x - 1$ за допомогою схеми Горнера.

	2	3	−2	−1	−2
1	2	5	3	2	0

Тоді $P(x) = (x - 1)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$. Шукаємо цілі корені кубічного многочлена $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ серед дільників його вільного члена: $\pm 1, \pm 2$. Підходить (-2). Ділимо на $x + 2$.

	2	5	3	2
−2	2	1	1	0

Маємо

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1).$$

Квадратний тричлен $2x^2 + x + 1$ не має дійсних коренів і на лінійні множники не розкладається.

Відповідь: $P(x) = (x - 1)(x + 2)(2x^2 + x + 1)$. ◁

Зазначимо, що в множині дійсних чисел не завжди можна знайти всі корені многочлена (наприклад, уже квадратний тричлен x^2+x+1 не має дійсних коренів). Таким чином, многочлен n-го степеня не завжди можна розкласти в добуток лінійних множників. Але виявляється, що многочлен непарного степеня завжди можна розкласти в добуток лінійних і квадратних множників, а многочлен парного степеня завжди можна розкласти в добуток квадратних тричленів.

Наприклад, многочлен четвертого степеня розкладається в добуток двох квадратних тричленів. Для знаходження коефіцієнтів цього розкладу іноді можна використовувати метод невизначених коефіцієнтів.

Приклад 3 Розкладіть на множники многочлен $x^4+x^3+3x^2+x+6$.

▶ Спроба знайти раціональні корені нічого не дає — многочлен не має раціональних (цілих) коренів.

Спробуємо знайти розклад цього многочлена в добуток двох квадратних тричленів. Оскільки старший коефіцієнт многочлена дорівнює 1, то й у квадратних тричленах візьмемо старші коефіцієнти рівними 1. Тобто шукатимемо розклад нашого многочлена у вигляді:

$$x^4+x^3+3x^2+x+6=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d), \qquad (3)$$

де a, b, c і d — якісь невизначені (поки що) коефіцієнти.

Многочлени, що стоять у лівій і правій частинах цієї рівності, тотожно рівні, тому коефіцієнти при однакових степенях x у них однакові. Розкриємо дужки в правій частині рівності і прирівняємо відповідні коефіцієнти. Це зручно записати так:

$$\begin{aligned} x^4+x^3+3x^2+x+6=x^4&+cx^3+dx^2+\\ &+ax^3+acx^2+adx+\\ &+bx^2+bcx+bd.\end{aligned}$$

Одержуємо систему:

$$\left.\begin{array}{c|l} x^4 & 1=1,\\ x^3 & 1=a+c,\\ x^2 & 3=ac+b+d,\\ x^1 & 1=bc+ad,\\ x^0 & 6=bd. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Спроба розв'язати цю систему методом підстановки приводить до рівняння 4-го степеня, тому спробуємо розв'язати систему (4) у цілих числах. З останньої рівності системи (4) одержуємо, що b і d можуть бути тільки дільниками числа 6. Усі можливі варіанти запишемо в таблицю.

b	1	−1	2	−2
d	6	−6	3	−3

Коефіцієнти b і d в рівності (3) рівноправні, тому ми не розглядаємо випадки $b=6$ і $d=1$ або $b=-6$ і $d=-1$ і т. д.

Для кожної пари значень b і d з третьої рівності системи (4) знайдемо ac: $ac = 3 - (b + d)$, а з другої рівності $a + c = 1$.
Знаючи $a + c$ і ac, за теоремою, оберненою до теореми Вієта, знаходимо a і c як корені квадратного рівняння. Коли знайдемо всі числа a, b, c, d, то четверта рівність системи (4) $bc + ad = 1$ дозволяє вибрати ті числа, які є розв'язками системи (4). Зручно ці міркування оформити у вигляді таблиці:

<table>
<tr><td>b</td><td>1</td><td>−1</td><td colspan="2">2</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>d</td><td>6</td><td>−6</td><td colspan="2">3</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>$a + c = 1$</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="2">1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$ac = 3 - (b + d)$</td><td>−4</td><td>10</td><td colspan="2">−2</td><td>8</td></tr>
<tr><td>a</td><td>неціле</td><td>не існує</td><td>2</td><td>−1</td><td>не існує</td></tr>
<tr><td>c</td><td>неціле</td><td>не існує</td><td>−1</td><td>2</td><td>не існує</td></tr>
<tr><td>$bc + ad = 1$</td><td>–</td><td>–</td><td>$bc + ad = 4$
$4 \neq 1$</td><td>$bc + ad = 1$
$1 = 1$</td><td>–</td></tr>
</table>

Як бачимо, системі (4) задовольняє набір цілих чисел $a = -1$, $b = 2$, $c = 2$, $d = 3$. Тоді рівність (3) має вигляд

$$x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 6 = (x^2 - x + 2)(x^2 + 2x + 3). \qquad (5)$$

Оскільки квадратні тричлени $x^2 - x + 2$ і $x^2 + 2x + 3$ не мають не тільки раціональних, але й дійсних коренів, то рівність (5) дає остаточну відповідь. ◁

Вправи

1. Знайдіть цілі корені многочлена:
1) $x^3 - 5x + 4$; 2) $2x^3 + x^2 - 13x + 6$;
3) $5x^3 + 18x^2 - 10x - 8$; 4) $4x^4 - 11x^2 + 9x - 2$.

2. Знайдіть раціональні корені рівняння:
1) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$; 2) $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$;
3) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$; 4) $3x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 7x - 2 = 0$.

3. Розкладіть многочлен на множники:
1) $2x^3 - x^2 - 5x - 2$; 2) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15$;
3) $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$; 4) $x^4 - 2x^3 - 24x^2 + 50x - 25$.

4. Знайдіть дійсні корені рівняння:
1) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$; 2) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
3) $2x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2 = 0$; 4) $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$.

5*. Розкладіть многочлен на множники методом невизначених коефіцієнтів:
1) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 13x - 6$; 2) $x^4 - 4x^3 - 20x^2 + 13x - 2$.

6*. Розкладіть многочлен на множники, заздалегідь записавши його за допомогою методу невизначених коефіцієнтів у вигляді $(x^2 + bx + c)^2 - (mx + n)^2$:
1) $x^4 + 4x - 1$; 2) $x^4 - 4x^3 - 1$; 3) $x^4 + 4a^3x - a^4$.

§11 ДОДАТКОВІ ФОРМУЛИ ТРИГОНОМЕТРІЇ

11.1. ФОРМУЛИ ПОТРІЙНОГО ТА ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТІВ. ВИРАЖЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЧЕРЕЗ ТАНГЕНС ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТУ

Таблиця 23

1. Формули потрійного аргументу	
$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$	$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,3\alpha = \dfrac{3\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{6}(2k+1),\ k \in Z$	$\mathrm{ctg}\,3\alpha = \dfrac{3\,\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}^3\alpha}{1 - 3\,\mathrm{ctg}^2\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi k}{3},\ k \in Z$
2. Формули пониження степеня	
$\sin^2\alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2\alpha = \dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}$
3. Формули половинного аргументу	
(Знак перед коренем вибирається залежно від знака тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.)	
$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{2}}$	$\cos\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{2}}$
$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	$\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha},\ \alpha \neq 2\pi k,\ k \in Z$	$\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$
4. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу	
$\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	$\cos\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z,\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	
$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}},\ \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$	

Пояснення й обґрунтування

1. Формули потрійного аргументу. Використовуючи формули додавання, формули подвійного аргументу, основну тригонометричну тотожність і формулу $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, одержуємо такі формули:

$$\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha+\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha+$$
$$+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=2\sin\alpha\cdot(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha=$$
$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$ Отже,

$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}.$$

$$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha=$$
$$=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=$$
$$=(2\cos^2\alpha-1)\cdot\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cdot\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$ Отже,

$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}.$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.$$ Отже,

$$\boxed{\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}3\alpha}=\frac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}=\frac{1-\frac{3}{\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\frac{3}{\operatorname{ctg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{ctg}^3\alpha}}=\frac{(\operatorname{ctg}^2\alpha-3)\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$

Отже,
$$\boxed{\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

З а у в а ж е н н я. Функції $\sin 3\alpha$ і $\cos 3\alpha$ існують при будь-яких значеннях α, а $\operatorname{tg}3\alpha$ існує тільки тоді, коли $3\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k\in\boldsymbol{Z}$. Тобто $\alpha\neq\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$, отже, $\alpha\neq\frac{\pi}{6}(2k+1)$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Аналогічно $\operatorname{ctg}3\alpha$ існує тільки тоді, коли $3\alpha\neq\pi k$, де $k\in\boldsymbol{Z}$. Тоді $\alpha\neq\frac{\pi k}{3}$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

2. Формули пониження степеня. З формул $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ та $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ одержуємо формули пониження степеня:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\qquad(1)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.\qquad(2)$$

3. Формули половинного аргументу. Якщо у формулах (1) і (2) замість α взяти аргумент $\frac{\alpha}{2}$, то одержимо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}, \qquad (3)$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2} \qquad (4)$$

З формул (3) і (4) одержуємо формули половинного аргументу для синуса і косинуса:

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}, \qquad (5)$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}. \qquad (6)$$

У цих формулах знак перед коренем вибирається залежно від знаку тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.

Якщо почленно розділити формули (5) і (6) і врахувати, що $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, а $\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, то одержуємо:

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}, \qquad (7)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}}. \qquad (8)$$

У формулах (7) і (8) знак перед коренем також вибирається залежно від знаку тригонометричної функції, що стоїть у лівій частині рівності.

Зазначимо, що формули (5) і (6) можна використовувати при будь-яких значеннях α, а формули (7) і (8) тільки тоді, коли існують значення $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ та $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ відповідно. Отже, формулу (7) можна використовувати, якщо $\frac{\alpha}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, тобто $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, а формулу (8) — якщо $\frac{\alpha}{2}\neq\pi k$, тобто $\alpha\neq 2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Зауважимо, що для тангенса і котангенса половинного аргументу можна одержати формули, які не містять квадратних коренів. Наприклад,

$$\boxed{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}}. \qquad (9)$$

Дійсно, якщо врахувати, що аргумент α вдвічі більший за аргумент $\frac{\alpha}{2}$, то $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $1+\cos\alpha\neq 0$, тобто формулу (9) можна використовувати при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Аналогічно обґрунтовується формула

$$\boxed{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}. \qquad (10)$$

$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha\neq 0$, тобто формулу (10) можна використовувати при $\alpha\neq\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

Враховуючи, що $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}$, одержуємо формули:

$$\boxed{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}}, \qquad \boxed{\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}}.$$

4. Вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. Щоб одержати відповідні формули для $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ запишемо кожен з цих виразів за формулами подвійного аргументу і поділимо на $1=\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Потім, щоб перейти до тангенсів, поділимо чисельник і знаменник одержаного дробу на $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ (звичайно, за умови, що $\cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$, тобто при $\alpha\neq\pi+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$).

$$\sin\alpha=\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+1}=\frac{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$ Отже,

$$\boxed{\sin\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}}. \qquad (11)$$

$$\cos\alpha=\frac{\cos\alpha}{1}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}+1}.$$ Отже,

$$\boxed{\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}}. \qquad (12)$$

Якщо почленно поділити рівності (11) і (12), то одержимо формули:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\ \alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}}, \qquad (13)$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}},\quad \alpha \neq \pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}}.$$

Зауважимо, що формулу (13) можна одержати і за формулою тангенса подвійного аргументу, оскільки $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором: 1) $\sin 15^\circ$; 2) $\cos 15^\circ$; 3) $\operatorname{tg} 15^\circ$.

Розв'язання

1) ▶ $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; ◁

2) ▶ $\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; ◁

3) ▶ $\operatorname{tg}15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$. ◁

Коментар

Оскільки аргумент 15° становить половину від аргументу 30°, а косинус 30° нам відомий, то можна знайти шукані значення за формулами половинного аргументу. Враховуючи, що аргумент 15° знаходиться в I чверті (де значення всіх тригонометричних функцій додатні), у формулах (5) і (6) перед знаком квадратного кореня вибирається знак «+». Для знаходження тангенса 15° можна використати будь-яку з формул (7), (9) або (10), але зручніше використати формули (9) або (10), запис яких не містить квадратних коренів. Також після знаходження $\sin 15^\circ$ і $\cos 15^\circ$ можна використати формулу

$$\operatorname{tg}15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}.$$

З а у в а ж е н н я. Записи відповідей для $\sin 15^\circ$ і $\cos 15^\circ$ можна дещо спростити, виділяючи під знаком зовнішнього квадратного кореня квадрат двочлена. Щоб подати, наприклад, $2-\sqrt{3}$ у вигляді квадрата двочлена, помножимо і поділимо цей вираз на 2 (та розглянемо вираз $2\sqrt{3}$ як подвоєний добуток чисел $\sqrt{3}$ і 1). Одержуємо:

$$2-\sqrt{3}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2},\ 2+\sqrt{3}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{2}.$$

Тоді $\sin 15^\circ=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Виконуючи аналогічні перетворення, маємо $\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Запитання для контролю

1. Запишіть формули потрійного та половинного аргументів і формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу. Проілюструйте на прикладах застосування цих формул.
2. Обґрунтуйте формули потрійного та половинного аргументів і формули вираження тригонометричних функцій через тангенс половинного аргументу.

Вправи

1. Обчисліть, не користуючись таблицями і калькулятором:
1) $\sin 22^\circ 30'$; 2) $\cos 22^\circ 30'$; 3) $\operatorname{tg} 22^\circ 30'$.

2. Знайдіть $\sin\dfrac{\alpha}{2}$; $\cos\dfrac{\alpha}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, якщо:

1) $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

3. Обчисліть $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$, якщо $\cos 2\alpha=\dfrac{1}{3}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{5\pi}{4}$.

4. Обчисліть $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha=-\dfrac{12}{13}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

5. Обчисліть $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$.

6. Обчисліть $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

7. Обчисліть $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos 2\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=2$.

8. Враховуючи, що $\sin 36^\circ=\cos 54^\circ$, обчисліть $\sin 18^\circ$.

11.2. ФОРМУЛА ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ $a \sin \alpha + b \cos \alpha$

Таблиця 24

$$\boxed{a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi)},$$

де аргумент φ визначається із співвідношень

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Пояснення й обґрунтування

Спочатку доведемо таке твердження: *якщо для чисел m і n виконується співвідношення $m^2+n^2=1$, то одне з цих чисел можна вважати синусом, а друге косинусом деякого аргументу φ.*

Розглянемо точку M координатної площини з координатами $M\ (m;\ n)$. Координати точки M задовольняють рівнянню одиничного кола: $x^2+y^2=1$ (оскільки за умовою $m^2+n^2=1$). Отже, точка M знаходиться на одиничному колі, і її абсциса є косинусом кута φ, який утворює радіус OM з додатним напрямком осі Ox, а ордината — синусом цього кута φ. Тобто $m=\cos\varphi$, $n=\sin\varphi$.

Якщо взяти $m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, то $m^2+n^2=\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2}=1$. Тоді

для деякого кута φ $\quad m=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi, \quad n=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi.$

Тепер ми можемо довести формулу $a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$. Для цього доведемо, що права частина цієї формули дорівнює лівій.

$$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)=\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin\alpha\cos\varphi+\cos\alpha\sin\varphi)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\alpha\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\alpha\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=a\sin\alpha+b\cos\alpha,$$

що й потрібно було довести. Отже,

$$\boldsymbol{a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)},$$

де аргумент φ визначається із співвідношень:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Зауваження. В одержаній формулі аргумент φ визначається з точністю до 2π, але найчастіше вибирають те значення, яке найменше за модулем.

Наприклад, для виразу $\sin\alpha+\cos\alpha$ маємо $a=1$, $b=1$. Тоді

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, аргумент φ знаходиться в I чверті і як значення φ можна вибрати $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Тоді

$$\boxed{\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть найбільше та найменше значення виразу $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

Розв'язання

► За формулою

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$$

одержуємо

$$\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Враховуючи, що $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;\ 1]$, маємо, що $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $[-2;\ 2]$. Отже, найбільше значення заданого виразу дорівнює 2, а найменше — (-2). ◁

Коментар

Вираз $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$ можна перетворити за формулою

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi).$$

Тут $a=\sqrt{3}$, $b=-1$, тоді $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4}=2$. Отже,

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Тоді аргумент φ знаходиться в IV чверті, і як значення φ можна вибрати, наприклад, $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. *Використовуючи метод оцінки для знаходження найбільшого та найменшого значень виразу, враховуємо, що необхідно не тільки оцінити значення виразу за допомогою нестрогих нерівностей* $\left(-2\leqslant 2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 2\right)$, *а й впевнитися, що знак рівності в цих нерівностях досягається.*

Приклад 2 Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

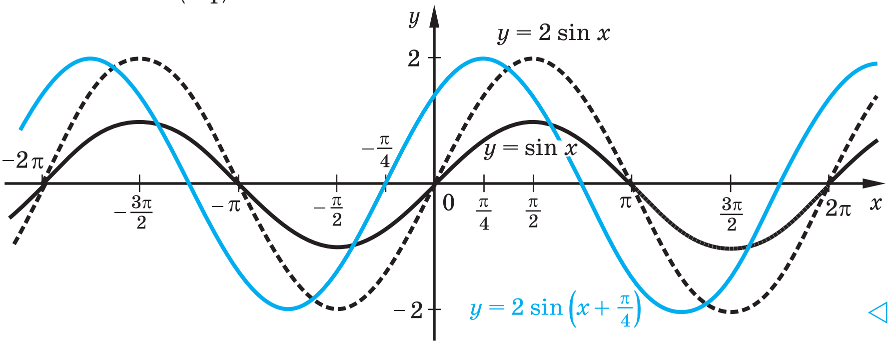
Коментар

Вираз $\sin x+\cos x$ можна записати у вигляді $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$. Тоді графік заданої функції можна побудувати за допомогою геометричних перетворень графіка функції $y=\sin x$.

Розв'язання

▶ $y=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Графік заданої функції одержуємо з графіка функції $y=\sin x$ розтягуванням у 2 рази вздовж осі Oy і паралельним перенесенням отриманого графіка вздовж осі Ox на $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.



◁

Запитання для контролю

1. Запишіть формулу перетворення виразу $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ на вираз вигляду $c\sin(x+\varphi)$. Проілюструйте на прикладі застосування цієї формули.
2. Обґрунтуйте формулу перетворення виразу $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ на вираз вигляду $c\sin(x+\varphi)$.

Вправи

1. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha$; 2) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$;

3) $\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$; 4) $\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{6}\cos\alpha$.

2. Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$; 2) $y=\sin 2x-\cos 2x$;

3) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$; 4) $y=\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}$.

3. Знайдіть область значень функції:

1) $y=3\sin x+4\cos x$; 2) $y=5\sin 3x-12\cos 3x$;

3) $y=\sin 7x-\cos 7x$; 4) $y=8\sin\frac{x}{3}+15\cos\frac{x}{3}$.

4. Чи існують такі значення x, при яких виконується рівність:

1) $3\sin x-4\cos x=6$; 2) $5\sin 2x+12\cos 2x=15$;

3) $\sqrt{3}\sin 4x-\cos 4x=\sqrt{5}$; 4) $\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=1{,}5$?

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

Спростіть вираз **(1–2)**.

1. 1) $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\,\alpha\,\sin^2\alpha$; 2) $\sqrt{\sin^2\beta(1+\mathrm{ctg}\beta)+\cos^2\beta(1+\mathrm{tg}\beta)}$;

3) $(3\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2$; 4) $\dfrac{\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin^2\beta} - \mathrm{ctg}\,\beta\cos\beta$.

2. 1) $2\,\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}(\alpha-\pi) + \mathrm{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} - \dfrac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{ctg}\,\alpha} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\mathrm{tg}(\pi-\beta)\cos(\pi-\beta)\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$. 4) $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin\dfrac{3\pi}{2}\sin\dfrac{16\pi}{9}\cos\dfrac{13\pi}{18}}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\cos\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{11\pi}{9}\cos 2\pi}$.

Доведіть тотожність **(3–4)**.

3. 1) $\dfrac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta) - \mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}(\alpha+\beta)} = \mathrm{tg}\,\beta$; 2) $\dfrac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$;

3) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)} = \mathrm{ctg}\,\alpha$; 4) $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha} = -\mathrm{ctg}\,2\alpha$.

4. 1) $\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos\alpha}} = \cos\dfrac{\alpha}{4}$ при $\pi < \alpha < 2\pi$;

2) $\sqrt{1-\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$ при $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 2\alpha}} = -\cos\dfrac{\alpha}{2}$ при $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

4) $\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos\alpha}} = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{4}\right)$ при $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

5. Доведіть рівність:

1) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7} = \dfrac{1}{8}$; 2) $\mathrm{tg}\,20^\circ - 4\sin 20^\circ\sin 50^\circ = -2\sin 20^\circ$;

3) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - 4\sin 70^\circ = 2$; 4) $\cos 20^\circ + 2\sin 55^\circ - \sqrt{2}\sin 65^\circ = 1$.

6. Доведіть, що правильна нерівність:

1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$, якщо $0 < x < \frac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{12}-\frac{\alpha}{4}\right)} + 2\sin\frac{\alpha}{2} \leqslant 2\sqrt{3}$;

3) $(1+\sin\varphi+\cos\varphi)(1-\sin\varphi+\cos\varphi)(1+\sin\varphi-\cos\varphi)(\sin\varphi+\cos\varphi-1) \leqslant 1$;
4) $2\sin 4\alpha \sin 2\alpha + \cos 6\alpha \geqslant -1$.

7. Обчисліть:

1) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha$, якщо $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = m$;

3) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$;

4) $\sin\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, якщо $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Слово «тригонометрія» вперше зустрічається (1505 р.) у назві книжки німецького теолога і математика Питискуса. Походження цього слова грецьке: «тригонон» — трикутник, «метріо» — міра. Іншими словами, тригонометрія — наука про вимірювання трикутників. Багато понять і фактів, які тепер відносять до тригонометрії, були відомі ще дві тисячі років тому. Фактично різні відношення відрізків трикутника і кола (власне кажучи, і тригонометричні функції) зустрічаються вже в III ст. до н. е. в працях великих математиків Стародавньої Греції — Евкліда та Архімеда.

Довгий час тригонометрія розвивалася як частина геометрії, тобто факти, які ми тепер формулюємо в термінах тригонометричних функцій, формулювали і доводили за допомогою геометричних понять і тверджень. Мабуть, найбільші стимули для розвитку тригонометрії виникали у зв'язку з розв'язуванням задач астрономії, що становило великий практичний інтерес (наприклад, для розв'язування задач на визначення місцезнаходження судна, передбачення затемнень тощо). Сучасного вигляду тригонометрії надав великий математик XVIII ст. Л. Ейлер (1707—1783), швейцарець за походженням, який довго працював у Росії і був членом Петербурзької академії наук. Саме Ейлер перший увів відомі означення тригонометричних функцій, почав розглядати функції довільного кута, вивів формули зведення. Після Ейлера тригонометрія набрала форми числення: різні факти почали доводити формальним застосуванням формул тригонометрії, доведення стали набагато компактнішими.

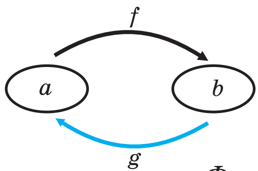
Розділ 2
Тригонометричні рівняння і нерівності

§ 12 ОБЕРНЕНА ФУНКЦІЯ

Таблиця 25

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття оберненої функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Якщо функція $y = f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення, то можна задати функцію $y = g(x)$, яка називається *оберненою до функції* $y = f(x)$:

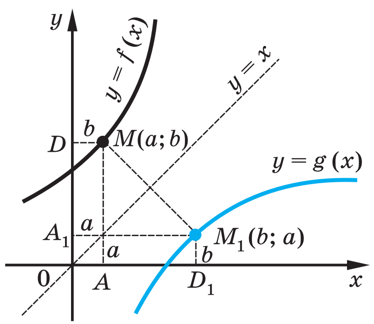


для кожного $a \in D(f)$, якщо $f(a) = b$, то $g(b) = a$

$E(f) = D(g);\ D(f) = E(g)$

Функції $f(x)$ і $g(x)$ взаємно обернені.

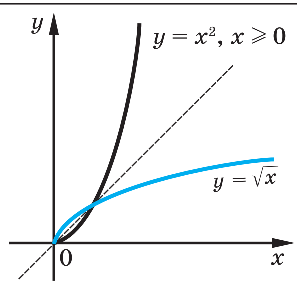
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Властивості оберненої функції</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

1) Графіки прямої і оберненої функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

</td></tr>
<tr><td>



</td><td>

2) Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає.

</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 25

<table>
<tr><th colspan="2">3. Практичний прийом знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$</th></tr>
<tr><th>Алгоритм</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>1. З'ясувати, чи буде функція $y = f(x)$ оборотною на всій області визначення: для цього досить з'ясувати, чи має рівняння $y = f(x)$ єдиний корінь відносно змінної x.
Якщо ні, то виділити (якщо можливо) проміжок, де існує обернена функція (наприклад, це може бути проміжок, де функція $y = f(x)$ зростає або спадає).
2. З рівності $y = f(x)$ виразити x через y.
3. В одержаній формулі ввести традиційні позначення — аргумент позначити через x, а функцію — через y.</td><td>Знайдіть функцію, обернену до функції $y = 2x + 4$.
▶ З рівності $y = 2x + 4$ можна однозначно виразити x через y:
$$x = \frac{1}{2}y - 2.$$
Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x.
Позначимо в одержаній формулі аргумент через x, а функцію — через y.
Маємо функцію $y = \frac{1}{2}x - 2$, обернену до функції $y = 2x + 4$. ◁</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. **Поняття оберненої функції.** Відомо, що залежність шляху від часу руху тіла, яке рухається рівномірно з постійною швидкістю v_0, виражається формулою $S = v_0 t$. З цієї формули можна знайти обернену залежність — часу від пройденого шляху $t = \frac{S}{v_0}$. Функцію $t(S) = \frac{S}{v_0}$ називають *оберненою до функції* $S(t) = v_0 t$. Зазначимо, що в розглянутому прикладі кожному значенню t ($t \geqslant 0$) відповідає єдине значення S, і, навпаки, кожному значенню S ($S \geqslant 0$) відповідає єдине значення t.

Розглянемо процедуру одержання оберненої функції в загальному вигляді.

Нехай функція $f(x)$ набуває кожного свого значення в єдиній точці її області визначення (така функція називається *оборотною*). Тоді для кожного числа $y_0 = b$ (з області значень функції $f(x)$) існує єдине значення $x_0 = a$, таке, що $f(a) = b$. Розглянемо нову функцію $g(x)$, яка кожному числу b з області значень функції $f(x)$ ставить у відповідність число a, тобто $g(b) = a$ для кожного b з області значень функції $f(x)$. У цьому випадку функція $g(x)$ нази-

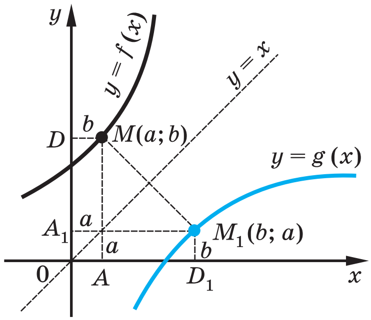


Рис. 84

вається оберненою до функції $f(x)$, а функція $f(x)$ — оберненою до функції $g(x)$.

З означення оберненої функції випливає, що область значень прямої функції $E(f)$ є областю визначення оберненої функції $D(g)$, а область визначення прямої функції $D(f)$ є областю значень оберненої функції $E(g)$.

Тобто:

$$\boldsymbol{E(f) = D(g), \quad D(f) = E(g).}$$

2. Властивості оберненої функції.

Властивість 1. ***Графіки прямої і оберненої функції симетричні відносно прямої $y = x$.***

Враховуючи наведену вище процедуру побудови функції, оберненої до функції $y = f(x)$, маємо: якщо $f(a) = b$, то за означенням графіка функції точка M з координатами $(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Аналогічно, оскільки $g(b) = a$, то точка M_1 з координатами $(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$. Точки $M(a; b)$ і $M_1(b; a)$ розміщені на координатній площині симетрично відносно прямої $y = x$ (рис. 84).

Дійсно, пряма $y = x$ є віссю симетрії системи координат. Отже, при симетрії відносно прямої $y = x$ вісь Ox відображається на вісь Oy, а вісь Oy — на вісь Ox. Тоді (наприклад, при $a > 0$ і $b > 0$) прямокутник $OAMD$ із сторонами $OA = a$ і $OD = b$ на осях координат відображається на прямокутник $OA_1M_1D_1$ із сторонами на осях координат, у якого $OA_1 = OA = a$ і $OD_1 = OD = b$. Таким чином, при симетрії відносно прямої $y = x$ точка $M(a; b)$ відображається в точку $M_1(b; a)$ (а точка M_1 — у точку M). Отже, при симетрії відносно прямої $y = x$ будь-яка точка $M(a; b)$, що належить графіку функції $y = f(x)$, має відповідну точку $M_1(b; a)$, що належить графіку функції $y = g(x)$, а будь-яка точка $M_1(b; a)$, що належить графіку функції $y = g(x)$, має відповідну точку $M(a; b)$, що належить графіку функції $y = f(x)$. Тобто графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Властивість 2. ***Якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то вона має обернену функцію на цьому проміжку, яка зростає, якщо $f(x)$ зростає, і спадає, якщо $f(x)$ спадає.***

Дійсно, якщо функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то за властивістю зростаючої (спадної) функції кожного свого значення вона набуває в єдиній точці з цього проміжку (с. 14), отже, вона має обернену функцію $g(x)$ на цьому проміжку. Обґрунтувати, що функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає, можна методом від супротивного.

Нехай числа a_1 і a_2 входять до області визначення функції $f(x)$ і

$$a_2 > a_1. \qquad (1)$$

Позначимо $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$. Якщо функція $f(x)$ зростає, то $f(a_2) > f(a_1)$, тобто $b_2 > b_1$. За означенням оберненої функції $g(x)$ числа b_1 і b_2 входять до її області визначення і

$$g(b_1) = a_1,\ g(b_2) = a_2. \qquad (2)$$

Якщо припустити, що функція $g(x)$ не є зростаючою, то з нерівності $b_2 > b_1$ не може випливати нерівність $g(b_2) > g(b_1)$ (інакше функція $g(x)$ буде зростаючою), отже, може виконуватися тільки нерівність $g(b_2) \leqslant g(b_1)$. Але тоді за формулами (2) одержуємо $a_2 \leqslant a_1$, що суперечить умові (1). Отже, наше припущення неправильне, і функція $g(x)$ зростає, якщо $f(x)$ зростає.

Аналогічно обґрунтовується, що у випадку, коли функція $f(x)$ спадає, обернена до неї функція $g(x)$ теж спадає. ○

3. Практичний прийом знаходження формули функції, оберненої до функції $y = f(x)$. З означення оберненої функції випливає, що для отримання оберненої залежності необхідно знати, як значення x виражається через значення y. Це можна зробити, розв'язавши рівняння $y = f(x)$ відносно змінної x. Якщо задана функція оборотна, то рівняння матиме єдиний розв'язок для всіх y з області значень функції $f(x)$, і ми одержимо формулу $x = g(y)$, яка задає обернену функцію. Але в цій формулі аргумент позначено через y, а функцію — через x. Якщо поміняти позначення на традиційні, то одержимо запис функції, оберненої до функції $y = f(x)$.

Ці міркування разом із відповідним алгоритмом наведено в таблиці 25 і реалізовано в наступних прикладах.

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1 Знайдіть функцію, обернену до функції $y = \frac{1}{x-1}$.

Розв'язання

▶ Область визначення: $x \neq 1$. Тоді з рівності $y = \frac{1}{x-1}$ маємо

$$xy - y = 1,\ xy = y + 1,\ x = \frac{y+1}{y}.$$

Позначаємо аргумент через x, а функцію — через y і одержуємо функцію $y = \frac{x+1}{x}$, обернену до заданої. ◁

Коментар

На всій області визначення ($x \neq 1$) задана функція оборотна, оскільки з рівняння $y = \frac{1}{x-1}$ можна однозначно виразити x через y ($y \neq 0$ на області значень заданої функції). Одержана формула $x = \frac{y+1}{y}$ задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

Приклад 2 Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$.

Розв'язання

▶ З рівності $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ одержуємо $x = \pm\sqrt{y}$. Тоді при $y > 0$ одному значенню y відповідають два значення x. Отже, на всій області визначення $x \in (-\infty; +\infty)$ функція $y = x^2$ не є оборотною, і для неї не можна знайти обернену функцію. ◁

Коментар

Область значень заданої функції: $y \geqslant 0$. Але при $y > 0$ з рівності $y = x^2$ не можна однозначно виразити x через y. Наприклад, при $y = 4$ одержуємо $x = \pm 2$. Через це ми не можемо значенню $y = 4$ поставити у відповідність єдине число, щоб побудувати обернену функцію.

Приклад 3 Знайдіть функцію, обернену до функції $y = x^2$ при $x \geqslant 0$.

Розв'язання

▶ З рівності $y = x^2$ при $y \geqslant 0$ одержуємо $x = \pm\sqrt{y}$. Враховуючи, що за умовою $x \geqslant 0$, маємо $x = \sqrt{y}$.

Позначимо аргумент через x, а функцію — через y і одержимо, що функцією, оберненою до функції $y = x^2$, яка задана тільки при $x \geqslant 0$, буде функція $y = \sqrt{x}$. ◁

Коментар

Множина значень заданої функції: $y \geqslant 0$. При $x \geqslant 0$ задана функція $y = x^2$ зростає, отже, на проміжку $x \geqslant 0$ вона має обернену функцію, а значить, на цьому проміжку рівняння $x^2 = y$ ми зможемо однозначно розв'язати: при $x \geqslant 0$ маємо $x = \sqrt{y}$.

Ця формула задає обернену функцію, але в ній аргумент позначено через y, а функцію — через x. Замінюючи позначення на традиційні, одержуємо кінцевий результат.

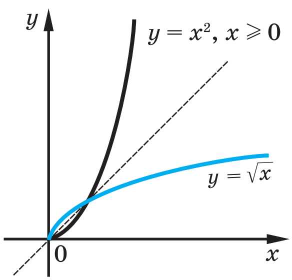


Рис. 85

З а у в а ж е н н я. У прикладах 2 і 3 ми фактично розглядаємо різні функції (вони мають різні області визначення), хоча в обох випадках ці функції задаються однією і тією самою формулою. Як відомо, графіком функції $y = x^2$ (приклад 2) є парабола, а графіком функції $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ (приклад 3) є тільки права вітка цієї параболи (рис. 85).

Запитання для контролю

1. За якої умови для заданої функції $y = f(x)$ можна побудувати обернену функцію?
2. Поясніть побудову графіка оберненої функції на прикладі функції $y = f(x)$, яка задана таблицею:

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	3	5	7

Задайте обернену функцію $y = g(x)$ за допомогою таблиці:

x				
$g(x)$				

3. Як розміщено графіки прямої і оберненої функцій, якщо вони побудовані в одній системі координат? Проілюструйте відповідну властивість графіків на прикладі.

4*. Обґрунтуйте взаємне розміщення графіків прямої і оберненої функцій.

5. Чи існує обернена функція до функції $y = x^2$, де $x \leqslant 0$? Поясніть це, спираючись на відповідні властивості оберненої функції. Якщо обернена функція існує, то задайте її формулою виду $y = g(x)$.

Вправи

1. Запишіть формулу, яка задає функцію $y = g(x)$, обернену до заданої. Укажіть область визначення і множину значень функції $g(x)$:

1°) $y = 3x - 6$; 2°) $y = -3x - 6$; 3) $y = \frac{2}{x}$; 4) $y = -\frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

2. На одному рисунку побудуйте графік даної функції і функції, оберненої до даної:

1°) $y = 2x$; 2°) $y = x - 2$; 3) $y = -\frac{1}{x}$; 4*) $y = \frac{1}{x-1}$; 5*) $y = \sqrt{x+1}$.

3. Знайдіть функцію, обернену до даної на заданому проміжку, і побудуйте на одному рисунку графік даної функції і функції, оберненої до неї:

1) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \geqslant 0$; 2) $y = \frac{1}{4}x^2$ при $x \leqslant 0$;

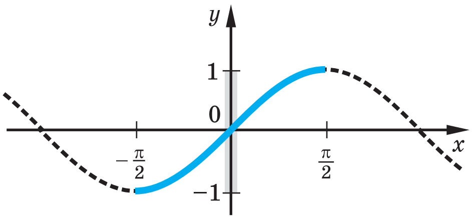
3) $y = (x - 2)^2$ при $x \geqslant 2$; 4) $y = x^2 - 2$ при $x \leqslant 0$.

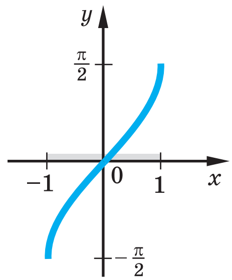
§ 13 ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Для одержання обернених тригонометричних функцій для кожної тригонометричної функції виділяється проміжок, на якому вона зростає (або спадає). Для позначення обернених тригонометричних функцій перед відповідною функцією ставиться буквосполучення «arc» (читається: «арк»).

13.1. ФУНКЦІЯ $y = \arcsin x$

Таблиця 26

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік</td></tr>
<tr><td>$y = \sin x$</td><td>$y = \arcsin x$</td></tr>
<tr><td>


На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\sin x$ зростає.</td><td>


</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Значення $\arcsin a$ $(|a| \leqslant 1)$</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>

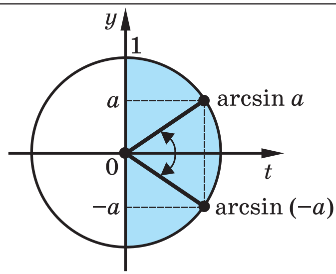
$\arcsin a$ — це таке число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

$$\arcsin a = \varphi, \text{ якщо } \begin{cases} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin \varphi = a \end{cases}$$

</td><td>

$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, оскільки

$\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Непарність функції $y = \arcsin x$</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$$

</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Графік функції $y = \arcsin x$. Функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і набуває всіх значень від -1 до 1. Отже, на цьому проміжку функція $y = \sin x$ має обернену функцію, яка позначається $y = \arcsin x$, з областю визначення $[-1; 1]$ і областю значень $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функція $y = \arcsin x$ теж зростає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \sin x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої $y = x$ (рис. 86).

2. Значення $\arcsin a$. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\sin \varphi = a$, то $\arcsin a = \varphi$, причому $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $|a| \leqslant 1$. Отже, запис $\arcsin a = \varphi$ ($|a| \leqslant 1$) означає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \varphi = a$, тобто

$\arcsin a$ — це таке число з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Аналогічно $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Непарність функції $y = \arcsin x$. Для знаходження арксинусів від'ємних чисел можна також користуватися непарністю функції $\arcsin x$, тобто формулою: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

● Це випливає з того, що графік функції $y = \arcsin x$ (рис. 86) симетричний відносно початку координат, а також з того, що точки a і $(-a)$ на осі Oy (рис. 87) симетричні відносно осі Ox. Тоді і відповідні точки A і B на оди-

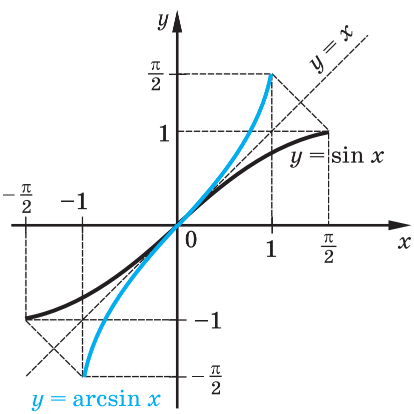


Рис. 86

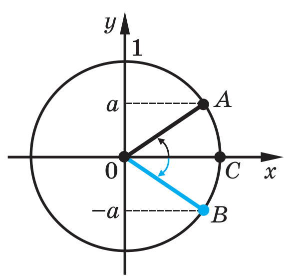


Рис. 87

ничному колі (у проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$) теж будуть симетричними відносно осі Ox. Отже, $\angle COA = \angle COB$. Але $\arcsin a = \angle COA$, а $\arcsin(-a) = -\angle COB$ (рисунок 87 наведено для випадку $a > 0$). Одержуємо

$$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}.$$

Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$.

Приклад Знайдіть: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Розв'язання

1) ▶ Нехай $\arcsin\frac{1}{3} = \varphi$, тоді за означенням арксинуса одержуємо, що

$$\sin\varphi = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$. ◁

2) ▶ Нехай $\arcsin\frac{3}{5} = \varphi$. За означенням арксинуса одержуємо, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. Враховуючи, що $\cos\varphi \geqslant 0$, маємо:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

Отже, $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \cos\varphi = \frac{4}{5}$. ◁

Коментар

1) Оскільки запис $\varphi = \arcsin a$ $(|a| \leqslant 1)$ означає, що $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = a$, то завжди виконується рівність

$$\boxed{\sin(\arcsin a) = a, \ |a| \leqslant 1}.$$

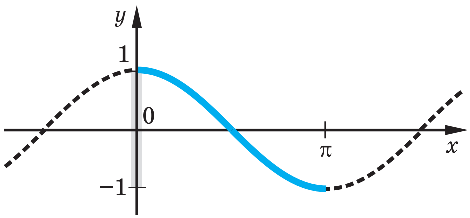
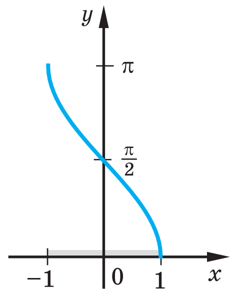
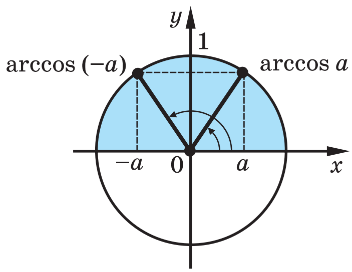
Але цю формулу можна не запам'ятовувати: досить *позначити вираз у дужках через* φ *і використати означення арксинуса.*

2) Якщо позначити вираз у дужках через φ, то за вимогою задачі потрібно знайти $\cos\varphi$. Використавши означення арксинуса, одержуємо стандартну задачу: знаючи синус кута, знайти його косинус, якщо кут знаходиться в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Тоді $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}$. Оскільки $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то в цьому проміжку $\cos\varphi \geqslant 0$, отже, $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi}$.

13.2. ФУНКЦІЯ $y = \arccos x$

Таблиця 27

1. Графік	
$y = \cos x$	$y = \arccos x$
 На проміжку $[0; \pi]$ $\cos x$ спадає.	
2. Значення $\arccos a$ $(\lvert a \rvert \leqslant 1)$	
Орієнтир	Приклад
$\arccos a$ — це таке число з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a. $\boxed{\arccos a = \varphi, \text{ якщо } \begin{cases} \varphi \in [0; \pi], \\ \cos\varphi = a \end{cases}}$	$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in [0;\ \pi]$ і $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. Формула для $\arccos(-a)$	
	$\boxed{\boldsymbol{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}}$

Пояснення й обґрунтування

1. **Графік функції $y = \arccos x$.** Функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0; \pi]$ і набуває всіх значень від 1 до −1. Отже, на цьому проміжку функція $y = \cos x$ має обернену функцію, яка позначається $y = \arccos x$, з областю визначення

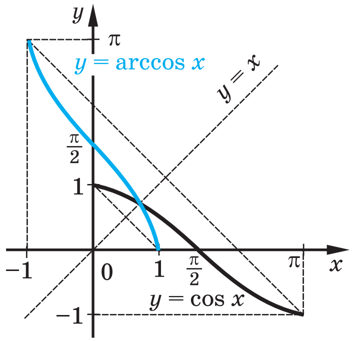


Рис. 88

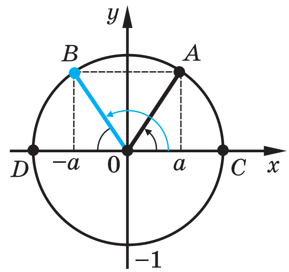


Рис. 89

$[-1; 1]$ і областю значень $[0; \pi]$. Функція $y = \arccos x$ теж спадає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \cos x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення його відносно прямої $y = x$ (рис. 88).

2. Значення arccos *a*. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\cos \varphi = a$, то $\arccos a = \varphi$, причому $\varphi \in [0; \pi]$ і $|a| \leqslant 1$. Отже, запис $\arccos a = \varphi$ $(|a| \leqslant 1)$ означає, що $\varphi \in [0; \pi]$ і $\cos \varphi = a$, тобто

***arccos a* — *це таке число з проміжку* $[0; \pi]$, *косинус якого дорівнює a*.**

Наприклад, $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ і $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Аналогічно $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, оскільки $\frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$ і $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Формула для arccos (−*a*). Для знаходження арккосинусів від'ємних чисел можна також користуватися формулою $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Це випливає з того, що точки a і $(-a)$ на осі Ox (рис. 89) є симетричними відносно осі Oy. Тоді і відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $[0; \pi]$) теж будуть симетричними відносно осі Oy. Отже, $\angle COA = \angle DOB$, значить, $\angle COB = \pi - \angle DOB = \pi - \angle COA$. Але $\arccos a = \angle COA$, а $\arccos(-a) = \angle COB = \pi - \angle COA$. Одержуємо

$$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}.$$

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos \frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

Зазначимо, що рівність $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$ означає, що функція $y = \arccos x$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад Знайдіть $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)$.

Р о з в ’ я з а н н я

▶ Нехай $\arccos\frac{2}{3}=\varphi$, тоді за означенням арккосинуса одержуємо, що $\cos\varphi=\frac{2}{3}$. Отже, $\cos\left(\arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$. ◁

К о м е н т а р

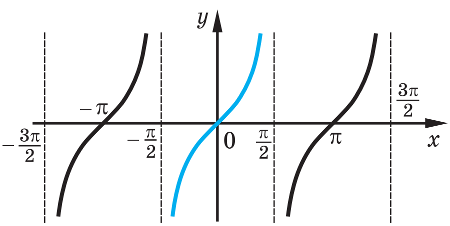
Оскільки запис $\varphi=\arccos a$ $(|a|\leqslant 1)$ означає, що $\varphi\in[0;\pi]$ і $\cos\varphi=a$, то завжди виконується рівність

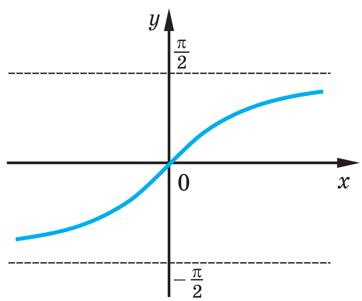
$$\boxed{\cos(\arccos a)=a,\ |a|\leqslant 1}.$$

Але цю формулу можна не запам’ятовувати: досить *позначити вираз у дужках через* φ *і використати означення арккосинуса*.

13.3. ФУНКЦІЯ $y=\operatorname{arctg} x$

Т а б л и ц я 28

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік</td></tr>
<tr><td>$y=\operatorname{tg} x$</td><td>$y=\operatorname{arctg} x$</td></tr>
<tr><td>

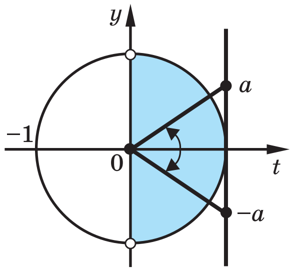
На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $\operatorname{tg} x$ зростає.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Значення $\operatorname{arctg} a$</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>**$\operatorname{arctg} a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.**

$$\boxed{\operatorname{arctg} a=\varphi,\ \text{якщо}\ \begin{cases}\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right),\\ \operatorname{tg}\varphi=a\end{cases}}$$</td><td>$\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, оскільки

$\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 28

3. Непарність функції $y = \operatorname{arctg} x$



$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$$

Пояснення й обґрунтування

1. Графік функції $y = \operatorname{arctg} x$. Функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, на цьому проміжку функція $y = \operatorname{tg} x$ має обернену функцію, яка позначається $y = \operatorname{arctg} x$, з областю визначення $(-\infty; +\infty)$ і множиною значень $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функція $y = \operatorname{arctg} x$ теж зростає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої $y = x$ (рис. 90).

2. Значення $\operatorname{arctg} a$. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\operatorname{tg} \varphi = a$, то $\operatorname{arctg} a = \varphi$, причому $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Отже, запис $\operatorname{arctg} a = \varphi$ означає, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} \varphi = a$. Тобто

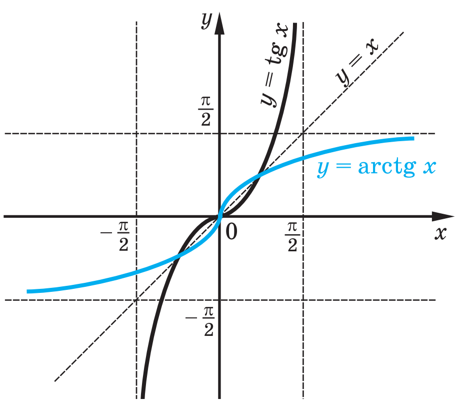


Рис. 90

$\operatorname{arctg} a$ — це таке число з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

Наприклад, $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Аналогічно $\operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

3. Непарність функції $y = \operatorname{arctg} x$. Для знаходження арктангенсів від'ємних чисел можна також користуватися непарністю функції $\operatorname{arctg} x$, тобто формулою $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

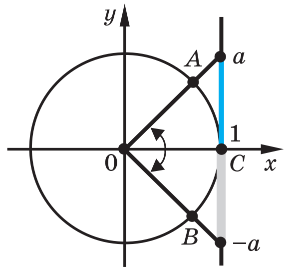


Рис. 91

Це випливає з того, що графік функції $y = \operatorname{arctg} x$ (рис. 90) симетричний відносно початку координат, а також з того, що точки a і $(-a)$ на лінії тангенсів є симетричними відносно осі Ox (рис. 91). Тоді і відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) теж будуть симетричними відносно осі Ox. Отже, $\angle COA = \angle COB$. Але $\operatorname{arctg} a = \angle COA$, а $\operatorname{arctg}(-a) == -\angle COB$. Одержуємо

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}.$$

Наприклад, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Приклад Знайдіть $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$.

Розв'язання

Нехай $\operatorname{arctg} 4 = \varphi$, тоді за означенням арктангенса одержуємо, що $\operatorname{tg}\varphi = 4$.

Отже, $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4) = 4$.

Коментар

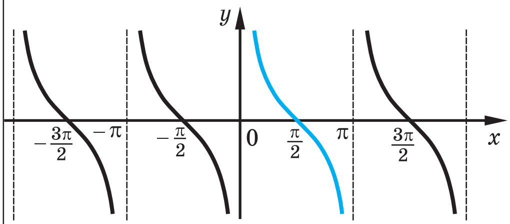
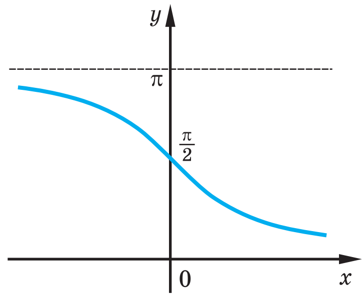
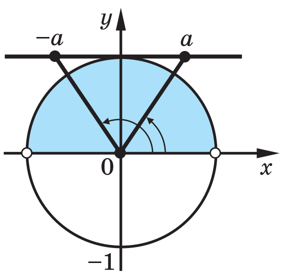
Оскільки запис $\varphi = \operatorname{arctg} a$ означає, що $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\varphi = a$, то завжди виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}.$$

Але цю формулу можна не запам'ятовувати: *досить позначити вираз у дужках через φ і використати означення арктангенса.*

13.4. ФУНКЦІЯ $y = \operatorname{arcctg} x$

Таблиця 29

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік</td></tr>
<tr><td>$y = \operatorname{ctg} x$</td><td>$y = \operatorname{arcctg} x$</td></tr>
<tr><td>
На проміжку $(0; \pi)$ $\operatorname{ctg} x$ спадає.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Значення $\operatorname{arcctg} a$</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>**$\operatorname{arcctg} a$ — це таке число з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює a.**
$\operatorname{arcctg} a = \varphi$, якщо $\begin{cases} \varphi \in (0; \pi), \\ \operatorname{ctg} \varphi = a \end{cases}$</td><td>$\operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, оскільки
$\frac{\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Формула для $\operatorname{arcctg}(-a)$</td></tr>
<tr><td></td><td>$\boldsymbol{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Графік функції $y = \operatorname{arcctg} x$. Функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0; \pi)$ і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$. Отже, на цьому проміжку функція $y = \operatorname{ctg} x$ має обернену функцію, яка позначається $y = \operatorname{arcctg} x$, з областю

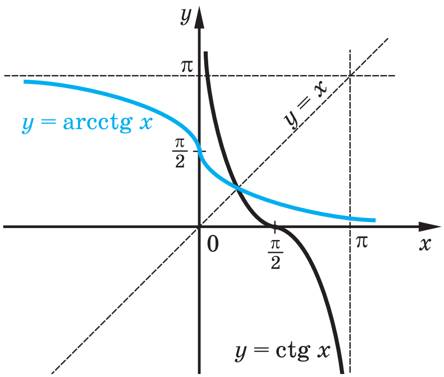


Рис. 92

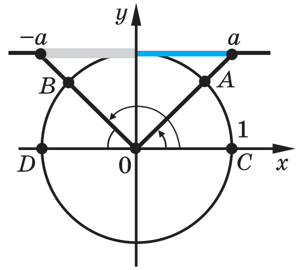


Рис. 93

визначення $(-\infty; +\infty)$ і областю значень $(0; \pi)$. Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ теж спадає, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення його відносно прямої $y = x$ (рис. 92).

2. Значення arcctg *a*. За означенням оберненої функції (на вибраному проміжку), якщо $\operatorname{ctg} \varphi = a$, то $\operatorname{arcctg} a = \varphi$, причому $\varphi \in (0; \pi)$. Отже, запис $\operatorname{arcctg} a = \varphi$ означає, що $\varphi \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} \varphi = a$. Тобто

> **arcctg *a* — *це таке число з проміжку* (0; π), *котангенс якого дорівнює a*.**

Наприклад, $\operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, оскільки $\frac{\pi}{4} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Аналогічно $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Формула для arcctg (−*a*). Для знаходження арккотангенсів від'ємних чисел можна також користуватися формулою $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Це випливає з того, що точки a і $(-a)$ на лінії котангенсів (рис. 93) є симетричними відносно осі Oy. Тоді і відповідні точки A і B на одиничному колі (у проміжку $(0; \pi)$) теж будуть симетричними відносно осі Oy. Отже, $\angle COA = \angle DOB$, значить, $\angle COB = \pi - \angle DOB = \pi - \angle COA$. Але $\operatorname{arcctg} a = \angle COA$, а $\operatorname{arcctg}(-a) = \angle COB = \pi - \angle COA$.
Одержуємо

$$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}.$$

Наприклад, $\operatorname{arcctg}(-1) = \pi - \operatorname{arcctg} 1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Зазначимо, що рівність $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$ означає, що функція $y = \operatorname{arcctg} x$ не є ні парною, ні непарною.

Приклад 1 Знайдіть ctg (arcctg 7).

Розв'язання

▶ Нехай arcctg 7 = φ, тоді за означенням арккотангенса одержуємо, що $\operatorname{ctg}\varphi = 7$.

Отже, $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 7) = 7$. ◁

Коментар

Оскільки запис $\varphi = \operatorname{arcctg} a$ означає, що $\varphi \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\varphi = a$, то завжди виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a}.$$

Але цю формулу можна не запам'ятовувати: *досить позначити вираз у дужках через φ і використати означення арккотангенса.*

Приклад 2* Доведіть, що $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання

▶ Нехай $\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a$.

1) Оскільки $\operatorname{arcctg} a \in (0; \pi)$, то

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

2) Якщо $\operatorname{arcctg} a = \beta$,

то $\operatorname{ctg}\beta = a$ і $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$. Тоді

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \operatorname{ctg}\beta = a.$$

За означенням арктангенса одержуємо $\operatorname{arctg} a = \varphi$.

Отже, $\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a$, а це і означає, що

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}. \triangleleft$$

Коментар

Запишемо задану рівність у вигляді $\operatorname{arctg} a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a$. Якщо позначити $\varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} a$, то для доведення рівності $\operatorname{arctg} a = \varphi$ за означенням арктангенса досить довести, що:

$$1)\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{і} \quad 2)\ \operatorname{tg}\varphi = a.$$

При доведенні слід також врахувати означення арккотангенса: якщо $\operatorname{arcctg} a = \beta$, то $\beta \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\beta = a$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, яке число позначають вирази: а) arcsin a; б) arccos a; в) arctg a; г) arcctg a. При яких значеннях a існують ці вирази? Проілюструйте ваше пояснення прикладами.
2. Поясніть, як можна одержати графіки обернених тригонометричних функцій.

3*. Зобразіть графіки обернених тригонометричних функцій, вкажіть і обґрунтуйте їх найпростіші властивості (область визначення, множина значень, зростання чи спадання, парність, непарність):

а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \operatorname{arcctg} x$.

4. Обґрунтуйте формули:

а) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$; б) $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$;

в) $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$; г) $\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a$.

Вправи

Обчисліть **(1–9)**.

1°. 1) $\arcsin 0$; 2) $\arcsin 1$; 3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arcsin(-1)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2°. 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg} 1$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

3°. 1) $\arccos 0$; 2) $\arccos 1$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\arccos(-1)$; 6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4°. 1) $\operatorname{arcctg} 0$; 2) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

5. 1) $\sin\left(\arcsin\frac{2}{7}\right)$; 2*) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

6. 1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 7)$; 2*) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$; 3*) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$; 4*) $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)$.

7. 1) $\cos\left(\arccos\frac{2}{7}\right)$; 2*) $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 3*) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 4*) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$.

8. 1) $\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{7}\right)$; 2*) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}\right)$; 3*) $\sin(\operatorname{arcctg} 5)$; 4*) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\frac{3}{4}\right)$.

9*. 1) $\arcsin\left(\sin\frac{15\pi}{7}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 7)$; 3) $\arccos\left(\cos\frac{21\pi}{5}\right)$; 4) $\arccos(\cos 8)$; 5) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}\right)$; 6) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$; 7) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{10\pi}{9}\right)$; 8) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 10)$.

10*. Доведіть, що $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ при $|a| \leqslant 1$.

§ 14 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

До найпростіших тригонометричних рівнянь належать рівняння $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$.

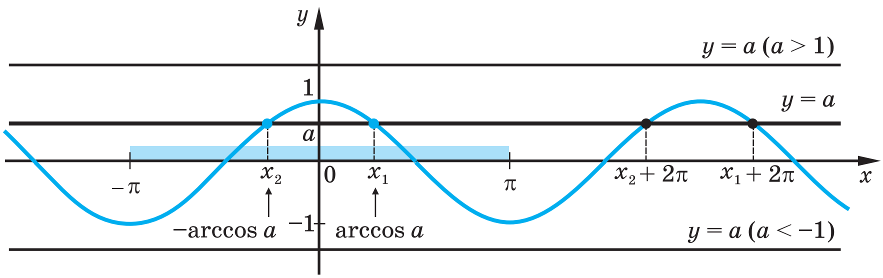
Щоб міркування по знаходженню коренів цих рівнянь були більш наочними, скористаємося графіками відповідних функцій.

14.1. РІВНЯННЯ $\cos x = a$

Таблиця 30

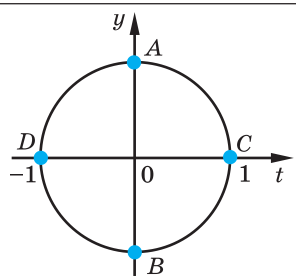
1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\cos x = a$

Графічна ілюстрація



Розв'язки	Приклади
$\boxed{\cos x = a}$ $\lvert a \rvert > 1$ → **Коренів немає** $\lvert a \rvert \leqslant 1$ → $\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$	1. ▶ $\cos x = \frac{1}{2}$, $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. ◁ 2. ▶ $\cos x = \sqrt{3}$. Коренів немає, оскільки $\sqrt{3} > 1$. ◁

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$



$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язки рівняння $\cos x = a$. При $|a| > 1$ рівняння не має коренів, оскільки $|\cos x| \leqslant 1$ для будь-якого x (пряма $y = a$ на рисунку з пункту 1 таблиці 30 при $a > 1$ або при $a < -1$ не перетинає графік функції $y = \cos x$).

Нехай $|a| \leqslant 1$. Тоді пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \cos x$. На проміжку $[0; \pi]$ функція $y = \cos x$ спадає від 1 до -1, тому рівняння $\cos x = a$ має тільки один корінь $x_1 = \arccos a$ на цьому проміжку (рис. з пункту 1 табл. 30).

Косинус — парна функція, тому на проміжку $[-\pi; 0]$ рівняння $\cos x = a$ теж має тільки один корінь — число, протилежне до x_1, тобто $x_2 = -\arccos a$.

Отже, на проміжку $[-\pi; \pi]$ (довжиною 2π) рівняння $\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$ має тільки корені $x = \pm \arccos a$.

Враховуючи, що функція $y = \cos x$ періодична з періодом 2π, всі інші корені відрізняються від знайдених на $2\pi n$ ($n \in Z$), тобто одержуємо таку формулу коренів рівняння $\cos x = a$ при $|a| \leqslant 1$:

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}. \quad (1)$$

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\cos x = a$.

Корисно пам'ятати спеціальні записи розв'язків рівняння $\cos x = a$ при $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$, які можна легко одержати, використовуючи як орієнтир одиничне коло.

Враховуючи, що косинус дорівнює абсцисі відповідної точки одиничного кола, одержуємо, що $\cos x = 0$, якщо відповідною точкою одиничного кола є точка A або точка B (рис. з пункту 2 табл. 30). Тоді

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Аналогічно $\cos x = 1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка C, отже, $x = 2\pi k,\ k \in Z$.

Також $\cos x = -1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка D, отже, $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання	Коментар
$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z,$ $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$	Оскільки $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, то задане рівняння виду $\cos x = a$ має корені, які можна знайти за формулою (1).

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Відповідь: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Для обчислення $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ можна скористатися формулою:

$$\mathbf{arccos\,(-a) = \pi - arccos\,a.}$$

Тоді

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\cos x = \sqrt{2}.$

Розв'язання

▶ Оскільки $\left|\sqrt{2}\right| > 1,$ то коренів немає.

Відповідь: коренів немає. ◁

Коментар

Оскільки $\left|\sqrt{2}\right| > 1,$ то задане рівняння не має коренів (тобто формулу (1) не можна використовувати).

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\cos 4x = \frac{1}{3}.$

Розв'язання

▶ $4x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$$x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь:

$$\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$ ◁

Коментар

Оскільки $\left|\frac{1}{3}\right| < 1,$ то можна скористатися формулою (1).

Враховуючи, що $\arccos\frac{1}{3}$ не є табличним значенням, для одержання відповіді досить після знаходження $4x$ за формулою (1) обидві частини останнього рівняння розділити на 4.

Зауваження. Якщо за умовою завдання потрібно знайти наближене значення коренів даного рівняння в якомусь проміжку, то за допомогою калькулятора знаходимо $\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{3} \approx 0{,}31,\ \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57,$ записуємо наближене значення коренів у вигляді $x \approx \pm\,0{,}31 + 1{,}57n,\ n \in \boldsymbol{Z},$ знаходимо наближене значення коренів при $n = 0, \pm1, \pm2...$ і обираємо корені, що входять до заданого проміжку.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Розв'язання

▶ $2x - \frac{\pi}{3} = \pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

Коментар

Оскільки $\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1,$ то можна скористатися формулою (1) для знахо-

$$2x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$$

$$x=\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{8}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ◁

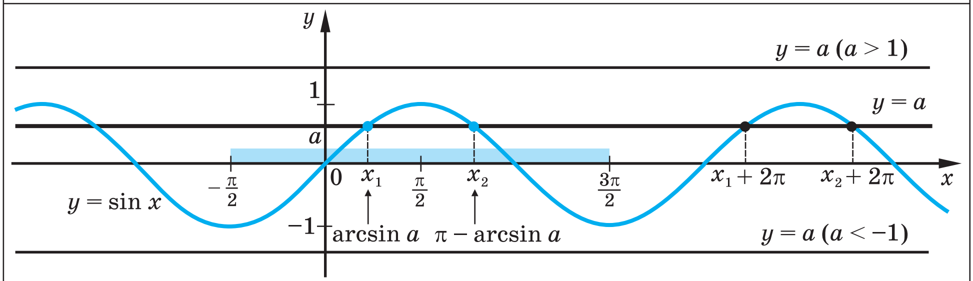
дження значення виразу $2x-\frac{\pi}{3}$, який стоїть під знаком косинуса. Після цього з одержаного лінійного рівняння знаходимо x.

14.2. РІВНЯННЯ $\sin x = a$

Таблиця 31

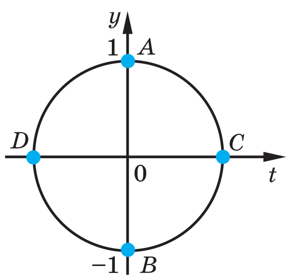
1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\sin x = a$

Графічна ілюстрація



Розв'язки	Приклади
$\boxed{\sin x = a}$ $\lvert a\rvert > 1$ → $\boxed{\text{Коренів немає}}$ $\lvert a\rvert \leqslant 1$ → $\boxed{x=(-1)^n \arcsin a+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}}$	1. ▶ $\sin x=\frac{1}{2}$, $x=(-1)^n \arcsin\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. $x=(-1)^n \frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. ◁ 2. ▶ $\sin x=\sqrt{3}$. Коренів немає, оскільки $\sqrt{3}>1$. ◁

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$



$\sin x = 0$	$x=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = 1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = -1$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язки рівняння $\sin x = a$. При $|a| > 1$ рівняння не має коренів, оскільки $|\sin x| \leqslant 1$ для будь-якого x (пряма $y = a$ на рисунку 94 при $a > 1$ або при $a < -1$ не перетинає графік функції $y = \sin x$).

Нехай $|a| \leqslant 1$. Тоді пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = \sin x$. На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ зростає від -1 до 1, тому рівняння $\sin x = a$ має тільки один корінь $x_1 = \arcsin a$ на цьому проміжку (рис. 94) (і для цього кореня $\sin x = a$).

На проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функція $y = \sin x$ спадає від 1 до -1, тому рівняння $\sin x = a$ має на цьому проміжку теж тільки один корінь $x_2 = \pi - \arcsin a$ (рис. 94). Для перевірки правильності запису значення другого кореня x_2 зазначимо, що $x_2 = \pi - x_1$, тоді $\sin x_2 = \sin(\pi - x_1) = \sin x_1 = a$. Тобто x_2 — корінь рівняння $\sin x = a$.

Отже, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ (довжиною 2π) рівняння $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$ має тільки корені $x_1 = \arcsin a$, $x_2 = \pi - \arcsin a$.

Враховуючи, що функція $y = \sin x$ періодична з періодом 2π, усі інші корені відрізняються від знайдених на $2\pi k$ ($k \in \boldsymbol{Z}$), тобто одержуємо такі формули коренів рівняння $\sin x = a$ при $|a| \leqslant 1$:

$$x = \arcsin a + 2\pi k; \qquad (1)$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Усі значення коренів рівняння **$\sin x = a$** при $|a| \leqslant 1$, які дають формули (1) і (2), можна записати за допомогою однієї формули

$$\boxed{\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}}\,. \qquad (3)$$

Дійсно, з формули (3) при парному $n = 2k$ одержуємо: $x = \arcsin a + 2\pi k$ — формулу (1), а при непарному $n = 2k + 1$ — формулу: $x = -\arcsin a + \pi(2k + 1) = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, тобто формулу (2).

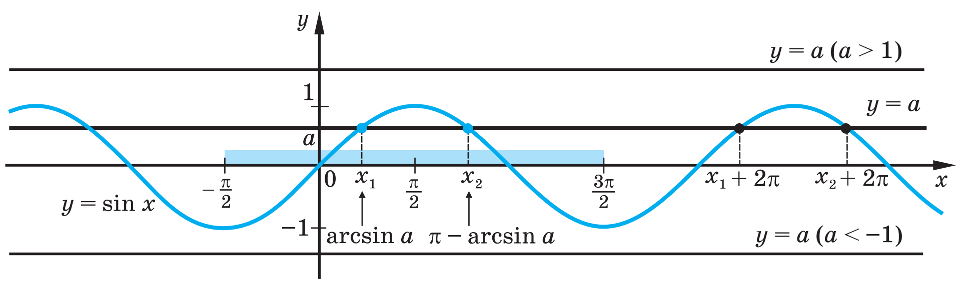


Рис. 94

2. Окремі випадки розв'язування рівняння $\sin x = a$.

Корисно пам'ятати спеціальні записи розв'язків при $a = 0$, $a = -1$, $a = 1$, які можна легко одержати, використовуючи як орієнтир одиничне коло (рис. 95).

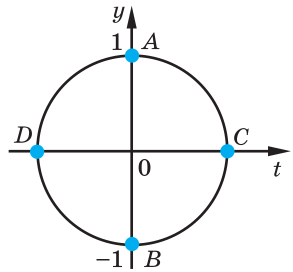


Рис. 95

Враховуючи, що синус дорівнює ординаті відповідної точки одиничного кола, одержуємо, що $\sin x = 0$, якщо відповідною точкою одиничного кола є точка C або точка D. Тоді

$$x = \pi k,\ k \in Z.$$

Аналогічно $\sin x = 1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка A, отже, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$

Також $\sin x = -1$ тоді і тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка B, отже, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$ ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання

▶ $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z.$

$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

Відповідь:

$$(-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z. \triangleleft$$

Коментар

Оскільки $\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| < 1$, то задане рівняння виду $\sin x = a$ має корені, які можна знайти за формулою (3).

Для обчислення $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ можна скористатися формулою:

$$\mathbf{\arcsin(-a) = -\arcsin a}.$$

Тоді

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

Зауваження. Відповідь до прикладу 1 часто записують у вигляді $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$, але такий запис не є обов'язковим.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання	Коментар
▶ Оскільки $\left\|\frac{\pi}{2}\right\| > 1$, то коренів немає. *Відповідь:* коренів немає. ◁	Оскільки $\left\|\frac{\pi}{2}\right\| > 1$, то задане рівняння не має коренів (тобто формулою (3) не можна скористатися).

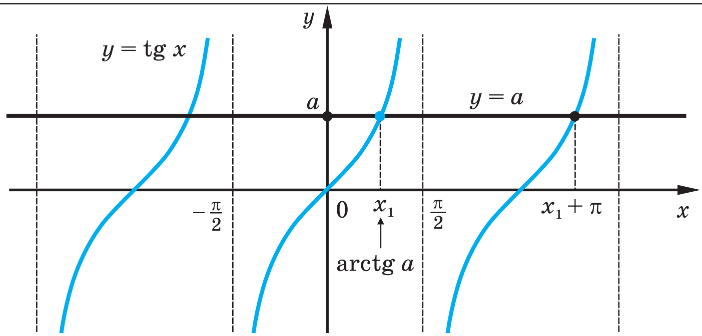
Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Розв'язання	Коментар
▶ $2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$ $2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ *Відповідь:* $(-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁	Оскільки $\left\|\frac{1}{2}\right\| < 1$, то можна скористатися формулою (3) для знаходження значення виразу $2x + \frac{\pi}{4}$, а потім з одержаного лінійного рівняння знайти змінну x.

14.3. РІВНЯННЯ $\mathrm{tg}\, x = a$ і $\mathrm{ctg}\, x = a$

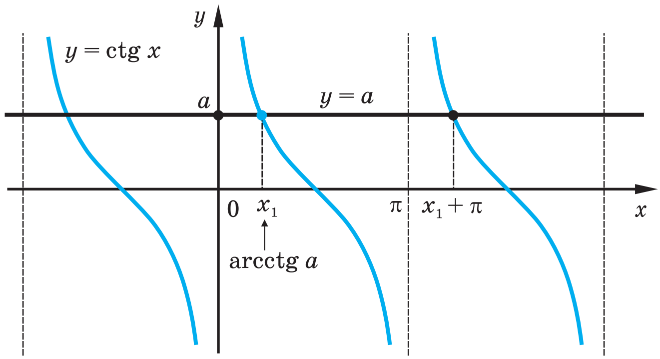
Таблиця 32

1. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$



Формула	Приклад
$\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{tg}\, x = a \\ x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$ Окремий випадок $\boxed{\begin{array}{c}\mathrm{tg}\, x = 0 \\ x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\end{array}}$	$\mathrm{tg}\, x = 1.$ ▶ $x = \mathrm{arctg}\, 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Продовж. табл. 32

2. Графічна ілюстрація і розв'язки рівняння $\mathrm{ctg}\, x = a$	
	
Формула	Приклад
$\boldsymbol{\mathrm{ctg}\, x = a}$ $\boldsymbol{x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z}$ Окремий випадок $\mathrm{ctg}\, x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	$\mathrm{ctg}\, x = 7.$ ▶ $x = \mathrm{arcctg}\, 7 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язки рівнянь $\mathrm{tg}\, x = a$ і $\mathrm{ctg}\, x = a$.

● Розглянемо рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$. На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = \mathrm{tg}\, x$ зростає (від $-\infty$ до $+\infty$), тому рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x_1 = \mathrm{arctg}\, a$ на цьому проміжку (рис. з пункту 1 табл. 32). Враховуючи, що функція $y = \mathrm{tg}\, x$ періодична з періодом π, усі інші корені відрізняються від знайденого на πn ($n \in \boldsymbol{Z}$), тобто одержуємо таку формулу коренів рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$:

$$\boxed{\boldsymbol{x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z}}\ . \qquad (1)$$

При $a = 0$ $\mathrm{arctg}\, 0 = 0$, отже, рівняння $\mathrm{tg}\, x = 0$ має корені $\boldsymbol{x = \pi n,\ n \in Z}$. ○

● Розглянемо рівняння $\mathrm{ctg}\, x = a$. На проміжку $(0; \pi)$ функція $y = \mathrm{ctg}\, x$ спадає (від $+\infty$ до $-\infty$), тому рівняння $\mathrm{ctg}\, x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x_1 = \mathrm{arcctg}\, a$ на цьому проміжку (рис. з пункту 2 табл. 32).

Враховуючи, що функція $y = \operatorname{ctg} x$ періодична з періодом π, усі інші корені відрізняються від знайденого на πn ($n \in \boldsymbol{Z}$), тобто одержуємо таку формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg} x = a$:

$$\boxed{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}}. \qquad (2)$$

При $a = 0$ $\operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2}$, отже, рівняння $\operatorname{ctg} x = 0$ має корені $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Розв'язання

▶ $x = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Коментар

Рівняння $\operatorname{tg} x = a$ має розв'язки при будь-якому значенні a, отже, завжди можна скористатися формулою (1):

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Для знаходження $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ можна використати формулу $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$. Тоді

$$\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

Розв'язання

▶ $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n,$

$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Відповідь: $\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Коментар

Спочатку за формулою (1) знайдемо значення виразу $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}$, а потім з одержаного лінійного рівняння знайдемо значення змінної x.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{ctg} x = 5$.

Розв'язання

▶ $x = \operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

Відповідь: $\operatorname{arcctg} 5 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Коментар

Рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ має розв'язки при будь-якому значенні a, отже, завжди можна скористатися формулою (2):

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Враховуючи, що arcctg 5 не є табличним значенням (див. табл. 8, наведену на с. 47), одержана формула дає кінцеву відповідь.

Приклад 4 Розв’яжіть рівняння $\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-1.$

Розв’язання

▶ $3x+\frac{\pi}{6}=\operatorname{arcctg}(-1)+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},$

$$3x+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}+\pi n,$$

$$x=\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{7\pi}{36}+\frac{\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Коментар

Спочатку за формулою (2) знайдемо значення виразу $3x+\frac{\pi}{6}$, а потім з одержаного лінійного рівняння знайдемо значення змінної x.

Для знаходження arcctg (−1) можна скористатися формулою $\operatorname{arcctg}(-a)=\pi-\operatorname{arcctg} a$. Тоді

$$\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

Запитання для контролю

1. Які рівняння називають найпростішими тригонометричними?
2. Назвіть формули розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь. У яких випадках не можна знайти корені найпростішого тригонометричного рівняння за цими формулами?
3*. Виведіть формули розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь.
4*. Обґрунтуйте формули розв’язування найпростіших тригонометричних рівнянь для окремих випадків (для $\sin x=a$ і $\cos x=a$ випадки $a=0;\ 1;\ -1$, для $\operatorname{tg} x=a$ і $\operatorname{ctg} x=a$ випадок $a=0$).

Вправи

Розв’яжіть рівняння (**1–11**).

1°. 1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=\sqrt{3}$; 3) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2°. 1) $\sin x=\frac{1}{2}$; 2) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x=-\frac{1}{2}$; 4) $\sin x=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3°. 1) $\operatorname{tg} x=1$; 2) $\operatorname{tg} x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{tg} x=-1$; 4) $\operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$.

4°. 1) $\text{ctg}\, x = 1$; 2) $\text{ctg}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\text{ctg}\, x = -1$; 4) $\text{ctg}\, x = -\sqrt{3}$.

5. 1) $\sin x = -0{,}6$; 2) $\cos x = 0{,}3$; 3) $\text{tg}\, x = -3{,}5$; 4) $\text{ctg}\, x = 2{,}5$.

6. 1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin 4x = 0$; 3) $\text{tg}\, 3x = 1$; 4) $\text{tg}\, 4x = 3$.

7. 1) $\sin\left(-\frac{t}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{t}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\text{tg}\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\text{ctg}\frac{x}{7} = 1$.

8°. 1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$; 3) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$; 4) $\cos 4x = 0$.

9. 1) $\sin\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(-2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\text{tg}(-4x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\text{ctg}\left(-\frac{x}{2}\right) = 1$.

10. 1) $2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3}\,\text{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$;

3) $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$; 4) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$.

11. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1$; 2) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$;

3) $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$.

Знайдіть корені рівняння на заданому проміжку **(12–13)**.

12*. 1) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $[0,\, 2\pi]$; 2) $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[-\pi,\, \pi]$;

3) $\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $[-3\pi,\, 3\pi]$; 4) $\text{ctg}\, 4x = -1$, $[0,\, \pi]$.

13*. 1) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$, $[-4,\, 4]$; 2) $\sin\frac{x}{2} = 0$, $[-12,\, 18]$;

3) $\cos x = 1$, $[-6,\, 16]$; 4) $\cos 3x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $[1,\, 7]$.

§ 15 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ, ЯКІ ВІДРІЗНЯЮТЬСЯ ВІД НАЙПРОСТІШИХ

Як правило, розв'язування тригонометричних рівнянь зводиться до розв'язування найпростіших рівнянь за допомогою перетворень тригонометричних виразів, розкладання на множники та заміни змінних.

15.1. ЗАМІНА ЗМІННИХ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Слід пам'ятати загальний орієнтир, коли заміна змінних може виконуватися без перетворення заданих тригонометричних виразів.

Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Розв'язання

Нехай $\sin x = t$, тоді одержуємо:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Звідси $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ маємо $\sin x = 3$ — рівняння не має коренів, оскільки $|3| > 1$.
2. При $t = \frac{1}{2}$ маємо $\sin x = \frac{1}{2}$,

тоді $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Аналізуючи вигляд цього рівняння, помічаємо, що до нього входить тільки одна тригонометрична функція $\sin x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\sin x = t$.

Після розв'язування квадратного рівняння необхідно виконати обернену заміну і розв'язати одержані найпростіші тригонометричні рівняння.

З а у в а ж е н н я. Записуючи розв'язання прикладу 1, можна при введенні заміни $\sin x = t$ врахувати, що $|\sin x| \leqslant 1$, і записати обмеження $|t| \leqslant 1$, а далі зазначити, що один із коренів $t = 3$ не задовольняє умові $|t| \leqslant 1$, і після цього обернену заміну виконувати тільки для $t = \frac{1}{2}$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$.

Коментар

До заданого рівняння змінна входить тільки у вигляді $\operatorname{tg} 2x$. Отже, зручно ввести нову змінну $\operatorname{tg} 2x = t$. Після виконання оберненої заміни і розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних рівнянь слід до відповіді записати всі одержані корені.

Розв'язання

▶ Нехай $\operatorname{tg} 2x = t$. Тоді одержуємо $t^3 - t = 0$. Звідси $t\,(t^2 - 1) = 0$, тобто $t = 0$ або $t^2 - 1 = 0$. З останнього рівняння маємо $t^2 = 1$, тоді $t = 1$ або $t = -1$.
Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 0$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 0$, тоді $2x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Отже, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
2. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = 1$, тоді $2x = \operatorname{arctg} 1 + \pi m$, $2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$. Отже,
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \boldsymbol{Z}.$$
3. При $t = -1$ маємо $\operatorname{tg} 2x = -1$, тоді $2x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi k$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$. Отже,
$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}$, $m \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

При пошуку плану розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь можна скористатися таким о р і є н т и р о м.

1. *Пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу.***
2. *Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести* ***до однієї функції.***
3. *Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння* ***до однорідного.***
4. *В інших випадках переносимо* ***всі члени в один бік*** *і пробуємо* ***одержати добуток*** *або використовуємо* ***спеціальні прийоми розв'язування.***

15.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ЗВЕДЕННЯМ ДО ОДНІЄЇ ФУНКЦІЇ (З ОДНАКОВИМ АРГУМЕНТОМ)

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0$.

Розв'язання

▶ Використовуючи формулу косинуса подвійного аргументу та основну тригонометричну тотожність, одержуємо:

Коментар

Усі тригонометричні функції зводимо до одного аргументу x, використовуючи формулу
$$\cos^2 2x = \cos^2 x - \sin^2 x.$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$
$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0,$$
$$-2\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0.$$

Заміна $\sin x = t$ дає рівняння
$$-2t^2 - 5t - 2 = 0.$$

Тоді $2t^2 + 5t + 2 = 0$, $t_1 = -2$, $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Виконуємо обернену заміну.

1. При $t = -2$ маємо $\sin x = -2$ — коренів немає, оскільки $|2| > 1$.
2. При $t = -\frac{1}{2}$ маємо $\sin x = -\frac{1}{2}$. Тоді
$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n,$$
$$x = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $(-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Потім усі тригонометричні вирази зводимо до однієї функції $\sin x$ (враховуємо, що $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\sin x$, отже, зручно виконати заміну $\sin x = t$.

З а у в а ж е н н я. При бажанні відповідь можна записати у вигляді
$$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ $\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3$. Заміна: $\operatorname{tg} x = t$. Маємо рівняння $t + \frac{2}{t} = 3$.

При $t \neq 0$ отримуємо рівносильне рівняння $t^2 - 3t + 2 = 0$.

Звідси $t_1 = 1$, $t_2 = 2$.

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = 1$ маємо $\operatorname{tg} x = 1$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 1 + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$
2. При $t = 2$ маємо $\operatorname{tg} x = 2$, тоді
$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;
$\operatorname{arctg} 2 + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

К о м е н т а р

Усі аргументи вже однакові (x), тому зводимо всі тригонометричні вирази до однієї функції $\operatorname{tg} x$ (враховуємо, що $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\operatorname{tg} x$, отже, зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x = t$.

15.3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОДНОРІДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЗВЕДЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНОГО РІВНЯННЯ ДО ОДНОРІДНОГО

Розглянемо рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$. (1)

Для пошуку плану розв'язування цього рівняння (але не для його розв'язування) виконаємо заміни: $\sin x = u$, $\cos x = v$. Тоді рівняння (1) матиме вигляд

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0. \quad (2)$$

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степені 2 (нагадаємо, що степінь одночлена uv теж дорівнює 2). У цьому випадку рівняння (2) (і відповідно рівняння (1)) називається однорідним, і для розпізнавання таких рівнянь та їх розв'язування можна використовувати такий орієнтир.

> ***Якщо всі члени рівняння****, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної),* ***мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається однорідним****.* *Розв'язується однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї із змінних.*

Зауваження. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз із змінною. При цьому можна втратити корені (якщо коренями є ті числа, при яких дільник дорівнює нулю). Щоб уникнути цього, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який ми збираємося ділити обидві частини рівняння, дорівнює нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз, що не дорівнює нулю.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Розв'язання

▶ При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$.

Одержуємо

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 2\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0,$$

тобто $\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \dfrac{\sin x}{\cos x} - 2 = 0.$

Тоді $\mathrm{tg}^2\, x - \mathrm{tg}\, x - 2 = 0$.

Заміна: $\mathrm{tg}\, x = t$.

Отримуємо рівняння $t^2 - t - 2 = 0$,

$t_1 = -1$, $t_2 = 2$.

Коментар

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий сумарний степінь 2. Його можна розв'язати діленням обох частин на $\sin^2 x$ або на $\cos^2 x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos x = 0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos x = 0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Отже, ті значення змін-

* Звичайно, якщо рівняння має вигляд $f = 0$, йдеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен (тобто 0) степеня не має.

Виконуємо обернену заміну:

1) При $t=-1$ маємо $\operatorname{tg} x=-1$, тоді
$$x=\operatorname{arctg}(-1)+\pi n,$$
$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

2) При $t=2$ маємо $\operatorname{tg} x=2$, тоді
$$x=\operatorname{arctg} 2+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{arctg} 2+\pi m,\ m\in \boldsymbol{Z}$. ◁

ної x, для яких $\cos x=0$, не є коренями заданого рівняння. А при $\cos x\neq 0$ можна розділити обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x\neq 0$ і одержати рівняння, рівносильне заданому (та врахувати при цьому, що $\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$).

В одержане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\operatorname{tg} x$, тому зручно виконати заміну $\operatorname{tg} x=t$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x=5\cos 3x$.

Розв'язання

► При $\cos 3x=0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos 3x\neq 0$.

Одержуємо

$\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=5$, тобто $\operatorname{tg} 3x=5$. Тоді
$$3x=\operatorname{arctg} 5+\pi m,$$
$$x=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5+\frac{\pi m}{3},\ m\in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 5+\frac{\pi m}{3},\ m\in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Задане рівняння однорідне, оскільки всі його члени мають однаковий степінь 1. Його можна розв'язати діленням обох частин на $\sin 3x$ або на $\cos 3x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos 3x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos 3x=0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos 3x=0$ в задане рівняння, одержуємо $\sin 3x=0$. Але одночасно $\sin 3x$ і $\cos 3x$ не можуть дорівнювати нулю. Отже, при $\cos 3x=0$ рівняння не має коренів. А при $\cos 3x\neq 0$ можна розділити обидві частини даного рівняння на $\cos 3x\neq 0$ і одержати рівняння, рівносильне заданому (і врахувати при цьому, що $\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=\operatorname{tg} 3x$).

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $6\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x-\cos^2 x=2$.

Розв'язання

► Використовуючи формулу синуса подвійного аргументу, маємо
$$6\sin^2 x+\sin x\cos x-\cos^2 x=2. \quad (1)$$
Запишемо це рівняння так:

Коментар

Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргументу x, використовуючи формулу $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

$6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x = 2\cdot 1$ і врахуємо, що $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$.
Тоді $6\sin^2 x + \sin x\cos x - \cos^2 x =$
$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$.

Звідси
$4\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. (2)

При $\cos x = 0$ рівняння не має коренів, тому розділимо обидві його частини на $\cos^2 x \neq 0$. Одержуємо

$$4\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{\cos x} - 3 = 0,$$

$$4\,\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{tg}\, x - 3 = 0. \qquad (3)$$

Заміна: $\mathrm{tg}\, x = t$. Отримуємо рівняння $4t^2 + t - 3 = 0$,

$$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{3}{4}.$$

Виконуємо обернену заміну:

1. При $t = -1$ маємо $\mathrm{tg}\, x = -1$, тоді
$$x = \mathrm{arctg}\,(-1) + \pi n,$$
$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

2. При $t = \frac{3}{4}$ маємо $\mathrm{tg}\, x = \frac{3}{4}$, тоді
$$x = \mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$\mathrm{arctg}\frac{3}{4} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

У лівій частині одержаного рівняння (1) *стоїть однорідний вираз другого степеня, а в правій частині — число* 2. *Якщо домножити* 2 *на* 1, *а одиницю розписати за основною тригонометричною тотожністю* $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, *то в лівій і правій частинах одержаного рівняння всі вирази будуть другого степеня, тобто одержимо однорідне рівняння* (2), яке можна розв'язати діленням обох частин або на $\sin^2 x$, або на $\cos^2 x$.

Якщо ми будемо ділити на $\cos^2 x$, то, щоб не втратити корені, випадок $\cos^2 x = 0$ розглянемо окремо.

Підставляючи $\cos x = 0$ у рівняння (2), одержуємо $\sin x = 0$. Але одночасно $\sin x$ і $\cos x$ не можуть дорівнювати нулю (оскільки $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Отже, при $\cos x = 0$ рівняння (2) не має коренів. А при $\cos x \neq 0$ можна розділити обидві частини цього рівняння на $\cos^2 x \neq 0$ (і врахувати при цьому, що $\frac{\sin x}{\cos x} = \mathrm{tg}\, x$).

В одержане рівняння (3) змінна входить в одному і тому самому вигляді $\mathrm{tg}\, x$, через те зручно виконати заміну $\mathrm{tg}\, x = t$.

15.4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ВИДУ $f(x) = 0$ ЗА ДОПОМОГОЮ РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 7x = \sin 5x$.

Розв'язання

▶ $\sin 7x - \sin 5x = 0$, тоді

$$2\sin\frac{7x-5x}{2}\cos\frac{7x+5x}{2} = 0,$$

$$2\sin x\cos 6x = 0.$$

Одержуємо:

Коментар

Досить важко всі тригонометричні функції в цьому рівнянні звести до одного аргументу.

У такому випадку доводиться користуватися четвертим пунктом орієнтира, наведеного на с. 170: *пере-*

$\sin x = 0$ або $\cos 6x = 0$.

Розв'язуючи останні найпростіші тригонометричні рівняння, маємо:

$$x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\ \text{або}\ 6x = \frac{\pi}{2} + \pi m,$$

тобто $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{6},\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

носимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.

Для цього скористаємося формулою перетворення різниці синусів у добуток:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Але якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із співмножників дорівнює нулю, а інші співмножники мають зміст. У даному випадку всі задані й одержані вирази мають зміст на всій множині дійсних чисел.

У кінці враховуємо, що задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sin x = 0$ або $\cos 6x = 0$, і через те у відповіді мають бути записані всі корені кожного з цих рівнянь.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin x + \sin 3x = \sin 4x$.

Розв'язання

► $2 \sin \frac{x + 3x}{2} \cos \frac{x - 3x}{2} - \sin 4x = 0,$

$$2 \sin 2x \cos x - \sin 4x = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos x - 2 \sin 2x \cos 2x = 0,$$

$$2 \sin 2x\,(\cos x - \cos 2x) = 0,$$

$$\sin 2x = 0\ \text{або}\ \cos x - \cos 2x = 0.$$

З першого з цих рівнянь:

$$2x = \pi n,\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Друге рівняння перетворимо так:

$$-2 \sin \frac{x + 2x}{2} \sin \frac{x - 2x}{2} = 0,$$

$$2 \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0.$$

Звідси $\sin \frac{3x}{2} = 0$ або $\sin \frac{x}{2} = 0$.

З цих рівнянь одержуємо:

$$\frac{3x}{2} = \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},\ \text{або}\ \frac{x}{2} = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Коментар

Зразу скористаємося четвертим пунктом орієнтира, наведеного на с. 170: *переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо одержати добуток, що дорівнює нулю.*

Для цього застосуємо формулу перетворення суми синусів, яка стоїть у лівій частині рівняння, на добуток:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(і врахуємо, що $\cos(-x) = \cos x$).

Для того щоб винести який-небудь вираз за дужки і одержати добуток, досить записати $\sin 4x$ як синус подвійного аргументу (тоді за дужки виноситься $\sin 2x$).

Якщо добуток дорівнює нулю, то хоча б один із співмножників дорівнює нулю.

$x=\frac{2\pi m}{3}$ або $x=2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$;

$\frac{2\pi m}{3}$, $m\in \boldsymbol{Z}$;

$2\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$. ◁

У другому з одержаних рівнянь перетворимо різницю косинусів на добуток. У кінці враховуємо, що всі задані і одержані вирази існують на всій множині дійсних чисел. Отже, задане рівняння на цій множині рівносильне сукупності рівнянь:

$\sin 2x=0$ або $\sin\frac{3x}{2}=0$ або $\sin\frac{x}{2}=0$,

і тому до відповіді потрібно записати всі корені кожного з цих рівнянь.

З а у в а ж е н н я. Запис відповіді можна скоротити. Так, якщо зобразити всі знайдені розв'язки на одиничному колі, то побачимо, що розв'язок $x=2\pi k$ дає ті самі точки, що й формула $x=\frac{\pi n}{2}$ при n, кратному 4 ($n=4k$), або формула $x=\frac{2}{3}\pi m$ при m, кратному 3 ($m=3k$). Таким чином, формула $x=2\pi k$ не дає нових розв'язків у порівнянні з формулами $x=\frac{\pi n}{2}$ або $x=\frac{2\pi m}{3}$, і тому відповідь може бути записана у вигляді тільки двох останніх формул. Але таке скорочення відповіді не є обов'язковим.

15.5. ВІДБІР КОРЕНІВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Якщо при розв'язуванні тригонометричних рівнянь необхідно виконувати відбір коренів, то найчастіше це робиться так:

знаходять (бажано найменший) спільний період усіх тригонометричних функцій, що входять у запис рівняння (звичайно, якщо цей спільний період існує); **потім на цьому періоді відбирають корені (відкидають сторонні), а ті, що залишаються, періодично продовжують.**

Приклад Розв'яжіть рівняння

$$\sin 4x \operatorname{tg} x=0. \quad (1)$$

<u>І спосіб розв'язування</u>

Р о з в ' я з а н н я

▶ $\sin 4x=0$ або $\operatorname{tg} x=0$.

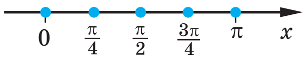
Тоді $4x=\pi n$ (тобто $x=\frac{\pi n}{4}$, $n\in \boldsymbol{Z}$) або $x=\pi k$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

Функція $y=\sin 4x$ має період $T_1=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, а функція $y=\operatorname{tg} x$ — період

К о м е н т а р

Якщо число x є коренем рівняння (1), то при цьому значенні x рівність (1) перетворюється на правильну числову рівність. Добуток двох чисел може дорівнювати нулю тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю. Отже, кожен корінь

$T_2 = \pi$. Тоді $T = \pi$ є спільним періодом для обох функцій. Позначимо всі одержані корені на одному періоді, наприклад, на проміжку $[0; \pi]$:



При $x = \frac{\pi}{2}$ значення $\operatorname{tg} x$ не існує, отже, $x = \frac{\pi}{2}$ не є коренем заданого рівняння.

При значеннях $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ одержуємо рівність $0 = 0$. Отже, ці значення є коренями рівняння (1).

Тоді розв’язками заданого рівняння будуть:

$$x = \pi k;$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\pi k; \ \frac{\pi}{4} + \pi k; \ \frac{3\pi}{4} + \pi k; \ k \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

рівняння (1) буде коренем сукупності рівнянь $\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Замінивши рівняння (1) на цю сукупність, ми не загубимо коренів заданого рівняння, але можемо одержати сторонні для нього корені. Наприклад, такі, при яких перший множник дорівнює нулю, а другий не існує.

Щоб відкинути такі значення, виконаємо перевірку одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння на одному періоді — проміжку довжиною π.

На цьому періоді відбираємо корені (відкидаємо сторонні), а ті, що залишаються, періодично повторюємо (тобто додаємо до одержаних коренів πk, $k \in \boldsymbol{Z}$).

З а у в а ж е н н я. При розв’язуванні рівняння (1) ми не стежили за рівносильністю виконаних перетворень, але виконували такі перетворення, які не приводили до загублення коренів. Тоді говорять, що ми користувалися рівняннями-наслідками (*якщо всі корені першого рівняння є коренями другого рівняння, то друге рівняння називається наслідком першого*)*. У цьому випадку ми могли отримати сторонні для заданого рівняння корені (тобто ті корені останнього рівняня, які не є коренями заданого). Щоб цього не сталося, можна користуватися таким о р і є н т и р о м.

Якщо при розв’язуванні рівняння ми користувалися рівняннями-наслідками, то перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є обов’язковою складовою частиною розв’язування.

Якщо для розв’язування цього самого рівняння (1) ми будемо використовувати рівносильні перетворення, то відбір коренів буде організований трохи інакше. Зокрема, нам доведеться врахувати *ОДЗ рівняння*, тобто спільну область визначення для всіх функцій, які входять до запису рівняння.

* Більш повно про рівняння-наслідки див. у § 17.

<u>II спосіб розв'язування рівняння $\sin 4x \operatorname{tg} x = 0$.</u>

Розв'язання

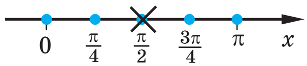
ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

$\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Тоді $4x = \pi n$, тобто $x = \frac{\pi n}{4},\ n \in \boldsymbol{Z}$,

або $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Функція $y = \sin 4x$ має період $T_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а функція $y = \operatorname{tg} x$ — період $T_2 = \pi$. Тоді $T = \pi$ є спільним періодом для обох функцій. Позначимо всі одержані корені на одному періоді, наприклад, на проміжку $[0; \pi]$, і на цьому ж проміжку позначимо обмеження ОДЗ:



Відповідь: $\pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k;\ \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Всі рівносильні перетворення рівнянь виконуються на їх області допустимих значень (ОДЗ), тому потрібно врахувати ОДЗ.

Добуток двох множників дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю, а другий множник має зміст. На ОДЗ обидва множники мають зміст, тому на ОДЗ задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь $\sin 4x = 0$ або $\operatorname{tg} x = 0$.

Ті корені сукупності, які входять до ОДЗ, досить відібрати на одному періоді — проміжку довжиною π, а потім одержані розв'язки періодично повторити.

Значення $x = \frac{\pi}{2}$ не входить до ОДЗ, отже, воно не є коренем заданого рівняння.

Значення $0,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4},\ \pi$ входять до ОДЗ, отже, ці значення є коренями заданого рівняння.

Запитання для контролю

1. Які способи використовують при розв'язуванні тригонометричних рівнянь? Наведіть приклади.
2. Яку заміну змінних можна виконати при розв'язуванні рівняння $8\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$? Яке рівняння одержимо після заміни?
3. а) Поясніть, чому рівняння $3\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0$ є однорідним. б*) Як можна розв'язати це однорідне рівняння?
4. Як можна виконати відбір коренів тригонометричного рівняння? Проілюструйте відбір коренів тригонометричного рівняння на прикладі.

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–20)**.

1. 1°) $3\sin^2 x - 5\sin x - 2 = 0$; 2) $3\sin^2 2x + 10\sin 2x + 3 = 0$;

3°) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$; 4) $2\sin^2 \frac{x}{2} - 3\sin \frac{x}{2} + 1 = 0$.

2. 1°) $6\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; 2) $2\cos^2 3x - 5\cos 3x - 3 = 0$;

3°) $2\cos^2 x - \cos x - 3 = 0$; 4) $2\cos^2 \frac{x}{3} + 3\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$.

3. 1°) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$; 2) $8\sin^2 2x + \cos 2x + 1 = 0$;

3°) $5\cos^2 x + 6\sin x - 6 = 0$; 4) $4\sin 3x + \cos^2 3x = 4$.

4. 1°) $3\,\mathrm{tg}^2 x + 2\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0$; 2) $\mathrm{ctg}^2 2x - 6\,\mathrm{ctg}\, 2x + 5 = 0$;

3°) $2\,\mathrm{tg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\, x - 2 = 0$; 4) $7\,\mathrm{ctg}^2 \frac{x}{2} + 2\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 5$.

5. 1) $3\cos 2x = 7\sin x$; 2) $2\cos 2x = 7\cos x$.

6. 1) $\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

2) $\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$;

3) $\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$;

4) $3\sin^2 x + \sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

7. 1) $\cos\frac{x}{2} = 1 + \cos x$; 2) $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = 1$;

3) $5\cos x + 12\sin x = 13$; 4) $3\cos x - 2\sin 2x = 0$.

8. 1) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$; 2) $1 + \cos x = 2\cos\frac{x}{2}$;

3) $\cos 2x = 2\frac{1}{3}\sin x$; 4) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$.

9. 1) $\cos x + \sin x = 0$; 2) $\cos^2 x - 3\sin x\cos x = -1$;

3) $3\cos^2 x = 4\sin x\cos x - \sin^2 x$; 4) $4\cos^2 x - 7\sin 2x = 2$.

10. 1) $\frac{5}{3\cos x + 4} = 2$; 2) $\frac{5}{3\sin x + 4} = 2$; 3) $\frac{2}{3\sqrt{2}\sin x - 1} = 1$; 4) $\frac{2}{3\sqrt{2}\cos x - 1} = 1$.

11. 1) $\frac{3}{5\,\mathrm{tg}\, x + 8} = 1$; 2) $\frac{3}{5\,\mathrm{ctg}\, x + 8} = 1$; 3) $\frac{4}{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x + 5} = \frac{1}{2}$; 4) $\frac{2}{\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\, x + 5} = \frac{1}{4}$.

12. 1) $\frac{2\sin x + 7}{1{,}5\sin x + 3} = 2$; 2) $\frac{2\cos x + 7}{1{,}5\cos x + 3} = 2$;

3) $\frac{6}{\mathrm{tg}\, x + 2} = 3 - \mathrm{tg}\, x$; 4) $\frac{6}{\mathrm{ctg}\, x + 2} = 3 - \mathrm{ctg}\, x$.

13. 1) $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2\sin x$; 2) $\frac{15}{\cos x + 1} = 11 - 2\cos x$;

3) $\frac{1}{\mathrm{tg}\, x + 1} = 2\,\mathrm{ctg}\, x - 1$; 4) $\frac{10}{\mathrm{tg}\, x + 2} = 3 - \mathrm{ctg}\, x$.

14. 1) $\sin x + \sin 3x = 0$; 2) $\sin 5x - \sin x = 0$;

3) $\cos 2x - \cos 6x = 0$; 4) $\cos 4x + \cos 2x = 0$.

15*. 1) $|\sin x| = |\cos x|$; 2) $|\sin 2x| = \left|\sqrt{3}\cos 2x\right|$.

16*. 1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{13\pi}{6} - 2x\right) = 0$; 2) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\cos\left(\frac{47\pi}{3} - \frac{x}{2}\right)$.

17*. 1) $\sin^2 x - 5\cos x = \sin x\cos x - 5\sin x$;
2) $\cos^2 x - 7\sin x + \sin x\cos x = 7\cos x$.

18. 1) $\sin^2 x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\cos^2 x = 0$;

2) $\sin^2 3x + 3\cos^2 3x - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) = 0$;

3) $\sin^2 x + 2\sin(\pi - x)\cos x - 3\cos^2(2\pi - x) = 0$;

4) $\sin^2(2\pi - 3x) + 5\sin(\pi - 3x)\cos 3x + 4\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = 0$.

19. 1) $3\sin^2\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 2$;

2) $2\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin\left(\pi - \frac{x}{2}\right)\cos\left(2\pi - \frac{x}{2}\right) + 7\sin^2\frac{x}{2} = 3$;

3) $4\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\sin(\pi + x) + 3\cos^2(\pi + x) = 3$;

4) $3\sin^2\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)\cos(\pi + x) + 2\sin^2(x - \pi) = 2$.

20. 1) $2\sin^2(\pi + x) - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 = 0$; 2) $2\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 = 0$;

3) $2\cos^2 x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 = 0$; 4) $5 - 5\sin 3(\pi - x) = \cos^2(\pi - 3x)$.

§ 16 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Системи тригонометричних рівнянь розв'язуються за допомогою тих самих методів, що й алгебраїчні системи. Зокрема, це виключення невідомих і заміна змінних. Виключити невідомі можна за допомогою одного з двох прийомів: з одного рівняння виразити якесь невідоме (або функцію від нього) і підставити його в інші або перетворити дані рівняння і потім скласти з них комбінації, у яких число невідомих зменшується.

Приклад 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos x + \sin y = 1. \end{cases}$

▶ З першого рівняння знаходимо $y = \frac{\pi}{2} - x$ і підставляємо в друге. Одержуємо $\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$, тобто $\cos x + \cos x = 1$, $2\cos x = 1$, $\cos x = \frac{1}{2}$. Отже,

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

1) Якщо $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, то $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{6}-2\pi n$.

2) Якщо $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, то $y=\frac{\pi}{2}-x=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)=\frac{5\pi}{6}-2\pi n$.

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. ◁

З а у в а ж е н н я. Якби ми для знаходження значення y не розглянули окремо формулу (1) із знаком «+» і знаком «−», то разом з правильними розв'язками ми б одержали і сторонні розв'язки заданої системи.

Дійсно, у такому випадку маємо $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Тоді, наприклад, при $n=0$ одержуємо $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{2}-\left(\pm\frac{\pi}{3}\right), \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x=\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{6} \text{ або } y=\frac{5\pi}{6}. \end{cases}$

Отже, крім розв'язків, які ввійшли до відповіді, ми маємо ще дві можливості:

$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{5\pi}{6}, \end{cases}$ $\begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}, \\ y=\frac{\pi}{6}. \end{cases}$ Але ці пари значень x і y не є розв'язками заданої системи, оскільки вони не задовольняють першому рівнянню.

Тому слід запам'ятати:

Коли розв'язок рівняння cos x = a доводиться використовувати для подальших перетворень, то зручно записувати його у вигляді двох формул: окремо із знаком «+» і окремо із знаком «−».

Приклад 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \cos x\cos y=\frac{1}{4}, \\ \sin x\sin y=\frac{3}{4}. \end{cases}$

▶ Почленно додамо і віднімемо ці рівняння. Одержимо рівносильну систему

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=-\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x-y=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}, \\ x+y=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Подамо останню систему у вигляді сукупності двох систем, записуючи розв'язки другого рівняння окремо із знаком «+» і окремо із знаком «−»:

$$\begin{cases} x-y=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}, \\ x+y=\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x-y=2\pi k,\ k\in \mathbf{Z}, \\ x+y=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Почленно додаючи і віднімаючи рівняння цих систем, знаходимо x і y:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x=-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k, \\ y=-\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k. \end{cases}$$

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k;\ \frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n-\pi k\right)$, $n\in \mathbf{Z}$, $k\in \mathbf{Z}$. ◁

З а у в а ж е н н я. До запису відповіді ввійшли два параметри n і k, що незалежно один від одного «пробігають» множину цілих чисел. Якщо спробувати при розв'язуванні заданої системи скористатися лише одним параметром, наприклад, n, то це спричинить втрату розв'язків. Отже, у кожному випадку, *коли система тригонометричних рівнянь зводиться до системи, що складається з елементарних тригонометричних рівнянь* (тобто з рівнянь виду $\sin x=a$, $\cos x=a$, $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$), *при розв'язуванні кожного з цих рівнянь необхідно використовувати свій цілочисельний параметр.*

Запитання для контролю

1. Які методи використовуються для розв'язування систем тригонометричних рівнянь?
2 Поясніть, у якому випадку при формальному розв'язуванні системи $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \cos(x-y)=\frac{1}{2} \end{cases}$ ми можемо втратити частину розв'язків, а в якому випадку — одержати сторонні розв'язки. Розв'яжіть цю систему.

Вправи

Розв'яжіть систему рівнянь **(1–8)**.

1°. 1) $\begin{cases} \sin x+\sin y=1, \\ x+y=\pi; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ x+y=2\pi. \end{cases}$

2°. 1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=1, \\ x+y=\frac{\pi}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x-\cos y=\frac{1}{2}, \\ x-y=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$

3°. 1) $\begin{cases} \sin x+\sin y=0{,}5, \\ \sin x\cdot \sin y=-0{,}5. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x+\cos y=-0{,}5, \\ \cos x\cdot \cos y=-0{,}5. \end{cases}$

4. 1) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

5. 1) $\begin{cases} \cos x \cos y = 0{,}75, \\ \sin x \sin y = 0{,}25; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}75, \\ \sin y \cos x = 0{,}25. \end{cases}$

6. 1) $\begin{cases} \cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{1}{2}, \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \sin y - \cos x \cos y = -1, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

7*. 1) $\begin{cases} \cos x \cos y = \sin^2 y, \\ \sin x \sin y = \cos^2 y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \sin^2 y, \\ \cos x \sin y = \cos^2 y. \end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \cos x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = 1, \\ \cos^2 x + \sin^2 y = \sin x. \end{cases}$

§ 17 РІВНЯННЯ-НАСЛІДКИ ТА РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РІВНЯНЬ

Таблиця 33

1. Поняття рівняння і його коренів	
Означення	Приклад
Рівність із змінною називається рівнянням. У загальному вигляді рівняння з однією змінною x записують так: $f(x) = g(x)$. Під цим коротким записом розуміють математичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох даних функцій рівні.	$2x = -1$ — лінійне рівняння; $x^2 - 3x + 2 = 0$ — квадратне рівняння; $\sqrt{x+2} = x$ — ірраціональне рівняння (містить змінну під знаком кореня).
Коренем (або розв'язком) *рівняння* називається значення змінної, яке перетворює це рівняння на правильну рівність. **Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.**	$x = 2$ — корінь рівняння $\sqrt{x+2} = x$, оскільки при $x = 2$ одержуємо правильну рівність: $\sqrt{4} = 2$, тобто $2 = 2$.

Продовж. табл. 33

2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
Областю допустимих значень **(або областю визначення)** ***рівняння*** **називається спільна область визначення для функцій** $f(x)$ **і** $g(x)$**, що стоять у лівій і правій частинах рівняння.**	Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2\geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x)=x$ є множина всіх дійсних чисел.

3. Рівняння-наслідки	
Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається *наслідком* першого. Якщо з **правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, то одержуємо рівняння-наслідки.** *При використанні рівнянь-наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів*. Тому **при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування** (див. пункт 5 цієї таблиці).	$\sqrt{x+2}=x$. ▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2,$ $x+2=x^2,$ $x^2-x-2=0,$ $x_1=2,\ x_2=-1.$ Перевірка. $x=2$ — корінь (див. вище); $x=-1$ — сторонній корінь (при $x=-1$ одержуємо неправильну рівність $1=-1$). *Відповідь:* 2. ◁

4. Рівносильні рівняння	
Означення	Найпростіші теореми
Два рівняння називаються *рівносильними* на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі корені. *Тобто кожен корінь першого рівняння є коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого є коренем першого* (схема розв'язування рівнянь за допомогою рівносильних перетворень наведена в пункті 5 цієї таблиці).	**1. Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на будь-якій множині).** **2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).**

Продовж. табл. 33

5. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою
рівнянь-наслідків

1 ↓ 2 Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння

за допомогою
рівносильних перетворень

Врахування ОДЗ початкового рівняння

1 ↑↓ 2 Збереження на ОДЗ правильної рівності при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій *

1 — початкове рівняння;

2 — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття рівняння і його коренів. Рівняння в математиці найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження значень аргументу, при яких значення двох даних функцій рівні. Тому в загальному вигляді рівняння з однією змінною x записують так: $f(x)=g(x)$.

Досить часто рівняння означають коротше — як рівність із змінною.

Нагадаємо, що *коренем (або розв'язком) рівняння називається значення змінної, при підстановці якого у рівняння утворюється правильна рівність. Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.*

Наприклад, рівняння $2x=-1$ має єдиний корінь $x=-\frac{1}{2}$, а рівняння $|x|=-1$ не має коренів, оскільки значення $|x|$ не може бути від'ємним числом.

2. Область допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Якщо задано рівняння $f(x)=g(x)$, то спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається *областю допустимих значень* цього *рівняння*. (Іноді використовуються

* Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь розглянуто в § 18.

також терміни «область визначення рівняння» або «множина допустимих значень рівняння».) Наприклад, для рівняння $x^2 = x$ областю допустимих значень є всі дійсні числа. Це можна записати, наприклад, так: ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$, оскільки функції $f(x) = x^2$ і $g(x) = x$ мають області визначення $x \in \boldsymbol{R}$.

Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$ (інакше ми не зможемо отримати правильну числову рівність). Отже, *кожен корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння.* Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ рівняння при його розв'язуванні.

Наприклад, у рівнянні $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=x$ функція $g(x) = x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, а функція $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}$ тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цього рівняння задається системою $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 1-x \geqslant 0, \end{cases}$ з якої одержуємо систему $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 1, \end{cases}$ що не має розв'язків. Таким чином, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

Зазначимо, що знаходження ОДЗ заданого рівняння може бути корисним для його розв'язування, але не завжди є обов'язковим елементом розв'язування рівняння.

3. Методи розв'язування рівнянь. Для розв'язування рівнянь використовують методи *точного і наближеного розв'язування*. Зокрема, для точного розв'язування рівнянь у курсі математики 5–6 класів використовувалися залежності між компонентами та результатами дій і властивості числових рівностей; у курсі алгебри 7–9 класів — рівносильні перетворення рівнянь, а для наближеного розв'язування рівнянь — графічний метод.

Графічний метод розв'язування рівнянь не дає високої точності знаходження коренів рівняння, і за його допомогою найчастіше можна дістати лише грубі наближення коренів. Іноді зручно графічно визначити кількість коренів рівняння або знайти межі, у яких знаходяться ці корені. У деяких випадках можна графічно довести, що рівняння не має коренів. З указаних причин у шкільному курсі алгебри і початків аналізу під вимогою «розв'язати рівняння» розуміється вимога «використовуючи методи точного розв'язування, знайти корені даного рівняння». Наближеними методами розв'язування рівнянь можна користуватися тільки тоді, коли про це говориться в умові задачі (наприклад, якщо ставиться задача розв'язати рівняння графічно).

В основному при розв'язуванні рівнянь різних видів нам доведеться використовувати один із двох методів розв'язування. Перший з них полягає в тому, що задане рівняння замінюється більш простим рівнянням, яке має ті самі корені, — рівносильним рівнянням. У свою чергу, одержане рівняння замінюється ще простішим, рівносильним йому, і т. д. У результаті одержуємо найпростіше рівняння, яке рівносильне заданому і корені якого легко знаходяться. Ці корені і тільки вони є коренями даного рівняння.

Другий метод розв'язування рівнянь полягає в тому, що задане рівняння замінюється простішим рівнянням, серед коренів якого знаходяться всі корені даного, тобто так званим рівнянням-наслідком. У свою чергу, одержане рівняння замінюється ще більш простим рівнянням-наслідком і так далі доти, поки не одержимо найпростіше рівняння, корені якого легко знаходяться. Тоді всі корені даного рівняння знаходяться серед коренів останнього рівняння. Тому, щоб знайти корені заданого рівняння, досить корені останнього рівняння підставити в задане і за допомогою такої перевірки відділити корені даного рівняння (і вилучити так звані *сторонні корені* — ті корені останнього рівняння, які не задовольняють заданому).

У наступному параграфі буде також показано застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь певного виду.

Рівняння-наслідки

Розглянемо більш детально, як можна розв'язувати рівняння за допомогою рівнянь-наслідків. При розв'язуванні рівнянь головне — не загубити корені заданого рівняння, і тому в першу чергу ми повинні стежити за тим, щоб кожен корінь початкового рівняння залишався коренем наступного. Фактично це і є означенням рівняння-наслідку: у тому випадку,

коли кожний корінь першого рівняння є коренем другого, друге рівняння називається наслідком першого.

Це означення дозволяє обґрунтувати такий орієнтир: **для одержання рівняння-наслідку досить розглянути задане рівняння як правильну числову рівність і гарантувати (тобто мати можливість обґрунтувати), що кожне наступне рівняння ми можемо одержати як правильну числову рівність.**

Дійсно, якщо дотримуватися цього орієнтиру, то кожен корінь першого рівняння перетворює це рівняння на правильну числову рівність, але тоді і друге рівняння буде правильною числовою рівністю, тобто розглядуване значення змінної є коренем і другого рівняння, а це й означає, що друге рівняння є наслідком першого.

Застосуємо наведений орієнтир до рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ (поки що не використовуючи відому умову рівності дробу нулю).

Якщо правильно, що дріб дорівнює нулю, то обов'язково його чисельник дорівнює нулю. Отже, із даного рівняння одержуємо рівняння-наслідок $x^2-1=0$. Але тоді правильно, що $(x-1)(x+1)=0$. Останнє рівняння має два корені: $x=1$ та $x=-1$. Підставляючи їх у задане рівняння, бачимо, що тільки корінь $x=1$ задовольняє початковому рівнянню. Чому це сталося?

Це відбувається тому, що, використовуючи рівняння-наслідки, ми гарантуємо тільки те, що корені заданого рівняння не втрачаються (кожний корінь першого рівняння є коренем другого). Але друге рівняння, крім коренів першого рівняння, має ще й інший корінь, який не є коренем першого рівняння. Для першого рівняння цей корінь є *стороннім*, і, щоб його відсіяти, виконується перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння. (Більш повно причини появи сторонніх коренів розглянуто в таблиці 34 на с. 192.) Отже, щоб правильно використовувати рівняння-наслідки для розв'язування рівнянь, необхідно пам'ятати ще один орієнтир: **при використанні рівнянь-наслідків можлива поява сторонніх коренів, і тому перевірка підстановкою коренів у початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.**

Схема застосування цих орієнтирів подана в таблиці 33. У пункті 3 цієї таблиці наведено розв'язання рівняння

$$\sqrt{x+2}=x. \qquad (1)$$

Для розв'язання цього рівняння за допомогою рівнянь-наслідків досить задане рівняння розглянути як правильну числову рівність і зазначити, що у випадку, коли два числа рівні, то і їхні квадрати теж будуть рівні:

$$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2. \qquad (2)$$

Отже, ми гарантуємо, що у випадку, коли рівність (1) правильна, то і рівність (2) теж буде правильною, а це й означає (як було показано вище), що рівняння (2) є наслідком рівняння (1). Якщо ми хоча б один раз використали рівняння-наслідки (а не рівносильні перетворення), то можемо отримати сторонні корені, і тоді до розв'язання обов'язково входить перевірка одержаних коренів підстановкою в задане рівняння.

Зауваження. Перехід від заданого рівняння до рівняння-наслідку можна позначити спеціальним значком $\Rightarrow$, але його використання для запису розв'язання не є обов'язковим. Разом з тим, якщо цей значок записано, то це свідчить про те, що ми скористалися рівняннями-наслідками, і тому обов'язково до запису розв'язання необхідно включити перевірку одержаних коренів.

Рівносильні рівняння

З поняттям рівносильності ви знайомі ще з курсу алгебри 7 класу, де рівносильними називалися ті рівняння, які мали одні й ті самі корені. Зауважимо, що рівносильними вважалися і такі два рівняння, які не мали коренів. Формально будемо вважати, що і в цьому випадку рівняння мають одні й ті самі корені, оскільки відповіді до таких рівнянь однакові: «рівняння не має коренів» (точніше: однаковими є множини коренів таких рівнянь — вони обидві порожні, що позначається символом $\varnothing$).

У курсі алгебри і початків аналізу ми будемо розглядати більш загальне поняття рівносильності, а саме — рівносильність на певній множині.

Два рівняння називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі корені, тобто кожен корінь першого рівняння є коренем другого і, навпаки, кожен корінь другого рівняння є коренем першого.

Для рівнянь, які задані на множині всіх дійсних чисел (наприклад, для лінійних), ми можемо однозначно дати відповідь на питання: «Чи рівносильні задані рівняння?» Наприклад, рівняння $x + 3 = 0$ і $2x + 6 = 0$ — рівносильні, оскільки обидва мають однаковий корінь $x = -3$ і інших коренів не мають, отже, кожне з них має ті самі розв'язки, що й друге.

При розгляді рівносильності рівнянь на множині, яка відрізняється від множини всіх дійсних чисел, відповідь на питання: «Чи рівносильні задані рівняння?» може суттєво залежати від того, на якій множині ми розглядаємо ці рівняння. Наприклад, якщо розглянути рівняння:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0\,, \qquad (3)$$

$$x^2 - 1 = 0, \qquad (4)$$

то, як було показано вище, рівняння (3) має тільки один корінь $x = 1$, а рівняння (4) — два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Отже, на множині всіх дійсних чисел ці рівняння не є рівносильними, оскільки у рівняння (4) є корінь $x = -1$, якого немає у рівняння (3). Але на множині додатних дійсних чисел ці рівняння рівносильні, оскільки на цій множині рівняння (3) має єдиний додатний корінь $x = 1$ і рівняння (4) теж має тільки єдиний додатний корінь $x = 1$. Отже, на множині додатних чисел кожне з цих рівнянь має ті самі розв'язки, що й друге.

Зазначимо, що множина, на якій розглядається рівносильність рівнянь, як правило, не задається штучно (як в останньому випадку), а найчастіше за таку множину вибирають ОДЗ заданого рівняння. Домовимося, що надалі

всі рівносильні перетворення рівнянь (а також нерівностей і систем рівнянь та нерівностей) ми будемо виконувати на ОДЗ заданого рівняння (нерівності чи системи). Зазначимо, що в тому випадку, коли ОДЗ заданого рівняння є множина всіх дійсних чисел, ми не завжди будемо її записувати (як не записували ОДЗ при розв'язуванні лінійних чи квадратних рівнянь). І в інших випадках головне — не записати ОДЗ до розв'язання рівняння, а реально врахувати її при виконанні рівносильних перетворень заданого рівняння.

Наприклад, для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ задається нерівністю $x + 2 \geqslant 0$. Коли ми переходимо до рівняння $x + 2 = x^2$, то для всіх його коренів це рівняння є правильною рівністю. Тоді вираз x^2, який стоїть у правій частині цієї рівності, завжди невід'ємний ($x^2 \geqslant 0$), отже, і рівний йому вираз $x + 2$ теж буде невід'ємним: $x + 2 \geqslant 0$. Але це й означає, що ОДЗ заданого рівняння ($x + 2 \geqslant 0$) враховано автоматично для всіх коренів другого рівняння і тому при переході від рівняння $\sqrt{x+2}=x$ до рівняння $x + 2 = x^2$ ОДЗ заданого рівняння можна не записувати до розв'язання.

Для виконання рівносильних перетворень спробуємо виділити загальні орієнтири, аналогічні відповідним орієнтирам одержання рівнянь-наслідків.

Як указано вище, виконуючи *рівносильні перетворення рівнянь*, необхідно **врахувати ОДЗ заданого рівняння** — це й є перший орієнтир для виконання рівносильних перетворень рівнянь.

За означенням рівносильності рівнянь потрібно гарантувати, щоб кожен корінь першого рівняння був коренем другого і навпаки — кожен корінь другого рівняння був коренем першого. Для першої частини цієї вимоги ми вже виділили загальний орієнтир: досить гарантувати збереження правильної рівності при переході від першого рівняння до другого (с. 187).

Але тоді, щоб виконати другу частину цієї вимоги, досить друге рівняння розглянути як правильну рівність (тобто взяти таке значення змінної, яке є коренем другого рівняння) і гарантувати, що при переході до першого правильна рівність зберігається (цей корінь залишається і коренем першого рівняння). Фактично з означення рівносильності рівнянь одержуємо, що *кожне з рівносильних рівнянь є наслідком другого рівняння*. Таким чином, **при виконанні рівносильних перетворень ми повинні гарантувати збереження правильної рівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих, а й при зворотних перетвореннях** — це й є другий орієнтир для розв'язування рівнянь за допомогою рівносильних перетворень. (Відповідні орієнтири схематично подано в пункті 5 таблиці 33.)

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень рівняння $\frac{x^2-1}{x+1}=0$, досить врахувати його ОДЗ: $x+1\neq 0$ і умову рівності дробу нулю (дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю). Також слід звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.

Запис розв'язання в цьому випадку може бути таким:

$\frac{x^2-1}{x+1}=0$. ▶ ОДЗ: $x+1\neq 0$. Тоді $x^2-1=0$. Отже, $x=1$ (задовольняє умові ОДЗ) або $x=-1$ (не задовольняє умові ОДЗ). *Відповідь:* 1. ◁

Для виконання рівносильних перетворень рівнянь можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність. У зв'язку з уточненням означення рівносильності рівнянь узагальнимо також формулювання найпростіших теорем про рівносильність, відомих з курсу алгебри 7 класу.

Теорема 1. ***Якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на будь-якій множині).***

Теорема 2. ***Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).***

Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне обґрунтуванню орієнтирів для рівносильних перетворень заданого рівняння.

Зауваження. Для позначення переходу від заданого рівняння до рівносильного йому рівняння можна використовувати спеціальний значок $\Leftrightarrow$, але його використання при запису розв'язань не є обов'язковим. (Хоча іноді ми його будемо використовувати, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення.)

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\frac{5}{x-2}=\frac{3}{x-1}$.

Розв'язання

ОДЗ: $x-2\neq 0$ і $x-1\neq 0$.

На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x-1}=0, \qquad (1)$$

$$\frac{5(x-1)-3(x-2)}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (2)$$

$$\frac{2x+1}{(x-2)(x-1)}=0, \qquad (3)$$

$$2x+1=0, \qquad (4)$$

тобто $x=-\frac{1}{2}$.

Врахуємо ОДЗ. При $x=-\frac{1}{2}$:

$$x-2=-\frac{1}{2}-2=-2\frac{1}{2}\neq 0,$$

$$x-1=-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{2}\neq 0.$$

Отже, $x=-\frac{1}{2}$ — корінь.

Відповідь: $-\frac{1}{2}$. ◁

Коментар

Використаємо рівносильні перетворення для розв'язування заданого рівняння. Для цього необхідно врахувати ОДЗ, тому зафіксуємо її обмеження на початку розв'язання.

Зазначимо, що *в рівняннях обмеження ОДЗ можна тільки зафіксувати, але не розв'язувати, а в кінці перевірити, чи виконуються ці обмеження для знайдених коренів.*

При перенесенні члена заданого рівняння з однієї частини рівняння в іншу з протилежним знаком одержуємо рівняння (1), рівносильне заданому.

Зводячи до спільного знаменника, розкриваючи дужки і зводячи подібні члени, знову одержуємо правильну рівність і можемо обґрунтувати, що при виконанні зворотних дій рівність теж не порушується, отже, одержані рівняння (1)–(3) рівносильні заданому (на його ОДЗ).

Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю. Але друга умова вже врахована в обмеженнях ОДЗ, отже, одержуємо рівняння (4), рівносильне заданому рівнянню на його ОДЗ. Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки з урахуванням ОДЗ, то ми повинні перевірити, чи задовольняє одержане число обмеженням ОДЗ.

4. Причини появи сторонніх коренів та втрати коренів при розв'язуванні рівнянь. Найбільш типові випадки появи сторонніх коренів та втрати коренів наведено в таблиці 34. Там же вказано, як у кожному з цих випадків одержати правильне (чи повне) розв'язання.

Причина	При яких перетвореннях це може відбуватися	Приклад неправильного (чи неповного) розв'язання
		1. Поява сторонніх коренів
Одержання рівнянь-наслідків за рахунок: **а) переходу до рівняння, у якого ОДЗ ширша, ніж у заданого рівняння;**	**1. Зведення подібних членів.**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. Перенесемо з правої частини рівняння в ліву доданок $\sqrt{x-2}$ з протилежним знаком і зведемо подібні члени. Одержимо $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$.
	2. Зведення обох частин рівняння до спільного знаменника (при відкиданні знаменника).	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. Помножимо обидві частини рівняння на спільний знаменник усіх дробів $(x+2)(x+3)$. Одержимо $4(x+3)+7(x+2)=4$, $11x=-22$, $x=-2$.
	3. Піднесення обох частин ірраціонального рівняння до квадрата.	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. $2x+1=x$, $x=-1$.
б) виконання перетворень, при яких відбувається неявне множення на нуль;	**Множення обох частин рівняння на вираз із змінною.**	$x^2+x+1=0$. Помножимо обидві частини рівняння на $x-1$. $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Одержимо $x^3-1=0$, $x=1$.

Таблиця 34

	Де помилка	Як одержати правильне (чи повне) розв'язання	Приклад правильного (чи повного) розв'язання
при розв'язуванні рівняння			
	$x_1 = 0$ не є коренем заданого рівняння.		$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}.$ ▶ $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$. Перевірка показує, що $x_1=0$ — сторонній корінь, $x_2=6$ — корінь. *Відповідь:* 6. ◁
	$x = -2$ не є коренем заданого рівняння.	**Виконати перевірку підстановкою коренів у задане рівняння.**	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}.$ ▶ $4(x+3)+7(x+2)=4$; $11x=-22$, $x=-2$. Перевірка показує, що $x=-2$ — сторонній корінь. *Відповідь:* коренів немає. ◁
	$x = -1$ не є коренем заданого рівняння.		$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}.$ ▶ $2x+1=x$, $x=-1$. Перевірка показує, що $x=-1$ — сторонній корінь. *Відповідь:* коренів немає. ◁
	$x = 1$ не є коренем заданого рівняння.		У даному рівнянні не було необхідності множити на $x-1$. $x^2+x+1=0$. ▶ $D=-3<0$. *Відповідь:* коренів немає. ◁ Якщо використати множення обох частин рівняння на $x-1$, то перевірка показує, що $x=1$ — сторонній корінь, тобто рівняння не має коренів.

Причина	При яких перетвореннях це може відбуватися	Приклад неправильного (чи неповного) розв'язання
		1. Поява сторонніх коренів
в) застосування до обох частин рівняння функції, яка не є зростаючою або спадною.	**Піднесення обох частин рівняння до парного степеня або застосування до обох частин рівняння тригонометричних функцій** (див. с. 214)	$x - 1 = 2x + 1.$ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата $(x - 1)^2 = (2x + 1)^2.$ Одержимо $3x^2 + 6x = 0,$ $x_1 = 0,\ x_2 = -2.$
		2. Втрата коренів
Явне чи неявне *звуження ОДЗ заданого рівняння*, зокрема, виконання перетворень, у процесі яких відбувається неявне ділення на нуль.	**1. Ділення обох частин рівняння на вираз із змінною.**	$x^2 = x.$ Поділивши обидві частини рівняння на x, одержимо $x = 1.$
	2. Додавання, віднімання, множення або ділення обох частин рівняння на вираз, у якого ОДЗ вужча, ніж у заданого рівняння.	$x^2 = 1.$ Якщо до обох частин рівняння додати $\sqrt{x}$, то одержимо рівняння $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x},$ у якого тільки один корінь $x = 1.$

Продовж. табл. 34

<table>
<tr><th></th><th>Де помилка</th><th>Як одержати правильне (чи повне) розв'язання</th><th>Приклад правильного (чи повного) розв'язання</th></tr>
<tr><td colspan="4">при розв'язуванні рівняння</td></tr>
<tr><td></td><td>$x_1 = 0$ не є коренем заданого рівняння.</td><td>Виконати перевірку підстановкою коренів у задане рівняння.</td><td>У даному рівнянні не було необхідності підносити до квадрата.
$x - 1 = 2x + 1.$
▶ $x - 2x = 1 + 1$, $x = -2$.
Відповідь: -2. ◁
Якщо використати піднесення до квадрата, то перевірка показує, що $x_2 = -2$ — корінь, а $x_1 = 0$ — сторонній корінь.</td></tr>
<tr><td colspan="4">при розв'язуванні рівняння</td></tr>
<tr><td></td><td>Втратили корінь $x = 0$, оскільки після ділення на x фактично одержали рівняння
$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$,
у якого ОДЗ: $x \neq 0$, тобто звузили ОДЗ заданого рівняння.</td><td rowspan="2">Ті значення, на які звузилася ОДЗ, необхідно розглянути окремо.</td><td>$x^2 = x.$
▶ 1. При $x = 0$ одержуємо $0^2 = 0$ — правильна рівність, отже, $x = 0$ — корінь.
2. При $x \neq 0$ одержуємо
$\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, $x = 1$.
Відповідь. 0; 1. ◁
(Звичайно, зручніше розв'язувати так: $x^2 - x = 0$, $x(x - 1) = 0$, $x = 0$ або $x = 1$.)</td></tr>
<tr><td></td><td>Втратили корінь $x = -1$, оскільки ОДЗ заданого рівняння: x — будь-яке число, а $\sqrt{x}$ існує тільки при $x \geqslant 0$.</td><td>У даному рівнянні не було необхідності додавати до обох частин $\sqrt{x}$.
▶ $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.
Відповідь: ± 1. ◁
(Якби довелося додавати до обох частин $\sqrt{x}$, то при $x < 0$ задане рівняння потрібно розглянути окремо, і тоді одержимо ще й корінь $x = -1$.)</td></tr>
</table>

Запитання для контролю

1. Що називається коренем рівняння? Наведіть приклади.
2. Дайте означення області допустимих значень (ОДЗ) рівняння. Наведіть приклади.
3. Дайте означення рівняння-наслідку даного рівняння. Наведіть приклади. Поясніть, у якому випадку можна гарантувати, що в результаті перетворення рівняння одержали рівняння-наслідок.
4. Дайте означення рівносильних рівнянь. Наведіть приклади. Поясніть, у якому випадку можна гарантувати, що в результаті перетворення рівняння одержали рівняння, рівносильне заданому.
5. Сформулюйте основні теореми про рівносильність рівнянь. Наведіть приклади їх використання.
6. Поясніть, у результаті яких перетворень заданого рівняння можна одержати сторонні для даного рівняння корені. Як можна відсіяти сторонні корені? Наведіть приклади.
7. Поясніть, у результаті яких перетворень заданого рівняння можна втратити корені даного рівняння. Наведіть приклади. Поясніть на прикладах, як необхідно доповнити відповідні перетворення, щоб не втратити корені даного рівняння.

Вправи

1. Знайдіть область допустимих значень (ОДЗ) рівняння:

1) $\frac{x-5}{x+2}-\frac{2x-3}{x}=0$; 2) $\frac{2x+1}{3}-\frac{x}{x^2+1}=0$; 3) $\sqrt{x}=\frac{3x-6}{x-1}$; 4) $\sqrt{x^2+5}-\frac{x-5}{x+4}=0$.

2. З'ясуйте: а) чи є друге рівняння наслідком першого;
б) чи є ці рівняння рівносильними (відповідь обґрунтуйте):

1) $2x^2-8x-9=0$ і $x^2-4x-4{,}5=0$; 2) $\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=0$ і $x^2-4=0$.

3. Обґрунтуйте рівносильність рівнянь:
1) $5x-8=7-3x$ і $5x+3x=7+8$; 2) $(2x-1)(x^2+5)=x(x^2+5)$ і $2x-1=x$.

4. Обґрунтуйте, що задані рівняння не є рівносильними:

1) $x^2+\frac{1}{x+3}=9+\frac{1}{x+3}$ і $x^2=9$; 2) $(2x-1)(x^2-5)=x(x^2-5)$ і $2x-1=x$.

5. Поясніть, які перетворення було використано при переході від першого рівняння до другого і чи можуть вони приводити до порушення рівносильності:
1) $3x+1{,}1=6{,}8-2x$ і $3x+2x=6{,}8-1{,}1$;
2) $\frac{x^2-81}{x+9}+3x^2-1=0$ і $x-9+3x^2-1=0$;
3) $\frac{5}{3x-1}+x=3$ і $5+x(3x-1)=3(3x-1)$;
4) $\sqrt{x^2-1}=x-2$ і $x^2-1=x^2-4x+4$.

6. Чи є рівносильними задані рівняння на ОДЗ першого з них:

1) $5 - x = x + 7$ і $5-x+\frac{1}{x-3}=x+7+\frac{1}{x-3}$;

2) $\frac{12-2x}{x-2}=\frac{x-5}{x-2}$ і $12 - 2x = x - 5$;

3) $6 - x = 10$ і $6-x+\sqrt{x}-\sqrt{x}=10$;

4) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 6) = 5(x^2 + 6)$ і $x^2 + 2x - 3 = 5$;

5) $x^2 - 1 = 6x - 1$ і $\frac{x^2-1}{x}=\frac{6x-1}{x}$?

7. Розв'яжіть рівняння і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $\frac{8}{x}-\frac{5-x}{2}=\frac{8+3x}{x}-x$;

2) $\frac{x}{4}+\frac{(x-2)^2+8}{x}=\frac{(4-x)(2-x)}{x}$;

3) $\frac{7}{x+3}-\frac{1}{3-x}=\frac{6}{x^2-9}-\frac{x-4}{3+x}$;

4) $\frac{1}{x-2}+\frac{x-6}{3x^2-12}=\frac{1}{2-x}-1$.

8. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків і вкажіть, яке перетворення могло привести до порушення рівносильності:

1) $3x+\sqrt{x-2}=5x-1+\sqrt{x-2}$;

2) $\sqrt{2x+5}=x+1$;

3) $\sqrt{3-2x}=1-x$;

4) $\sqrt{5+x^2}=x-4$.

9. За якої умови рівняння є рівносильними:

1) $\frac{f(x)}{2x-3}=g(x)$ і $f(x) = g(x)(2x - 3)$;

2) $f(x)+\sqrt{x}=g(x)+\sqrt{x}$ і $f(x) = g(x)$?

10. Чи може відбутися втрата коренів або поява сторонніх коренів, якщо:
1) рівняння $(x^2 + 7) f(x) = 4x^2 + 28$ замінити рівнянням $f(x) = 4$;
2) рівняння $(x - 1) f(x) = (x - 1) g(x)$ замінити рівнянням $f(x) = g(x)$;

3) рівняння $\frac{f(x)}{x+3}=\frac{g(x)}{x+3}$ замінити рівнянням $f(x) = g(x)$;

4) рівняння $\frac{f(x)}{3x^2+5}=0$ замінити рівнянням $f(x) = 0$?

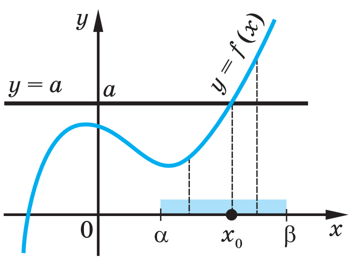
11. Розв'яжіть рівняння і обґрунтуйте, що побудовано ланцюжок рівносильних рівнянь:
1) $13 - (x - 1)^2 + (2x - 1)(x + 1) = (x + 2)^2$;
2) $(x - 1)^3 - (x - 3)^3 = 3x + 26$;
3) $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 = 6(x^2 + x + 1)$;
4) $(3x - 1)^2 + (6x - 3)(2x + 1) = (x - 1)^2 + 5(2x + 1)^2$.

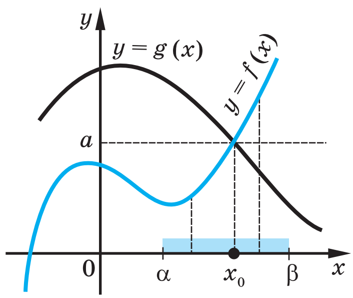
§ 18 ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

Таблиця 35

<table>
<tr><th>Орієнтир</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Скінченна ОДЗ</td></tr>
<tr><td>Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення.</td><td>$\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$.
▶ ОДЗ: $\begin{cases}x^2-1\geqslant 0,\\ 2-2x^2\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2\geqslant 1,\\ x^2\leqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$.
Перевірка.
$x=1$ — корінь
$\left(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0},\ 1=1\right)$,
$x=-1$ — не корінь $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$.
Відповідь: 1. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Оцінка лівої та правої частин рівняння</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|l|}\hline f(x)=g(x)\\ \hline f(x)\geqslant a,\\ g(x)\leqslant a\\ \hline\end{array}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=a,\\ g(x)=a\end{cases}$
Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a.</td><td>$1-x^2=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}$.
▶ $f(x)=1-x^2\leqslant 1$,
$g(x)=\sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}\geqslant 1$ (бо $\sqrt{\lvert x\rvert}\geqslant 0$).
Отже, задане рівняння рівносильне системі
$\begin{cases}1-x^2=1,\\ \sqrt{1+\sqrt{\lvert x\rvert}}=1\end{cases}\Leftrightarrow x=0.$
Відповідь: 0. ◁</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{|l|}\hline f_1(x)+f_2(x)+\\ \quad +\ldots+f_n(x)=0\\ \hline f_1(x)\geqslant 0,\\ f_2(x)\geqslant 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)\geqslant 0\\ \hline\end{array}\Leftrightarrow\begin{cases}f_1(x)=0,\\ f_2(x)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ f_n(x)=0.\end{cases}$
Сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.</td><td>$\sqrt{x-2}+\lvert x^2-2x\rvert+\left(x^2-4\right)^2=0$.
▶ $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=$
$=\lvert x^2-2x\rvert\geqslant 0$, $f_3(x)=(x^2-4)^2\geqslant 0$.
Отже, задане рівняння рівносиль-
не системі $\begin{cases}\sqrt{x-2}=0,\\ \lvert x^2-2x\rvert=0,\\ \left(x^2-4\right)^2=0.\end{cases}$
З першого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє всій системі.
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 35

<table>
<tr><td colspan="2">3. Використання зростання та спадання функцій</td></tr>
<tr><td colspan="2">Схема розв'язування рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. Підбираємо один або декілька коренів рівняння.
2. Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння).</td></tr>
<tr><td rowspan="2">
</td><td>Теореми про корені рівняння</td></tr>
<tr><td>1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад
Рівняння $\sqrt{x} + 2x^3 = 3$ має єдиний корінь $x = 1$ $\left(\sqrt{1} + 2\cdot 1^3 = 3\right.$, тобто $3 = 3)$, оскільки функція $f(x) = \sqrt{x} + 2x^3$ зростає на всій області визначення $x \geqslant 0$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад
Рівняння $\sqrt{x} + x^3 = 3 - x$ має єдиний корінь $x = 1$ $\left(\sqrt{1} + 1^3 = 3 - 1\right.$, тобто $2 = 2)$, оскільки $f(x) = \sqrt{x} + x^3$ зростає на всій області визначення $x \geqslant 0$, а $g(x) = 3 - x$ спадає (на множині $\boldsymbol{R}$, а отже, і при $x \geqslant 0$).</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Скінченна ОДЗ. Нагадаємо, що у випадку, коли задано рівняння $f(x) = g(x)$, спільна область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається *областю допустимих значень* цього рівняння. Зрозуміло, що кожен корінь заданого рівняння входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$. Отже, *кожен корінь рівняння обов'язково входить до ОДЗ цього рівняння*. Це дозволяє в деяких випадках за рахунок аналізу ОДЗ одержати розв'язки рівняння.

Наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-2x}=3x-6$, то його ОДЗ можна задати за допомогою системи $\begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 4-2x \geqslant 0. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, одержуємо $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ тобто $x=2$. Отже, ОДЗ заданого рівняння складається лише з одного значення $x=2$. Але якщо тільки для одного числа потрібно з'ясувати, чи є воно коренем заданого рівняння, то для цього досить підставити це значення в рівняння. У результаті одержуємо правильну числову рівність $(0=0)$. Отже, $x=2$ — корінь даного рівняння. Інших коренів у цього рівняння бути не може, оскільки всі корені рівняння знаходяться в його ОДЗ, а там немає інших значень, крім $x=2$.

Розглянутий приклад дозволяє виділити орієнтир для розв'язування аналогічних рівнянь:

якщо ОДЗ рівняння (а також нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення.

Зауваження. *У тому випадку, коли ОДЗ — порожня множина (не містить жодного числа), ми можемо зразу дати відповідь, що задане рівняння не має коренів.*

Наприклад, якщо потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{x-3}=\sqrt{2-x}+5x$, то його ОДЗ задається системою $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ яка не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

2. Оцінка лівої та правої частин рівняння. Деякі рівняння можна розв'язати за допомогою оцінки лівої та правої частин рівняння.

Нехай ми розв'язуємо рівняння $f(x)=g(x)$, і нам удалося з'ясувати, що для всіх допустимих значень x значення $f(x) \geqslant a$, а значення $g(x) \leqslant a$.

- Розглянемо два випадки: 1) $f(x)>a$; 2) $f(x)=a$.
  Якщо $f(x)>a$, то рівність $f(x)=g(x)$ не може виконуватися, бо $g(x) \leqslant a$, тобто при $f(x)>a$ задане рівняння коренів не має. Залишається тільки випадок $f(x)=a$, але, враховуючи необхідність виконання рівності $f(x)=g(x)$, маємо, що тоді і $g(x)=a$. Отже, ми обґрунтували, що виконання рівності $f(x)=g(x)$ (за умов $f(x) \geqslant a$ і $g(x) \leqslant a$) гарантує одночасне

виконання рівностей $f(x)=a$ і $g(x)=a$ (і, навпаки, якщо одночасно виконуються рівності $f(x)=a$ і $g(x)=a$, то виконується і рівність $f(x)=g(x)$). Як було показано в § 17, це й означає, що рівняння $f(x)=g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$ Коротко це можна записати так:

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a, \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a. \end{cases}$$

Приклад використання такого прийому розв'язування рівнянь наведено в пункті 2 таблиці 35.

Аналогічно до попередніх міркувань обґрунтовується і орієнтир по розв'язуванню рівняння $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0$, у якому всі функції-доданки невід'ємні ($f_1(x)\geqslant 0$; $f_2(x)\geqslant 0$; ...; $f_n(x)\geqslant 0$).

Якщо припустити, що $f_1(x)>0$, то сума всіх функцій, що стоять у лівій частині цього рівняння, може дорівнювати нулю тільки тоді, коли сума $f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ буде від'ємною. Але це неможливо, оскільки за умовою всі функції невід'ємні. Отже, при $f_1(x)>0$ задане рівняння не має коренів. Ці самі міркування можна повторити для будь-якої іншої функції-доданка. Залишається єдина можливість — усі функції-доданки дорівнюють нулю (очевидно, що в цьому випадку рівність $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0$ обов'язково буде виконуватися). Таким чином, *сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.*

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $x^4+|x-1|=2x^2-1$, досить перенести всі члени в один бік, записати рівняння у вигляді $(x^2-1)^2+|x-1|=0$ і взяти до уваги, що $(x^2-1)^2$ і $|x-1|$ — невід'ємні функції. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} (x^2-1)^2=0, \\ |x-1|=0. \end{cases}$ З другого рівняння одержуємо $x=1$, що задовольняє і всій системі. Отже, задане рівняння має єдиний корінь $x=1$.

3. Використання зростання та спадання функцій до розв'язування рівнянь спирається на таку властивість: *зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення.*

Корисно пам'ятати спеціальні теореми про корені рівняння.

Теорема 1. **Якщо в рівнянні $f(x)=a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.**

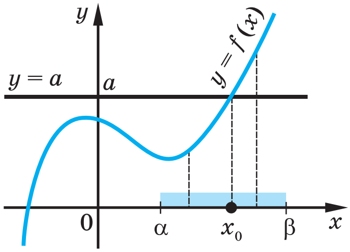


Рис. 96

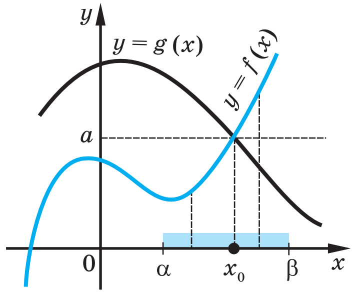


Рис. 97

Графічно твердження теореми проілюстровано на рисунку 96. Пряма $y = a$ перетинає графік зростаючої на проміжку $[\alpha; \beta]$ функції $y = f(x)$ тільки в одній точці. Це й означає, що рівняння $f(x) = a$ не може мати більше одного кореня на проміжку $[\alpha; \beta]$. Доведемо це твердження аналітично.

● Якщо на проміжку $[\alpha; \beta]$ рівняння має корінь x_0, то $f(x_0) = a$. Інших коренів бути не може, оскільки для зростаючої функції $f(x)$ при $x > x_0$ одержуємо $f(x) > f(x_0) = a$, а при $x < x_0$ маємо $f(x) < f(x_0) = a$. Отже, при $x \neq x_0$ $f(x) \neq a$. Аналогічно і для спадної функції при $x \neq x_0$ одержуємо $f(x) \neq a$. ○

Теорема 2. **Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.**

Графічно твердження теореми проілюстровано на рисунку 97.

● Якщо на проміжку $[\alpha; \beta]$ рівняння має корінь x_0, то $f(x_0) = g(x_0) = a$. Інших коренів бути не може, оскільки, наприклад, для зростаючої функції $f(x)$ і спадної функції $g(x)$ при $x > x_0$ маємо $f(x) > a$, а $g(x) < a$, отже, $f(x) \neq g(x)$. Аналогічно і при $x < x_0$ $f(x) \neq g(x)$. ○

Кожна з цих теорем стверджує, що *в розглянутому проміжку задане рівняння може мати не більш ніж один корінь, тобто або це рівняння зовсім не має коренів, або воно має тільки єдиний корінь.* Якщо нам вдалося підібрати один корінь такого рівняння, то інших коренів у заданому проміжку рівняння не має.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $x^3 + x = 10$, досить помітити, що функція $f(x) = x^3 + x$ є зростаючою на всій числовій прямій (як сума двох зростаючих функцій) і що $x = 2$ — корінь* цього рівняння ($2^3 + 2 = 10$; $10 = 10$). Отже, задане рівняння $f(x) = 10$ має єдиний корінь $x = 2$.

Зазначимо, що кожна з цих теорем гарантує єдиність кореня рівняння (якщо він є) тільки на проміжку зростання (чи спадання) відповідної функції.

---

* Корінь $x = 2$ одержано підбиранням. Як правило, підбір починають з цілих значень: $x = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, які підставляються в задане рівняння.

Якщо функція має декілька проміжків зростання і спадання, то доводиться розглядати кожен з них окремо.

Приклад Розв'яжемо за допомогою теореми 2 рівняння $x^3+x=\frac{2}{x}$.

▶ Спочатку слід урахувати його ОДЗ: $x\neq 0$ і згадати, що функція $y=\frac{2}{x}$ на всій області визначення не є ні спадною, ні зростаючою (с. 22), але вона спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Тому розглянемо кожен з цих проміжків окремо.

1) При $x>0$ задане рівняння має корінь $x=1$ $\left(1^3+1=\frac{2}{1},\ 2=2\right)$.
   Функція $f(x)=x^3+x$ зростає при $x>0$ (як показано вище, вона зростає на множині $\boldsymbol{R}$), а функція $g(x)=\frac{2}{x}$ спадає на проміжку $x>0$. Отже, задане рівняння $f(x)=g(x)$ при $x>0$ має єдиний корінь $x=1$.
2) При $x<0$ задане рівняння має корінь $x=-1$ $\left((-1)^3+(-1)=\frac{2}{-1},\ -2=-2\right)$.
   Функція $f(x)=x^3+x$ зростає при $x<0$, а функція $g(x)=\frac{2}{x}$ спадає на цьому проміжку. Тому задане рівняння $f(x)=g(x)$ при $x<0$ має єдиний корінь $x=-1$.
   У відповідь слід записати всі знайдені корені (хоч на кожному з проміжків корінь єдиний, але всього коренів — два). Отже, задане рівняння має тільки два корені: 1 і -1. ◁

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $x^4+\frac{1}{x^4}=2-(x-1)^2$.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x\neq 0$. На ОДЗ $x^4>0$. Тоді функція $f(x)=x^4+\frac{1}{x^4}\geqslant 2$ (як сума двох взаємно обернених додатних чисел), а функція $g(x)=2-(x-1)^2\leqslant 2$. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}x^4+\frac{1}{x^4}=2,\\ 2-(x-1)^2=2.\end{cases}$ З другого рівняння системи одержуємо $x=1$, що

Коментар

Якщо розкрити дужки і звести обидві частини рівняння до спільного знаменника, то для знаходження коренів одержаного рівняння доведеться розв'язувати повне рівняння восьмого степеня, усі корені якого ми не зможемо знайти.

Спробуємо оцінити області значень функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння. Оскільки на ОДЗ ($x\neq 0$) $x^4>0$, то в лівій частині

задовольняє і першому рівнянню. Отже, система (а значить, і задане рівняння) має єдиний розв'язок $x = 1$.
Відповідь: 1. ◁

рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел*, яка *завжди більша або дорівнює* 2. У правій частині від 2 віднімається невід'ємне число $(x-1)^2$. Отже, при всіх значеннях x одержуємо значення, менші або рівні 2. Рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли обидві частини дорівнюють 2.

Приклад 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x}+x^3=\sqrt{y}+y^3,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x \geqslant 0,\\ y \geqslant 0.\end{cases}$ Розглянемо функцію $f(t)=\sqrt{t}+t^3$. На своїй області визначення ($t \geqslant 0$) ця функція є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій). Тоді перше рівняння заданої системи, яке має вигляд $f(x) = f(y)$, рівносильне рівнянню $x = y$. Отже, на ОДЗ задана система рівносильна системі $\begin{cases}x=y,\\ x^2+3y^2=36.\end{cases}$ Підставляючи $x = y$ в друге рівняння системи, маємо $4y^2 = 36$, $y^2 = 9$, $y = \pm 3$. Враховуючи, що на ОДЗ $y \geqslant 0$, одержуємо $y = 3$. Тоді $x = y = 3$.
Відповідь: (3; 3). ◁

Коментар

Іноді властивості функцій удається використати при розв'язуванні систем рівнянь. Якщо помітити, що в лівій і правій частинах першого рівняння заданої системи стоять значення однієї і тієї ж функції, яка є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то *рівність $f(x) = f(y)$ для зростаючої функції можлива тоді і тільки тоді, коли $x = y$, оскільки однакових значень зростаюча функція може набувати тільки при одному значенні аргументу.* (Зауважимо, що така сама властивість матиме місце і для спадної функції.)

Зауваження. Твердження, яке було обґрунтовано в коментарі до прикладу 2, може бути використано при розв'язуванні аналогічних завдань. Коротко його можна сформулювати так: **якщо функція $f(x)$ є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.**

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування рівнянь.

2*. Обґрунтуйте правильність орієнтирів по розв'язуванню рівнянь з використанням властивостей функцій, які наведено в таблиці 35 (с. 198).

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–4)**, використовуючи властивості відповідних функцій.

1. 1) $\sqrt{x-2}+x^2=\sqrt{4-2x}+x+2;$

2) $2x+\sqrt{x^2-9}=x^2+\sqrt{18-2x^2}-3;$

3) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1+3x}+\sqrt{4x^2+y^2-2y-3}=\sqrt{x^4-1}-2y+3.$

2. 1) $\sqrt{4+x^2}=2-x^4;$ 2) $1+|x^5+3x|=\sqrt{1-x^2};$

3) $x^6+\frac{1}{x^6}=1-2x-x^2;$ 4) $\sqrt{2x}+\frac{1}{\sqrt{2x}}=2-|2x-1|.$

3. 1) $|x^2-7x+12|+|x^2-9|+|6-2x|=0;$

2) $|x+2|+|y-5|+|2x^2-8|=0;$

3) $\sqrt{1-y}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-3x}=0;$

4) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2-x}=0;$

5) $x^2+y^2+5=4x+2y;$

6) $3x^2+y^2+2z^2=4y-6x-12z-25.$

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-6}=2;$ 2) $x+\sqrt{x}+x^9=3;$

3) $2\sqrt{x+1}+\sqrt{x+9}=5-x;$ 4) $\sqrt{x-2}+x=\frac{40}{x-1};$

5) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=\frac{10}{x};$ 6) $2x+\sqrt{x}=\sqrt{10-x}.$

5. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+x^5=y+y^5, \\ x^2+3y=10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{-x}-x=\sqrt{-y}-y, \\ x^3+y^3=-16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3-y^3=y^5-x^5, \\ x^2+y^2=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sqrt{-3x}-\sqrt{-3y}=x-y, \\ 3x^2-y^2=8. \end{cases}$

§ 19 ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Іноді доводиться розв'язувати тригонометричні рівняння, до яких входить лише сума або різниця синуса і косинуса одного і того самого аргументу та їх добуток. У такому випадку доцільно цю суму (або різницю) позначити новою змінною.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

К о м е н т а р

Якщо в заданому рівнянні звести всі тригонометричні функції до одного аргументу x, то одержимо рівняння (1) (див. розв'язання), до якого входять лише сума синуса та косинуса одного і того самого аргументу x і їх добуток. Для розв'язування цього рівняння введемо нову змінну $\sin x + \cos x = y$. Щоб одержати добуток $\sin x \cos x$, досить піднести до квадрата обидві частини рівності заміни і врахувати, що $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Виконуючи обернену заміну, зручно врахувати, що $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Р о з в' я з а н н я

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$3(\sin x + \cos x) = 4\sin x \cos x. \qquad (1)$$

Якщо позначити $\sin x + \cos x = y$, то $\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = y^2$. Тоді $\sin x\cos x = \frac{y^2 - 1}{2}$. Підставляючи ці значення в рівняння (1), одержуємо

$$3y = 2y^2 - 2,\ 2y^2 - 3y - 2 = 0,\ y_1 = 2 \text{ або } y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $\sin x + \cos x = 2$ або $\sin x + \cos x = -\frac{1}{2}$.

Тоді $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2$ або $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$. Одержуємо

$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ (коренів немає, оскільки $\sqrt{2} > 1$) або $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Звідси

$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Тоді $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \pi n$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

З а у в а ж е н н я. При піднесенні обох частин рівняння до квадрата можна одержати сторонні корені (див. таблицю 34). Але *піднесення обох частин рівності заміни до квадрата є рівносильним перетворенням.* Дійсно, у цьому випадку ліва і права частини рівності мають однакові знаки, і тоді $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$. Якщо обидві частини рівності $a = b$ додатні, то для додатних значень t функція $y = t^2$ зростає і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу. Отже, при $a > 0$, $b > 0$ з рівності $a = b$ випливає рівність $a^2 = b^2$ і, навпаки, з рівності $a^2 = b^2$ випливає рівність $a = b$, що й гарантує рівносильність виконаного перетворення для додатних a і b. Аналогічно для $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$ використовуємо те, що для від’ємних значень t функція $y = t^2$ спадає і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу.

Для розв’язування деяких тригонометричних рівнянь можуть застосовуватися властивості функцій (відповідні загальні підходи до розв’язування було розглянуто в § 18), зокрема, оцінка лівої і правої частин рівняння.

Приклад 2 Розв’яжіть рівняння $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2} = 2.$

▶ Оцінимо область значень функції $f(x) = \cos 6x + \sin\frac{5x}{2}.$

Оскільки $|\cos 6x| \leqslant 1$ і $\left|\sin\frac{5x}{2}\right| \leqslant 1$, то $|f(x)| \leqslant 2$, тобто $-2 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

З’ясуємо, чи існують такі значення x, при яких функція $f(x)$ може досягати найбільшого значення 2. Якщо $\cos 6x$ буде менший від 1, то для того, щоб сума $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ дорівнювала 2, необхідно, щоб значення $\sin\frac{5x}{2}$ було більшим від 1, що неможливо. Аналогічно, якщо припустити, що $\sin\frac{5x}{2}$ менший від 1, то для того, щоб сума $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2}$ дорівнювала 2, необхідно, щоб значення $\cos 6x$ було більшим від 1, що неможливо. Таким чином, рівність у даному рівнянні можлива тоді і тільки тоді, коли $\cos 6x$ і $\sin\frac{5x}{2}$ дорівнюють 1. Тому задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos 6x = 1, \\ \sin\frac{5x}{2} = 1. \end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases} 6x = 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases} \text{ Тоді } \begin{cases} x = \frac{\pi k}{3}, \\ x = \frac{\pi + 4\pi n}{5}. \end{cases}$$

Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержуємо

$$\frac{\pi k}{3} = \frac{\pi + 4\pi n}{5}. \text{ Звідси } k = \frac{3 + 12n}{5}.$$

Оскільки k і n — цілі числа, то спробуємо підставити в праву частину останньої рівності замість n цілі числа і знайти, для яких значень n за цією формулою k також буде цілим числом. При $n = 1$ одержуємо $k = 3$. У випадку, коли коефіцієнт 12 при змінній n у чисельнику дробу і знаменник 5 — взаємно прості числа, повторення подільності націло буде тільки через знаменник, тобто через 5. Тому останнє рівняння має розв’язки в цілих числах вигляду $n = 1 + 5m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. Підставляючи значення n в один із розв’язків системи, одержуємо $x = \pi + 4\pi m$. Ці значення і є розв'язками останньої системи, отже, і розв'язками даного рівняння.

Відповідь: $x = \pi + 4\pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2}\left|\sin x + \cos x\right| = 2 + \sin^6 8x$.

К о м е н т а р

Перетворимо ліву частину за формулою $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ і оцінимо область значень функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння. Розв'язуючи одержану систему двох рівнянь з одним невідомим, можна дещо спростити викладки і розв'язати лише одне рівняння системи, а для іншого перевірити, чи задовольняють йому одержані розв'язки.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2 + \sin^6 8x. \tag{1}$$

Позначимо: $f(x) = 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$, $g(x) = 2 + \sin^6 8x$. Оскільки $0 \leqslant \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 1$, то $0 \leqslant f(x) \leqslant 2$. Проте $0 \leqslant \sin^6 8x \leqslant 1$, тому $2 \leqslant g(x) \leqslant 3$.

Ліва частина рівняння (1) менша або дорівнює 2, а права частина більша або дорівнює 2. Рівність між ними можлива тоді і тільки тоді, коли ліва і права частини рівняння дорівнюють 2, тобто дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 2\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2, \\ 2 + \sin^6 8x = 2. \end{cases}$$

З першого рівняння системи маємо $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \pm 1$, звідки $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, де $n \in \boldsymbol{Z}$. Тоді $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Перевіримо, чи задовольняють знайдені значення другому рівнянню системи. Якщо $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, то $8x = 2\pi + 8\pi n$, тоді $\sin 8x = 0$ і тому $2 + \sin^6 8x = 2$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Іноді для розв'язування тригонометричних рівнянь доводиться застосовувати тригонометричні формули, які приводять до звуження ОДЗ заданого рівняння. Такі перетворення можуть приводити до втрати коренів рівняння. Щоб цього не сталося, можна користуватися таким о р і є н т и р о м:

якщо для розв'язування рівнянь (чи нерівностей) доводиться виконувати перетворення, що звужують ОДЗ початкового рівняння (чи нерівності), то ті значення, на які звужується ОДЗ, потрібно розглядати окремо.

У таблиці 36 указано тригонометричні *формули, які можуть приводити до звуження ОДЗ*, та відповідні значення змінної, які доводиться перевіряти при використанні цих формул.

Таблиця 36

Формула (використовується зліва направо)	Значення змінної, які треба перевірити окремо, якщо вони входять до ОДЗ початкового рівняння
$\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\operatorname{tg}(x\pm\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\alpha}\ \left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}\right)$ $\operatorname{tg} 2x=\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\operatorname{ctg} x}$ $\operatorname{ctg}(x\pm\alpha)=\dfrac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg}\alpha\mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg} x}\ (\alpha\neq\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z})$ $\operatorname{ctg} 2x=\dfrac{\operatorname{ctg}^2 x-1}{2\operatorname{ctg} x}$	$x=\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$
$\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$	$x=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$
$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$	$x=2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$
$\sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\quad\operatorname{tg} x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\quad\operatorname{ctg} x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$	$x=\pi+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$

Щоб упевнитися, що наведені формули приводять до звуження ОДЗ, досить порівняти області допустимих значень їх лівих і правих частин.

Наприклад, розглянемо формулу $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

ОДЗ лівої частини: $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Для знаходження ОДЗ правої частини формули враховуємо, що знаменник дробу не дорівнює нулю: $\operatorname{tg} x \neq 0$, отже, $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і також умову існування тангенса: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тобто ОДЗ правої частини задається системою обмежень $\begin{cases} x \neq \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

Порівнюючи ОДЗ лівої і правої частин розглянутої формули, бачимо, що ОДЗ правої частини містить додаткове обмеження $\left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$. Отже, при переході за цією формулою від її лівої частини до правої відбувається звуження ОДЗ (відкидаються саме ті значення, які вказано в таблиці: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$). Щоб не загубити корені заданого рівняння, при використанні формули $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ потрібно розглянути окремо (звичайно, тільки в тому випадку, коли воно входить до ОДЗ заданого рівняння).

Наведемо приклад використання вказаного орієнтира.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння

$$\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1. \qquad (1)$$

Коментар

Якщо скористатися першими двома формулами таблиці 36, то ми зведемо всі тригонометричні вирази в цьому рівнянні й до одного аргументу, і до однієї функції — $\operatorname{tg} x$. Але при використанні зазначених формул відбувається звуження ОДЗ на значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, і через те можна втратити корені рівняння, якщо числа такого виду входили в ОДЗ початкового рівняння і є його коренями. Щоб цього не сталося, розіб'ємо розв'язування на дві частини.

1. Підставляємо ті значення змінної, на які звужується ОДЗ, у рівняння (1). При обчисленнях враховуємо періодичність функцій і формули зведення.
2. При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ (на ОДЗ рівняння (1)) використання формул $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ і $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x}$ приводить до рівняння (2) (див. розв'язання),

яке рівносильне даному (на тій частині ОДЗ, де $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$), бо ці формули зберігають правильну рівність як при переході від рівності (1) до рівності (2), так і при оберненому переході від рівності (2) до рівності (1). Заміна змінної (і обернена заміна) також приводить до рівняння, рівносильного даному (на зазначеній частині ОДЗ початкового рівняння).

Зауважимо, що ОДЗ рівняння (2) відрізняється від ОДЗ рівняння (1) лише тим, що до неї не входять значення $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, які входять до ОДЗ рівняння (1). Оскільки ці «погані» значення ми врахували в процесі розв’язування, то ОДЗ рівняння (1) можна в явному вигляді не фіксувати (як у наведеному розв’язанні). У відповіді записуємо всі корені, які було одержано в першій і другій частинах розв’язання.

Розв’язання

1. ▶ Якщо $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}$, то з даного рівняння одержуємо

$\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, тобто $0^2 - (-1) = 1$ — правильна рівність.

Отже, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — корені рівняння (1).

2. Якщо $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, одержуємо

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x + 1}{1 - \operatorname{tg} x} = 1. \qquad (2)$$

Заміна $\operatorname{tg} x = 1$ приводить до рівняння $\frac{1}{t^2} - \frac{t+1}{1-t} = 1$, яке при $t \neq 0$ і $t \neq 1$ рівносильне рівнянню $2t^2 + t - 1 = 0$. Тоді $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Обернена заміна дає: $\operatorname{tg} x = -1$ або $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, тобто

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \text{ або } x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Деякі тригонометричні рівняння вдається розв’язати, використовуючи такий орієнтир, який умовно можна назвати «шукай квадратний тричлен», тобто:

спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2x\sin\frac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

Розв'язання

▶ Розглянемо рівняння як квадратне відносно x: $x^2 - \left(2\sin\frac{\pi x}{2}\right)\cdot x + 1 = 0$. Це рівняння може мати корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант буде невід'ємний: $D = 4\sin^2\frac{\pi x}{2} - 4 \geqslant 0$.

Тоді $\sin^2\frac{\pi x}{2} \geqslant 1$. Але $\sin^2\frac{\pi x}{2}$ не може бути більшим за 1. Отже, $\sin^2\frac{\pi x}{2} = 1$, тобто $\sin\frac{\pi x}{2} = 1$ або $\sin\frac{\pi x}{2} = -1$. Підставляючи ці значення в задане рівняння, одержуємо, що воно рівносильне сукупності систем:

$$\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2} = 1,\\ x^2 - 2x + 1 = 0\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}\sin\frac{\pi x}{2} = -1,\\ x^2 + 2x + 1 = 0.\end{cases}$$

З другого рівняння першої системи маємо $x = 1$, що задовольняє і першому рівнянню системи. Отже, $x = 1$ — розв'язок першої системи, а значить, і розв'язок заданого рівняння. Аналогічно одержуємо $x = -1$ — розв'язок другої системи, а значить, і розв'язок заданого рівняння.

Відповідь: 1; –1. ◁

Коментар

Можливо декілька підходів до розв'язування заданого рівняння.

1) Розглянути задане рівняння як квадратне відносно змінної x і врахувати, що воно може мати корені тоді і тільки тоді, коли його дискримінант буде невід'ємний.

2) Якщо в лівій частині рівняння виділити повний квадрат $\left(x - \sin\frac{\pi x}{2}\right)^2$, то одержимо рівняння

$$\left(x - \sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 + \left(1 - \sin^2\frac{\pi x}{2}\right) = 0.$$

Врахуємо, що завжди $\left(x - \sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 \geqslant 0$ і $1 - \sin^2\frac{\pi x}{2} \geqslant 0$. А *сума кількох невід'ємних функцій дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли всі функції одночасно дорівнюють нулю.*

Також можна останнє рівняння записати у такому вигляді:

$$\left(x - \sin\frac{\pi x}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\pi x}{2} - 1$$

і оцінити ліву і праву частини цього рівняння.

При розв'язуванні систем тригонометричних рівнянь не завжди вдається виконувати тільки рівносильні перетворення рівнянь системи, іноді доводиться користуватися рівняннями-наслідками. У таких випадках можуть виникати сторонні розв'язки, тому одержані розв'язки необхідно перевіряти. Причому перевіряти можна як значення змінних, одержаних у кінці розв'язування, так і значення тригонометричних функцій, одержаних при розв'язуванні. Якщо всі тригонометричні функції, що входять до запису системи, по кожній із змінних мають спільний період, то досить виконати перевірку для всіх значень змінних з одного періоду (для кожної змінної).

Приклад 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{2}\sin x = \sin y,\\ \sqrt{2}\cos x = \sqrt{3}\cos y.\end{cases}$

Коментар

Якщо з першого рівняння системи виразити $\sin x$, а з другого — $\cos x$, то можна піднести обидві частини кожного рівняння до квадрата і після почленного додавання одержаних рівнянь використати тотожність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. У результаті одержимо рівняння з однією змінною y, яке легко зводиться до однієї тригонометричної функції.

Але при піднесенні обох частин рівняння до квадрата одержуємо рівняння-наслідок. Отже, серед одержаних розв'язків можуть бути і сторонні розв'язки для заданої системи, які доведеться відсіювати перевіркою.

Для перевірки враховуємо, що всі функції відносно змінної x, які входять до запису системи (тобто $\sin x$ і $\cos x$), мають спільний період 2π. Аналогічно всі функції відносно змінної y ($\sin y$ і $\cos y$) теж мають спільний період 2π. Отже, перевірку розв'язків досить виконати для всіх пар чисел $(x; y)$, де $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; 2\pi]$ (можна взяти і інші проміжки довжиною 2π). Корисно також урахувати, що всі розв'язки, одержані внаслідок підстановки в одне з рівнянь системи, автоматично задовольняють цьому рівнянню, а значить, перевірку цих розв'язків досить виконати тільки для другого рівняння системи.

Для кожної змінної всі одержані розв'язки потрібно повторити через період.

Розв'язання

► Задана система рівносильна системі $\begin{cases}\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin y, & (1)\\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos y. & (2)\end{cases}$

Піднесемо обидві частини кожного рівняння системи до квадрата і почленно додамо одержані рівняння. Отримуємо рівняння-наслідок

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2 y + \frac{3}{2}\cos^2 y.\ \text{Тоді } 2 = \sin^2 y + 3\cos^2 y,$$

$$2 = 1 - \cos^2 y + 3\cos^2 y,\ \text{тобто } \cos^2 y = \frac{1}{2}.\ \text{Отже, } \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ або } \cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Підставляючи одержані значення в рівняння (2), маємо

$$\begin{cases}\cos y = \frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases}\cos y = -\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} y = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k \end{cases}$ (3) або $\begin{cases} y = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \\ x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \ n, k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ (4)

Відносно кожної із змінних x і y усі функції, які входять до запису заданої системи, мають період 2π, тому перевірку досить виконати для всіх пар чисел $(x; y)$, де $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; 2\pi]$.

Для системи (3) це пари чисел: $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right)$,

а для системи (4) це пари чисел: $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

Розв'язками заданої системи є тільки пари чисел:

$$\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right);\ \left(\frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{4}\right);\ \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right);\ \left(\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right).$$

Відповідь одержимо, повторюючи наведені розв'язки через період (для кожної змінної).

Відповідь: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{11\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right)$,

$\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $\left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

При розв'язуванні *рівнянь з оберненими тригонометричними функціями* корисно пам'ятати, що при $|a| \leqslant 1$

$$\boxed{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}},$$

і для довільних значень a

$$\boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}}.$$

Також при розв'язуванні рівнянь з оберненими тригонометричними функціями часто буває зручно від обох частин рівняння взяти якусь тригонометричну функцію і скористатися означенням відповідних обернених тригонометричних функцій.

Приклад 7 Розв'яжіть рівняння $2\arcsin x = \arcsin \frac{10}{13}x$.

Коментар

Якщо взяти від обох частин заданого рівняння функцію синус, то одержимо рівняння-наслідок: якщо числа рівні, то і синуси будуть рівні, але якщо синуси двох чисел рівні, то це ще не значить, що числа обов'язково будуть рівні. Тобто правильна рівність буде зберігатися при прямих перетвореннях, але не обов'язково вона буде зберігатися при обернених перетвореннях. Отже, у кінці необхідно виконати перевірку одержаних розв'язків.

Якщо позначити arcsin $x = \alpha$, то за означенням арксинуса $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin \alpha = x$. Для знаходження $\cos \alpha$ враховуємо, що при $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ значення $\cos \alpha \geqslant 0$, отже, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Перевіряючи одержані розв'язки, у тих випадках, коли знайдені числа не є коренями заданого рівняння, іноді зручно порівняти одержані розв'язки з табличними значеннями. Наприклад, $\frac{12}{13} \approx 0{,}9$ більше за $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$. Враховуючи зростання функції $y = \arcsin t$, одержуємо, що $\arcsin\frac{12}{13} > \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання

► Якщо позначити $\arcsin x = \alpha$, де $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, і $\arcsin\frac{10}{13}x = \beta$, де $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то задане рівняння матиме вигляд

$$2\alpha = \beta. \qquad (1)$$

Візьмемо від обох частин рівняння (1) функцію синус і одержимо

$$\sin 2\alpha = \sin \beta,$$
$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta. \qquad (2)$$

За означенням арксинуса $\sin \alpha = x$, $\sin\beta = \frac{10}{13}x$. Враховуючи, що $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, одержуємо $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$.

Тоді рівняння (2) матиме вигляд $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10}{13}x$. Звідси $x\left(2\sqrt{1-x^2} - \frac{10}{13}\right) = 0$.

Отже, $x = 0$ або $\sqrt{1-x^2} = \frac{5}{13}$, тобто $1 - x^2 = \frac{25}{169}$, $x^2 = \frac{144}{169}$, $x = \pm\frac{12}{13}$.

Перевірка.

1) $x = 0$ — корінь $\left(2\arcsin 0 = \arcsin\left(\frac{10}{13}\cdot 0\right);\ 0 = 0\right)$,

2) $x = \pm\frac{12}{13}$ — сторонні корені. Дійсно, для $x = \frac{12}{13}$ $2\arcsin\frac{12}{13} \neq \arcsin\frac{120}{169}$ (оскільки $\frac{12}{13} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $2\arcsin\frac{12}{13} > 2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, а $\arcsin\frac{120}{169} < \frac{\pi}{2}$).

Аналогічно при $x = -\frac{12}{13}$ маємо $2\arcsin\frac{12}{13} < -\frac{\pi}{2}$ і рівність теж не може виконуватися.

Відповідь: 0. ◁

З а у в а ж е н н я. Для розв'язування рівняння $2\arcsin x = \arcsin \frac{10}{13}x$ можна було використати не тільки рівняння-наслідки, а й рівносильні перетворення рівнянь. Але в цьому випадку доведеться врахувати ОДЗ заданого рівняння:

$$\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ \left|\frac{10}{13}x\right| \leqslant 1, \end{cases} \qquad (3)$$

а також те, що для всіх коренів рівняння його права частина $\left(\arcsin\frac{10}{13}x\right)$ знаходиться в проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (за означенням арксинуса). Отже, і ліва частина рівняння повинна знаходитися в цьому самому проміжку. Значить, для всіх коренів заданого рівняння виконується умова: $-\frac{\pi}{2} \leqslant 2\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$, тобто

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{4}. \qquad (4)$$

У проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функція $\sin t$ є зростаючою, тоді при виконанні умови (4) (і, звичайно, на ОДЗ (3)), якщо від обох частин заданого рівняння взяти синус, то одержимо рівносильне йому рівняння (тобто задане рівняння рівносильне рівнянню (2) за умов (3) і (4)). Виконуючи міркування і перетворення, наведені вище в розв'язанні прикладу 7, одержуємо $x = 0$ або $x = \pm\frac{12}{13}$. Усі знайдені корені входять до ОДЗ (задовольняють умовам (3)), але умові (4) задовольняє тільки $x = 0$, отже, коренем заданого рівняння є тільки $x = 0$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\cos x = 1 + x^2$ за допомогою оцінки лівої і правої частин рівняння. Розв'яжіть це рівняння.
2. Поясніть, як можна розв'язувати тригонометричні рівняння, до запису яких входять лише сума або різниця синуса і косинуса одного і того самого аргументу та їх добуток. Наведіть приклад такого рівняння.
3. Наведіть приклад тригонометричної формули, застосування якої може привести до звуження ОДЗ заданого рівняння і до втрати його коренів. Поясніть, чому відбувається звуження ОДЗ. Як потрібно використовувати такі формули, щоб не загубити корені даного рівняння? Поясніть це на прикладі рівняння $2\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–5)**.

1. 1) $\sin x - \cos x = \sin 2x - \frac{1}{2}$; 2) $\sin x + \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1 - 0{,}5\sin 2x$.

2. 1) $\sin 7x + \cos 12x = 2$; 2) $\sin 2x \sin 6x = 1$;

3) $\cos \pi x + \sin \frac{5\pi x}{2} = -2$; 4) $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$;

5) $\mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x + 5\,\mathrm{tg}^2\, 5x + 5\,\mathrm{ctg}^2\, 5x = 12$.

3. 1) $5\,\mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{ctg}\, x - 5$; 2) $\sin 2x + \mathrm{tg}\, 2x = -\frac{8}{3}\mathrm{ctg}\, x$.

4. 1) $9x^2 - 6x \cos 6\pi x + 1 = 0$;

2) $4x^2 - 4x \sin (xy) + 1 = 0$ (знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівнянню).

5. 1) $2 (\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x$; 2) $9 (\arccos 2x)^2 - 3\pi \arccos 2x - 2\pi^2 = 0$;

3) $2 \arcsin x + 3 \arccos x = \pi$; 4) $\mathrm{arctg}\, x \cdot \mathrm{arcctg}\, x = \frac{\pi^2}{16}$;

5) $2 \arcsin 2x = \arccos 7x$; 6) $\arcsin x = 2\, \mathrm{arctg}\, x$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sin x = -\sqrt{3} \sin y, \\ \sqrt{3} \cos x = \cos y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \cos 2x - \cos 2y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ \cos 2x + 2 \cos y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \cos x + \cos y = 0, \\ \sin x\ \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 4 \sin (3x + 2y) + \sin x = 0, \\ 4 \sin (2x + 3y) + \sin y = 0. \end{cases}$

§20 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРАМИ

20.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

Якщо до запису тригонометричного рівняння крім змінної та числових коефіцієнтів входять також буквені коефіцієнти — параметри, то при розв'язуванні таких рівнянь можна користуватися наступним орієнтиром.

Будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайне рівняння чи нерівність до тих пір, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Якщо якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язування необхідно розбити на кілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.

На етапі пошуку плану розв'язування рівняння чи нерівності з параметрами або в ході міркувань, пов'язаних із самим розв'язуванням як таким, часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого. Щоб на таких схемах (чи в записах громіздких розв'язань) не загубити якусь відповідь, доцільно поміщати остаточні відповіді в прямокутні рамки.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $2\cos x - a = 0$.

Розв'язання

▶ $2\cos x = a$,

$$\boxed{\cos x = \frac{a}{2}}$$

$\left|\frac{a}{2}\right| > 1$: $\boxed{\text{коренів немає}}$

$\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$: $\boxed{x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}}$

Відповідь:

1) якщо $\left|\frac{a}{2}\right| > 1$ (тобто $|a| > 2$), то коренів немає;

2) якщо $\left|\frac{a}{2}\right| \leqslant 1$ (тобто $|a| \leqslant 2$), то

$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Коментар

Наявність параметра a не заважає нам однозначно виразити $\cos x$ із заданого рівняння.

Рівняння $\cos t = b$ при $|b| > 1$ не має коренів, а при $|b| \leqslant 1$ корені рівняння можна записати за відомою формулою (див. с. 158). Отже, для рівняння $\cos x = \frac{a}{2}$ не можна однозначно записати розв'язки, і тому, починаючи з цього моменту, розв'язання необхідно розвести на два випадки.

Остаточну відповідь можна записувати з використанням знаку модуля, а можна подати обмеження для параметра a без модуля і записати відповідь так:

1) якщо $a < -2$ або $a > 2$, то коренів немає;

2) якщо $-2 \leqslant a \leqslant 2$, то

$x = \pm\arccos\frac{a}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 2x = 4a\cos x$.

Розв'язання

▶ $2\sin x\cos x - 4a\cos x = 0$,

$2\cos x(\sin x - 2a) = 0$. (1)

Тоді $\cos x = 0$ або $\sin x - 2a = 0$.

Звідси $\boxed{x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z},}$

або $\sin x = 2a$.

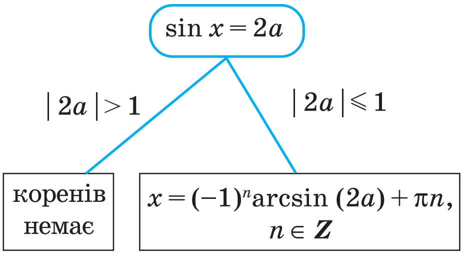
Коментар

Спочатку зведемо всі тригонометричні функції до одного аргументу x, використовуючи формулу

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x.$$

Якщо перенести всі члени рівняння в ліву частину, то можна винести за дужки спільний множник $2\cos x$.

Оскільки обидва множники мають зміст при будь-яких значеннях змін-



Відповідь:
(див. у кінці зауваження). ◁

ної x, то рівняння (1) рівносильне сукупності $\cos x = 0$ або $\sin x - 2a = 0$, тобто сукупності

$$\cos x = 0 \text{ або } \sin x = 2a.$$

Для рівняння $\cos x = 0$ ми можемо записати корені при будь-яких значеннях a (у цьому рівнянні параметра a немає), а от у рівнянні $\sin x = 2a$ все залежить від правої частини: якщо $|2a| > 1$, то коренів немає, а якщо $|2a| \leqslant 1$, то корені є. Отже, доводиться розбивати розв'язування цього рівняння на два випадки.

З а у в а ж е н н я. Для запису одержаних відповідей (вони на схемах розміщені в прямокутних рамках) доцільно уточнити, при яких значеннях a виконуються обмеження $|2a| \leqslant 1$ та $|2a| > 1$. Для цього розв'язуємо відповідні нерівності:

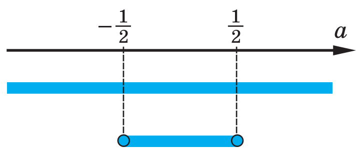
якщо $|2a| \leqslant 1$, тоді $-1 \leqslant 2a \leqslant 1$, тобто $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$;

якщо $|2a| > 1$, тоді $2a < -1$ або $2a > 1$, тобто $a < -\frac{1}{2}$ або $a > \frac{1}{2}$.

Щоб полегшити запис відповіді *у складних або громіздких випадках, зобразимо вісь параметра* (*a*) *і відмітимо на ній усі особливі значення параметра, які з'явилися в процесі розв'язування. Під віссю параметра (лівіше від неї) випишемо всі одержані розв'язки (крім «коренів немає») і напроти кожної відповіді відмітимо, при яких значеннях параметра цю відповідь можна використовувати* (див. схему нижче). *Після цього відповідь записується для кожного з особливих значень параметра і для кожного з одержаних проміжків осі параметра.*

1. $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$

2. $x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n, n \in \boldsymbol{Z}$



Із цієї схеми добре видно, що при $a < -\frac{1}{2}$ або $a > \frac{1}{2}$ у відповідь потрібно записати тільки одну формулу, а при $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$ — дві формули.

Відповідь: 1) якщо $a < -\frac{1}{2}$ або $a > \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$;

2) якщо $-\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \boldsymbol{Z}$,
$x = (-1)^n \arcsin(2a) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння

$$\operatorname{tg} 2x = a \operatorname{ctg} x. \qquad (1)$$

Коментар

Для розв'язування рівняння (1) використаємо рівносильні перетворення. Тоді ми обов'язково повинні врахувати ОДЗ заданого рівняння. Для цього записуємо умови існування тангенса та котангенса і розв'язуємо відповідні обмеження. Ми можемо звести всі тригонометричні функції до одного аргументу x, використовуючи формулу тангенса подвійного аргументу, а потім звести всі вирази до однієї функції $\operatorname{tg} x$, використовуючи формулу $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$. Але використання вказаних формул приводить до звуження ОДЗ (табл. 36) і, щоб не втратити корені заданого рівняння, ті значення, на які звужується ОДЗ $\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, потрібно розглянути окремо.

При $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ зводимо всі тригонометричні вирази до однієї функції і виконуємо рівносильні перетворення одержаного рівняння

$$\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{a}{\operatorname{tg} x}. \qquad (2)$$

На ОДЗ рівняння (1) знаменники дробів у рівнянні (2) не дорівнюють нулю. Отже, після множення обох частин рівняння на вирази, що стоять у знаменниках, одержуємо рівняння $(2 + a) \operatorname{tg}^2 x = a$, рівносильне рівнянню (2) на ОДЗ рівняння (1).

1) Якщо $2 + a = 0$, тобто $a = -2$, то одержуємо рівняння $0 \cdot \operatorname{tg}^2 x = -2$, яке не має коренів.
2) Якщо $2 + a \neq 0$, тобто $a \neq -2$, то одержуємо $\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}$.

Щоб розв'язати це рівняння, потрібно знати знак виразу, який стоїть у правій частині, оскільки $\operatorname{tg}^2 x$ не може бути від'ємним. Розглянемо для правої частини три випадки: вона менша нуля, дорівнює нулю, більша нуля. Тобто подальші міркування проведемо за схемою.

$$\boxed{\operatorname{tg}^2 x = \frac{a}{a+2}}$$

$$\frac{a}{a+2} < 0 \qquad \frac{a}{a+2} = 0 \qquad \frac{a}{a+2} > 0$$

Звичайно, для кожного випадку потрібно уточнити, при яких значеннях a виконується відповідне обмеження, і для кожного одержаного розв'язку потрібно перевірити, входить він до ОДЗ заданого рівняння чи ні.

Розв'язання

► ОДЗ: $\begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \pi m, \ m \in \boldsymbol{Z}, \end{cases}$ тоді $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x \neq \pi m, \ m \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

I. При $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$, з рівняння (1) одержуємо $\mathrm{tg}\,(\pi+2\pi k)=a\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, тобто $0 = a\cdot 0$ — рівність, правильну при будь-яких значеннях a. Отже, при всіх значеннях параметра a задане рівняння має корені

$$\boxed{x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}}.$$

II. При $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ одержуємо рівняння (2): $\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}=\frac{a}{\mathrm{tg}\,x}$,
яке на ОДЗ рівносильне рівнянню $2\ \mathrm{tg}^2 x = a - a\ \mathrm{tg}^2 x$. Звідси

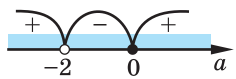
$$(2+a)\,\mathrm{tg}^2 x = a. \qquad (3)$$

1) Якщо $a=-2$, то коренів немає.
2) Якщо $a\neq -2$, то рівняння (3) рівносильне рівнянню

$$\mathrm{tg}^2 x=\frac{a}{a+2}. \qquad (4)$$

а) Якщо $\frac{a}{a+2}<0$, то коренів немає.

Розв'язавши нерівність $\frac{a}{a+2}<0$ методом інтервалів (див. рисунок), одержуємо $-2<a<0$.
Отже, при $-2<a<0$ $\boxed{\text{коренів немає}}$.



б) Якщо $\frac{a}{a+2}=0$ (тобто $a=0$), одержуємо рівняння $\mathrm{tg}\,x=0$, яке має корені $x=\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$. Але ці корені не входять до ОДЗ заданого рівняння. Отже, і при $a=0$ $\boxed{\text{коренів немає}}$.

в) Якщо $\frac{a}{a+2}>0$ (тобто $a<-2$ або $a>0$), то з рівняння (4) одержуємо

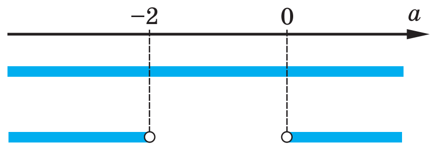
$\mathrm{tg}\,x=\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}$. Звідси $x=\mathrm{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right)+\pi l,\ l\in \boldsymbol{Z}$.

З'ясуємо, при яких значеннях a одержані корені рівняння (4) не входять до ОДЗ. Для цього досить у рівняння (4) замість аргументу x підставити «заборонені» значення. Враховуючи, що функції, які входять до запису заданого рівняння (1), мають спільний період $T=\pi$ ($\mathrm{tg}\ 2x$ має період $T_1=\frac{\pi}{2}$, а $\mathrm{ctg}\ x$ має період $T_2=\pi$), досить підставити ці значення тільки на одному періоді, наприклад, на проміжку $[0;\pi]$. У цьому проміжку до ОДЗ не входять такі значення: $0;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \pi$. При $x=0$ або $x=\pi$ з рівняння (4) одержуємо рівність $\frac{a}{a+2}=0$, тобто $a=0$. Випадок $a=0$ ми вже дослідили (коренів немає). При $x=\frac{\pi}{4}$ або $x=\frac{3\pi}{4}$ з рівняння (4) одержуємо $\frac{a}{a+2}=1$. Але при жодному значенні a ця рівність не може виконуватися. Отже, при всіх значеннях $a < -2$ або $a > 0$ одержані розв'язки $\boxed{x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}}$ входять до ОДЗ початкового рівняння.

Зобразимо одержані відповіді:

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

2) $x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}$



Відповідь: 1) якщо $-2 \leqslant a \leqslant 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

2) якщо $a < -2$ або $a > 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ x = \operatorname{arctg}\left(\pm\sqrt{\frac{a}{a+2}}\right) + \pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}$. ◁

20.2. ДОСЛІДНИЦЬКІ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ

Крім завдань з параметрами, у яких вимагається «розв'язати рівняння або нерівність», часто пропонуються дослідницькі завдання з параметрами. Такі завдання іноді вдається розв'язати за допомогою безпосередніх обчислень: розв'язати задане рівняння або нерівність і після цього дати відповідь на запитання задачі. Проте досить часто дослідницькі завдання не вдається розв'язати безпосередніми обчисленнями (або такі обчислення є дуже громіздкими), і тому доводиться спочатку обґрунтувати якусь властивість заданого рівняння або нерівності, а потім, користуючись цією властивістю, вже давати відповідь на запитання задачі.

Розглянемо деякі з таких властивостей. Наприклад, беручи до уваги парність функцій, що входять до запису заданого рівняння, використовується такий орієнтир.

Якщо в рівнянні $f(x) = 0$ функція $f(x)$ є парною або непарною, то разом з будь-яким коренем α ми можемо вказати ще один корінь цього рівняння $(-\alpha)$.

Приклад 1 Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння
$$a^2\cos^2 x - x^2 - a = 0 \qquad (1)$$
має єдиний корінь.

Розв'язання

▶ Функція $f(x) = a^2\cos^2 x - x^2 - a$ є парною ($D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(-x) = f(x)$). Якщо $x = \alpha$ — корінь рівняння (1), то $x = -\alpha$ теж є коренем цього рівняння. Тому

Коментар

Помічаємо, що в лівій частині заданого рівняння стоїть парна функція, і використовуємо орієнтир, наведений вище. Дійсно, якщо $x = \alpha$ —

єдиний корінь у заданого рівняння може бути тільки тоді, коли $\alpha = -\alpha$, тобто $\alpha = 0$. Отже, єдиним коренем заданого рівняння може бути тільки $x = 0$.

Якщо $x = 0$, то з рівняння (1) одержуємо $a^2 - a = 0$, тобто $a(a - 1) = 0$. Звідси $a = 0$ або $a = 1$.

При $a = 0$ рівняння (1) перетворюється на рівняння $x^2 = 0$, яке має єдиний корінь $x = 0$. Отже, $a = 0$ задовольняє умові задачі.

При $a = 1$ маємо рівняння
$\cos^2 x - x^2 - 1 = 0$, тобто

$$\cos^2 x = 1 + x^2. \qquad (2)$$

Оскільки $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1 + x^2 \geqslant 1$, то рівняння (2) рівносильне системі

$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

З другого рівняння системи одержуємо $x = 0$, що задовольняє і першому рівнянню. Отже, ця система, а значить, і рівняння (2) має єдиний розв'язок $x = 0$. Отже, $a = 1$ також задовольняє умові задачі.

Відповідь: $a = 0$, $a = 1$. ◁

корінь рівняння $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — правильна числова рівність. Враховуючи парність функції $f(x)$, маємо $f(-\alpha) = f(\alpha) = 0$. Отже, $x = -\alpha$ теж корінь рівняння $f(x) = 0$. Єдиний корінь у цього рівняння може бути тільки тоді, коли корені α і $-\alpha$ співпадають. Тоді $x = \alpha = -\alpha = 0$.

З'ясуємо, чи існують такі значення параметра a, при яких $x = 0$ є коренем рівняння (1). (Це $a = 0$ і $a = 1$.)

Оскільки значення $a = 0$ і $a = 1$ ми одержали з умови, що $x = 0$ — корінь рівняння (1), то необхідно перевірити, чи дійсно при цих значеннях a задане рівняння матиме єдиний корінь.

Для розв'язування рівняння (2) оцінимо його ліву і праву частини:

$$f(x) = \cos^2 x, \; g(x) = 1 + x^2.$$

$$\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}} = \underbrace{1 + x^2}_{\boxed{g(x) \geqslant 1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

При розв'язуванні деяких дослідницьких задач з параметрами допомагає використання такого о р і є н т и р у.

Якщо в умові задачі з параметрами говориться про те, що задане рівняння чи нерівність мають розв'язками всі значення змінної з деякої множини, то іноді корисно підставити конкретні значення змінної із заданої множини і одержати деякі обмеження на параметр.

Приклад 2 Знайдіть усі пари чисел (a, b), для яких коренями рівняння

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1 \qquad (1)$$

будуть всі дійсні числа.

Р о з в ' я з а н н я

► Якщо коренями заданого рівняння є всі дійсні числа, то коренем буде і число нуль.

К о м е н т а р

Ми не в змозі розв'язати задане рівняння (але його і не вимагають розв'язати), тому скористаємося тим, що

При $x = 0$ одержуємо $b^2 = \cos b^2 - 1$, тоді
$$1 + b^2 = \cos b^2. \qquad (2)$$

Враховуючи, що $1 + b^2 \geqslant 1$, а $\cos b^2 \leqslant 1$, одержуємо, що рівняння (2) рівносильне системі $\begin{cases} 1+b^2 = 1, \\ \cos b^2 = 1. \end{cases}$

З першого рівняння системи одержуємо $b = 0$, що задовольняє і другому рівнянню. Отже, ця система, а значить, і рівняння (2) мають єдиний розв'язок $b = 0$.

Таким чином, умова задачі може виконуватися тільки при $b = 0$.

При $b = 0$ рівняння (1) перетворюється на рівняння
$$a(\cos x - 1) = \cos(ax) - 1. \qquad (3)$$

Але за умовою коренями рівняння (1), а значить, і рівняння (3) повинні бути всі дійсні числа, отже, коренем буде і число 2π. При $x = 2\pi$ одержуємо $0 = \cos(2\pi a) - 1$, тоді $\cos(2\pi a) = 1$, тобто $2\pi a = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Отже, $a = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (таким чином, a — ціле число).

Якщо коренями рівняння (3) є всі дійсні числа, то коренем буде і число $\frac{\pi}{2}$.

При $x = \frac{\pi}{2}$ одержуємо $-a = \cos\left(\frac{\pi}{2}a\right) - 1$.

Оскільки $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ при цілих значеннях a набуває тільки значень 1; 0; –1, то a може набувати тільки значень 0; 1; 2.

Якщо $a = 0$ (і $b = 0$), то рівняння (1) має вигляд $0(\cos x - 1) = \cos 0 - 1$, тобто $0(\cos x - 1) = 0$, і його коренями є всі дійсні числа. Отже, пара чисел $(a, b) = (0; 0)$ задовольняє умові задачі.

Якщо $a = 1$ (і $b = 0$), то рівняння (1) має вигляд $\cos x - 1 = \cos x - 1$, за умовою його коренями будуть усі дійсні числа, і підставимо замість змінної x якісь конкретні значення.

Для підстановки найчастіше вибирають такі з них, які дозволяють перетворити якийсь вираз на нуль. Так, при $x = 0$ вираз у перших дужках дорівнює нулю. Розв'язуючи одержане рівняння (2) відносно b, отримуємо єдиний розв'язок $b = 0$.

Якщо $b \neq 0$, то рівність (1) не може бути правильною при $x = 0$, тобто $x = 0$ не буде коренем заданого рівняння, а значить, при цих значеннях b рівняння (1) не може мати коренями всі дійсні числа.

Спробуємо ще раз перетворити вираз у перших дужках на нуль, використовуючи те, що число 2π є періодом функції $\cos x$, отже, через 2π значення в перших дужках буде повторюватися (підставляємо $x = 2\pi$).

Потім спробуємо перетворити на нуль $\cos x$ (підставляємо $x = \frac{\pi}{2}$).

При цілому a значення $\frac{\pi}{2}a$ на одиничному колі зображуються на кінцях горизонтального та вертикального діаметрів, отже, значення $\cos\left(\frac{\pi}{2}a\right)$ можуть бути тільки: 1, –1 і 0.

Оскільки значення a і b ми отримали при підстановці в задане рівняння тільки трьох значень x, то необхідно перевірити, чи будуть усі дійсні числа при цих значення a і b коренями заданого рівняння, тобто перевірити, чи буде рівняння (1) перетворюватися на правильну рівність при всіх дійсних значеннях x.

і його коренями є всі дійсні числа. Отже, пара чисел $(a, b) = (1; 0)$ задовольняє умові задачі.

Якщо $a = 2$ (і $b = 0$), то рівняння (1) має вигляд $2(\cos x - 1) = \cos 2x - 1$. Коренями цього рівняння не можуть бути всі дійсні числа, оскільки коренем не є $x = \pi$ (при підстановці одержуємо неправильну рівність $-4 = 0$). Отже, пара чисел $(a, b) = (2; 0)$ не задовольняє умові задачі.

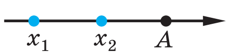
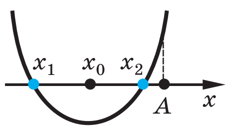
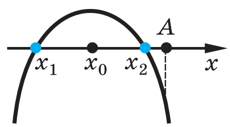
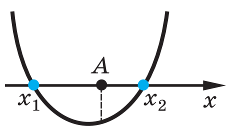
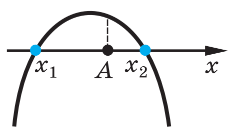
Відповідь: (0; 0), (1; 0). ◁

У випадку, коли $a = 2$ і $b = 0$, одержуємо, що $\cos 2x = 2\cos x - 1$. Якби ця рівність була правильною при всіх значеннях x, то це була б ще одна формула косинуса подвійного аргументу. Але такої формули немає, отже, можна вказати якесь значення x, при якому ця рівність не виконується.

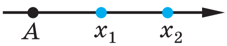
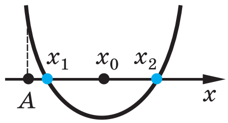
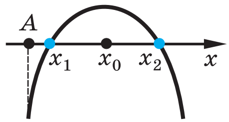
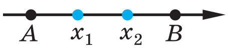
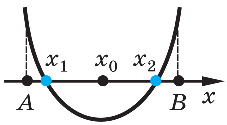
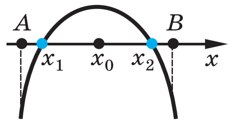
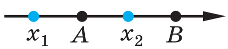
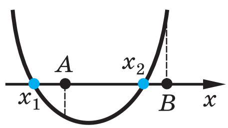
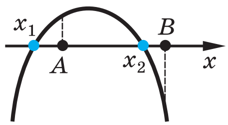
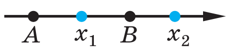
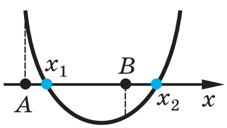
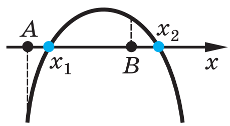
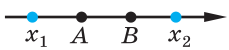
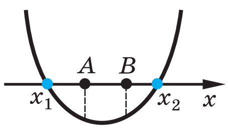
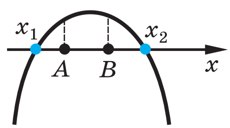
20.3. ВИКОРИСТАННЯ УМОВ РОЗМІЩЕННЯ КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ВІДНОСНО ЗАДАНИХ ЧИСЕЛ A І B

Розв'язування деяких дослідницьких задач з параметрами можна звести до використання необхідних і достатніх умов розміщення коренів квадратного тричлена. Основні з цих умов наведено в таблиці 37 (у таблиці використано традиційні позначення $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $D = b^2 - 4ac$).

Таблиця 37

Розміщення коренів	Необхідні і достатні умови розміщення коренів		
	при $a > 0$	при $a < 0$	у загальному випадку $(a \neq 0)$
1. $x_1 < A$; $x_2 < A$ 	$f(A) > 0$ $D \geqslant 0$; $x_0 < A$; 	$f(A) < 0$ $D \geqslant 0$; $x_0 < A$; 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 < A \end{cases}$
2. $x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$

Продовж. табл. 37

<table>
<tr><th rowspan="2">Розміщення коренів</th><th colspan="3">Необхідні і достатні умови розміщення коренів</th></tr>
<tr><th>при $a > 0$</th><th>при $a < 0$</th><th>у загальному випадку $(a \neq 0)$</th></tr>
<tr><td>3. $x_1 > A$;
$x_2 > A$

</td><td>$f(A) > 0$
$D \geqslant 0$; $x_0 > A$;

</td><td>$f(A) < 0$
$D \geqslant 0$; $x_0 > A$;

</td><td>$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ x_0 > A \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>4. $A < x_1 < B$;
$A < x_2 < B$

</td><td>$f(A) > 0$; $f(B) > 0$
$D \geqslant 0$; $A < x_0 < B$

</td><td>$f(A) < 0$; $f(B) < 0$
$D \geqslant 0$; $A < x_0 < B$

</td><td>$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ A < x_0 < B \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>5. $x_1 < A$;
$A < x_2 < B$

</td><td>$f(A) < 0$; $f(B) > 0$

</td><td>$f(A) > 0$; $f(B) < 0$

</td><td>$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>6. $A < x_1 < B$;
$x_2 > B$

</td><td>$f(A) > 0$; $f(B) < 0$

</td><td>$f(A) < 0$; $f(B) > 0$

</td><td>$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>7. $x_1 < A$;
$x_2 > B$

</td><td>$f(A) < 0$; $f(B) < 0$

</td><td>$f(A) > 0$; $f(B) > 0$

</td><td>$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Для обґрунтування зазначених умов досить скористатися тим, що графік функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ суцільна (нерозривна*) лінія. Якщо така функція на кінцях якогось проміжку набуває значень з різними знаками (тобто відповідні точки графіка знаходяться в різних півплощинах відносно осі Ox), то всередині цього проміжку є принаймні одна точка, у якій функція дорівнює нулю (рис. 98).

Наприклад, *для того щоб два різні корені квадратного тричлена* $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ *при* $a > 0$ *були розміщені по різні боки від заданого числа* A*, достатньо зафіксувати тільки одну умову* $f(A) < 0$ (рис. 99).

Дійсно, графік квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ — парабола, вітки якої напрямлено вгору. Тоді у випадку, коли аргумент x прямує до $+\infty$ або до $-\infty$ (це позначається звичайно так: $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$), функція $f(x)$ прямує до $+\infty$ ($f(x) \to +\infty$), отже, $f(x) > 0$ при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Якщо виконується умова $f(A) < 0$, то при зміні значення аргументу x від A до $+\infty$ квадратична функція $f(x)$ змінює свій знак з «$-$» на «$+$», отже, $f(x)$ має принаймні один корінь $x_2 > A$.
Так само при зміні значення аргументу x від $-\infty$ до A квадратична функція $f(x)$ змінює свій знак з «$+$» на «$-$», отже, $f(x)$ має принаймні один корінь $x_1 < A$. Але квадратний тричлен $f(x)$ не може мати більше двох коренів, отже, при $a > 0$ умова $f(A) < 0$ необхідна і достатня для того, щоб два різні корені квадратного тричлена знаходилися по різні боки від заданого числа A.

Аналогічні міркування при $a < 0$ показують, що для виконання цієї самої вимоги необхідно і достатньо, щоб $f(A) > 0$. Ці дві умови можна об'єднати в одну: $a \cdot f(A) < 0$.

Дійсно, $a \cdot f(A) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$ Отже,

квадратний тричлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ***має два різні корені, що знаходяться по різні боки від заданого числа*** A ***тоді і тільки тоді, коли виконується умова*** $a \cdot f(A) < 0$.

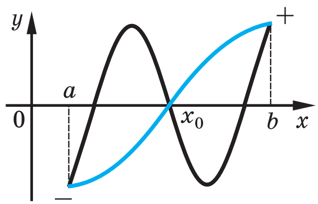


Рис. 98

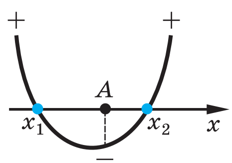


Рис. 99

* Більш строго відповідну властивість буде обґрунтовано в 11 класі під час розгляду так званих неперервних функцій.

Аналогічно обґрунтовуються й інші умови, наведені в таблиці 37.

Зауважимо, що наведені умови можна спеціально не запам'ятовувати, а для їхнього запису користуватися графіком квадратичної функції (зображеним для потрібного розміщення коренів) і таким орієнтиром.

Для того щоб корені квадратного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ були розміщені заданим чином відносно даних чисел A і B, необхідно і достатньо виконання системи умов, яка включає:

1) *знак коефіцієнта при старшому члені;*
2) *знаки значень $f(A)$ і $f(B)$;*
3) *знак дискримінанта D;*
4) *положення абсциси вершини параболи* $\left(x_0 = -\frac{b}{2a}\right)$ *відносно даних чисел A і B.*

Зазначимо, що для випадків, у яких хоча б одне з даних чисел знаходиться між коренями квадратного тричлена (див. другий, п'ятий, шостий і сьомий рядки табл. 37), досить виконання перших двох умов цього орієнтиру, а для інших випадків доводиться розглядати всі чотири умови. Також зауважимо, що, записуючи кожну з указаних умов, слід подивитися, чи буде виконуватися вимога задачі в тому випадку, якщо в цій умові записати знак нестрогої нерівності.

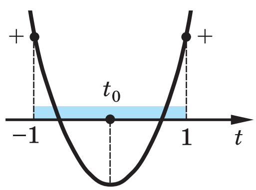
Приклад 1 Знайдіть всі значення параметра a, для яких рівняння

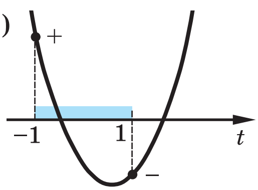
$$\cos 2x + a \sin x - 9 = 0 \quad (1)$$

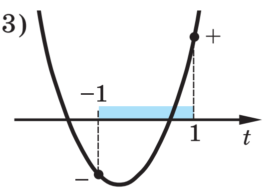
має корені.

Коментар

Спочатку виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння: зведемо до одного аргументу і до однієї функції, а потім виконаємо заміну $\sin x = t$. Слід враховувати, що *після заміни змінної іноді змінюється вимога задачі*, зокрема для рівняння (2) вона буде такою: знайти всі значення параметра a, для яких це рівняння має хоча б один корінь у проміжку $[-1;1]$ (тоді після оберненої заміни ми знайдемо корені рівняння $\sin x = t$, а значить, і корені рівняння (1)). Це можливо в одному з трьох випадків: або обидва корені рівняння (2) знаходяться в цьому проміжку або тільки один з коренів рівняння (2) знаходиться в проміжку $[-1;1]$, а другий — праворуч або ліворуч від цього проміжку. Зобразивши відповідні ескізи графіків функції $f(t) = 2t^2 - at + 8$ (див. рисунки), за наведеним орієнтиром (або за таблицею 37) записуємо відповідні достатні умови розміщення коренів (3)–(5). При цьому враховуємо, що у випадках, коли $f(-1) = 0$ або $f(1) = 0$, то умова задачі теж виконується.

1) 

2) 

3) 

У кінці необхідно об'єднати всі отримані результати.

Зазначимо, що для одержання відповіді можна розв'язати рівняння (2): $t_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-64}}{4}$, а потім розв'язати сукупність нерівностей: $-1\leqslant t_1\leqslant 1$, $-1\leqslant t_2\leqslant 1$, але нерівності з коренями (ірраціональні) буде розглянуто тільки в наступному розділі, та й розв'язувати їх досить складно.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням: $1-2\sin^2 x+a\sin x-9=0$, $2\sin^2 x-a\sin x+8=0$. Заміна $\sin x=t$ дає рівняння

$$2t^2-at+8=0. \qquad (2)$$

Рівняння (1) матиме корені тоді і тільки тоді, коли рівняння (2) матиме хоча б один корінь у проміжку $[-1;1]$.

1) Для того щоб обидва корені квадратного тричлена $f(t)=2t^2-at+8$ знаходилися в цьому проміжку, досить виконання умов $\begin{cases} f(-1)\geqslant 0,\\ f(1)\geqslant 0,\\ D\geqslant 0,\\ -1\leqslant t_0\leqslant 1.\end{cases}$ (3)

2) Для того щоб один корінь $f(t)$ знаходився в проміжку $[-1;1]$, а другий — праворуч від 1 (або в точці 1), досить виконання умов $\begin{cases} f(-1)\geqslant 0,\\ f(1)\leqslant 0.\end{cases}$ (4)

3) Для того щоб один корінь $f(t)$ знаходився в проміжку $[-1;1]$, а другий — ліворуч від -1 (або в точці -1), досить виконання умов $\begin{cases} f(-1)\leqslant 0,\\ f(1)\geqslant 0.\end{cases}$ (5)

Розв'язуємо сукупність систем нерівностей (3)–(5):

$$\begin{cases} 10+a\geqslant 0,\\ 10-a\geqslant 0,\\ a^2-64\geqslant 0,\\ -1\leqslant \frac{a}{4}\leqslant 1\end{cases} \text{ або } \begin{cases} 10+a\geqslant 0,\\ 10-a\leqslant 0\end{cases} \text{ або } \begin{cases} 10+a\leqslant 0,\\ 10-a\geqslant 0.\end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} a\geqslant -10,\\ a\leqslant 10,\\ a\leqslant -8 \text{ або } a\geqslant 8,\\ -4\leqslant a\leqslant 4\end{cases}$ або $\begin{cases} a\geqslant -10,\\ a\geqslant 10\end{cases}$ або $\begin{cases} a\leqslant -10,\\ a\leqslant 10.\end{cases}$

Перша система не має розв'язків, а з інших одержуємо $a\geqslant 10$ або $a\leqslant -10$.

Відповідь: $a\in(-\infty;-10]\cup[10;+\infty)$. ◁

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–2)**.

1. 1) $a \sin x = 1$; 2) $a \sin 2x = \cos x$;
3) $a \operatorname{tg} x = \sin x$; 4) $\operatorname{ctg} x = a \cos x$.

2. 1) $\cos 2x + 2 \sin x + a - 1 = 0$; 2) $\sin 3x - \sin 2x = a \sin x$;
3) $\frac{\operatorname{tg} ax}{\sin bx} = 0$; 4) $a \sin x + \operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x}$.

3. Знайдіть всі значення параметра, при яких рівняння має корені:
1) $2 \sin x + 4 \cos x = a$; 2) $3 \sin x - 4 \cos x = b$;
3) $a \cos 2x - \sin x = 0$; 4) $\cos 2x + a \cos x = 0$;
5) $\arcsin^2 x + (3a - 3) \arcsin x + (a - 2)(5 - 4a) = 0$.

4. При яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 2x + (a - 3) \cos 2x = 0$ має на відрізку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ рівно чотири корені?

5. Знайдіть всі пари чисел (a, b), для яких коренями рівняння
$a(\cos 3x - 1) + b^2 - 2b = \cos(3ax + (b - 1)^2) - 2$ будуть усі дійсні числа.

6. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $(4a + 2) \sin x + 2a \cos x + a + 1 = 0$ має точно один корінь, який належить відрізку $\left[0; \frac{5\pi}{6}\right]$.

7. Розв'яжіть нерівність:
1) $2 \sin x > a$; 2) $(5a - 7) \cos x < a + 5$;
3) $a \sin^2 x + 2 \cos x - a + 1 > 0$; 4) $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geqslant a$.

8. При яких значеннях параметра a задана нерівність виконується при всіх значеннях x?
1) $\sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x \geqslant 0$; 2) $\sin^4 x + \cos^4 x > 3a \sin x \cos x$.

9. При яких значеннях параметра a задані рівняння рівносильні?
1) $\sin x + \frac{1}{2} = 0$ і $\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{a}{2}\right) = 0$;
2) $\cos x - \frac{1}{2} = 0$ і $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos x + \frac{a-2}{2}\right) = 0$;
3) $\sin 2x + a = \sin x + 2a \cos x$ і $2 \cos 2x + a^2 = 5a \cos x - 2$.

10. Розв'яжіть систему:
1) $\begin{cases} \cos x \cos y = a^2, \\ \sin x \sin y = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x \cos y = \sqrt{a}, \\ \sin y \cos x = 1. \end{cases}$

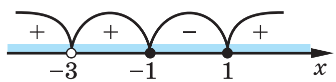
§ 21 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЯМИ

21.1. РІВНОСИЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЗАГАЛЬНИЙ МЕТОД ІНТЕРВАЛІВ

Таблиця 38

1. Поняття нерівності із змінною та її розв'язків	
Означення	Приклад
Якщо два вирази із змінною сполучити одним із знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то одержуємо *нерівність із змінною*. У загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$.	$3x < 1$ — лінійна нерівність; $x^2 - 3x + 2 > 0$ — квадратна нерівність; $\frac{x-5}{2x+4} < 1$ — дробова нерівність.
Розв'язком нерівності з однією змінною **називається значення змінної, яке перетворює задану нерівність на правильну числову нерівність.** *Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.*	$x = 4$ — один із розв'язків нерівності $2x - 3 > x$, оскільки при $x = 4$ одержуємо правильну нерівність: $2 \cdot 4 - 3 > 4$, тобто $5 > 4$.
2. Область допустимих значень (ОДЗ)	
Областю допустимих значень **(або областю визначення)** ***нерівності*** **називається спільна область визначення для функцій** $f(x)$ **і** $g(x)$**, що стоять у лівій і правій частинах нерівності.**	Для нерівності $\sqrt{x+2} < x$ ОДЗ: $x + 2 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x) = \sqrt{x+2}$ визначається умовою $x + 2 \geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x) = x$ є множина всіх дійсних чисел.

Продовж. табл. 38

<table>
<tr><td colspan="2">3. Рівносильні нерівності</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Найпростіші теореми</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Дві нерівності називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки,
тобто кожен розв'язок першої нерівності є розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності є розв'язком першої.</td><td>1. Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на будь-якій множині).</td></tr>
<tr><td>2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).</td></tr>
<tr><td>3. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)</td></tr>
<tr><td>План</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>1. Знайти ОДЗ.
2. Знайти нулі функції $f(x)=0$.
3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.
4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.</td><td>Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$.
▶ Нехай $f(x)=\frac{x^2-1}{(x+3)^2}$.
1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$.
2. Нулі функції: $f(x)=0$.
$\frac{x^2-1}{(x+3)^2}=0$, $x^2-1=0$,
$x_1=-1$, $x_2=1$ (входять до ОДЗ).
3. 
Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 38

5. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

за допомогою **рівносильних перетворень**	**за допомогою** **методу інтервалів ($f(x) \gtrless 0$)**
Врахувати ОДЗ початкової нерівності 1 ↓↑ 2 Зберігати на ОДЗ правильну нерівність при прямих і зворотних перетвореннях.	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ. 4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

1 — початкова нерівність;

2 — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття нерівності із змінною та її розв'язків. Якщо два вирази із змінною сполучити одним із знаків $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, то одержуємо нерівність із змінною.

Аналогічно до рівняння, нерівність із змінною (наприклад, із знаком $>$) найчастіше розуміють як аналітичний запис задачі про знаходження тих значень аргументів, при яких значення однієї з заданих функцій більше за значення другої заданої функції. Тому в загальному вигляді нерівність з однією змінною x (наприклад, для випадку «більше») записують так: $f(x) > g(x)$.

Нагадаємо, що *розв'язком нерівності називається значення змінної, яке перетворює цю нерівність на правильну числову нерівність.*

Розв'язати нерівність — означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Наприклад, нерівність $3x < 6$ має розв'язками всі $x < 2$, нерівність $x^2 > -1$ має розв'язками всі дійсні числа ($x \in \boldsymbol{R}$), а нерівність $x^2 < -1$ не має розв'язків, оскільки значення x^2 не може бути від'ємним числом, меншим за -1.

2. Область допустимих значень (ОДЗ) нерівності означається аналогічно до ОДЗ рівняння. *Якщо задано нерівність $f(x) > g(x)$, то спільна область ви-*

значення для функцій $f(x)$ *і* $g(x)$ *називається областю допустимих значень цієї нерівності* (іноді використовуються також терміни «область визначення нерівності» або «множина допустимих значень нерівності»). Наприклад, для нерівності $x^2 < x$ областю допустимих значень є всі дійсні числа (це можна записати, наприклад, так: ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$), оскільки функції $f(x) = x^2$ і $g(x) = x$ мають області визначення $x \in \boldsymbol{R}$.

Зрозуміло, що кожен розв'язок заданої нерівності входить як до області визначення функції $f(x)$, так і до області визначення функції $g(x)$ (інакше ми не зможемо отримати правильну числову нерівність). Отже, *кожен розв'язок нерівності обов'язково входить до ОДЗ цієї нерівності.* Це дозволяє в деяких випадках використовувати аналіз ОДЗ нерівності для її розв'язування.

Наприклад, у нерівності $\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}>x$ функція $g(x) = x$ визначена при всіх дійсних значеннях x, а функція $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}$ тільки за умови, що під знаком квадратного кореня будуть стояти невід'ємні вирази. Отже, ОДЗ цієї нерівності задається системою $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 2-x \geqslant 0, \end{cases}$ з якої одержуємо систему $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 2, \end{cases}$ що не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданої нерівності не містить жодного числа, через те ця нерівність не має розв'язків.

В основному при розв'язуванні нерівностей різних видів нам доведеться використовувати один з двох методів розв'язування: рівносильні перетворення нерівностей або так званий метод інтервалів.

3. Рівносильні нерівності. З поняттям рівносильності нерівностей ви знайомі ще з курсу алгебри 9 класу. Як і для випадку рівносильних рівнянь, рівносильність нерівностей ми будемо розглядати на певній множині.

> ***Дві нерівності називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки, тобто кожен розв'язок першої нерівності є розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності є розв'язком першої.***

Домовимося, що надалі **всі рівносильні перетворення нерівностей будемо виконувати на ОДЗ заданої нерівності.** Зазначимо, що в тому випадку, коли ОДЗ заданої нерівності є множина всіх дійсних чисел, ми не завжди будемо її записувати (як не записували ОДЗ при розв'язуванні лінійних чи квадратних нерівностей). І в інших випадках головне — не записати ОДЗ до розв'язання нерівності, а дійсно врахувати її при виконанні рівносильних перетворень заданої нерівності.

Загальні орієнтири виконання рівносильних перетворень нерівностей аналогічні до відповідних орієнтирів виконання рівносильних перетворень рівнянь.

Як указано вище, виконуючи *рівносильні перетворення нерівностей*, необхідно **врахувати ОДЗ заданої нерівності** — це і є перший орієнтир для виконання рівносильних перетворень нерівностей.

За означенням рівносильності нерівностей потрібно забезпечити, щоб кожен розв'язок першої нерівності був розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності був розв'язком першої. Для цього досить **забезпечити збереження правильної нерівності на кожному кроці розв'язування не тільки при прямих, а й при зворотних перетвореннях.** Це і є другий орієнтир для розв'язування нерівностей за допомогою рівносильних перетворень. Дійсно, кожен розв'язок нерівності перетворює її на правильну числову нерівність, і якщо правильна нерівність зберігається, то розв'язок кожної з нерівностей буде також і розв'язком іншої, отже, нерівності будуть рівносильні (відповідні орієнтири схематично представлено в пункті 5 таблиці 38).

Наприклад, щоб розв'язати за допомогою рівносильних перетворень нерівність

$$\frac{x-3}{x+1}>0, \qquad (1)$$

досить врахувати її ОДЗ: $x + 1 \neq 0$ і умову додатності дробу (*дріб буде додатним тоді і тільки тоді, коли чисельник і знаменник дробу мають однакові знаки*), а також звернути увагу на те, що на ОДЗ всі потрібні перетворення можна виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\begin{cases} x-3>0, \\ x+1>0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x-3<0, \\ x+1<0. \end{cases} \qquad (2)$$

Тоді одержуємо $\begin{cases} x>3, \\ x>-1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x<3, \\ x<-1. \end{cases}$

Отже, $x > 3$ або $x < -1$.

Відповідь: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Коментар

Зауважимо, що при запису умови додатності дробу — сукупності систем (2) — ми неявно врахували ОДЗ нерівності (1). Дійсно, якщо $x + 1 > 0$ або $x + 1 < 0$, то $x + 1 \neq 0$, тому в явному вигляді ОДЗ заданої нерівності не записана при оформленні розв'язання.

Крім виділених загальних орієнтирів, для виконання рівносильних перетворень нерівностей можна також користуватися спеціальними теоремами про рівносильність. У зв'язку з уточненням означення рівносильності нерівностей узагальнимо також формулювання найпростіших теорем про рівносильність нерівностей, відомих з курсу алгебри 9 класу.

1. ***Якщо з однієї частини нерівності перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на будь-якій множині).***
2. ***Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності), не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).***

3. ***Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число (або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності) і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).***

Обґрунтування цих теорем повністю аналогічне до обґрунтування орієнтирів для рівносильних перетворень заданої нерівності.

З а у в а ж е н н я. Для позначення переходу від заданої нерівності до рівносильної їй нерівності можна використовувати спеціальний значок ⇔, але його використання при записуванні розв'язань не є обов'язковим (хоча іноді ми будемо ним користуватися, щоб підкреслити, що було виконано саме рівносильні перетворення).

4. Метод інтервалів. Розв'язування нерівностей методом інтервалів спирається на властивості функцій, пов'язані із зміною знаків функції. Пояснимо ці властивості, використовуючи графіки відомих нам функцій, наприклад, $y=\frac{1}{x}$ і $y = 2x - 2$ (рис. 100).

Розглядаючи ці графіки, помічаємо, що функція може змінити свій знак тільки у двох випадках:

1) якщо графік розривається (як у випадку функції $y=\frac{1}{x}$ (рис. 100, *а*) — графік розривається в точці 0 і знак функції змінюється в точці 0);
2) якщо графік без розриву переходить з нижньої півплощини у верхню (або навпаки), але тоді графік перетинає вісь Ox (як у випадку функції $y = 2x - 2$) (рис. 100, *б*). На осі Ox значення функції дорівнюють нулю. (Нагадаємо, що значення аргументу, при яких функція перетворюється на нуль, називають *нулями функції*.) Отже, **будь-яка функція може поміняти свій знак тільки в нулях або в точках, де розривається графік функції** (у так званих точках розриву функції [*]).

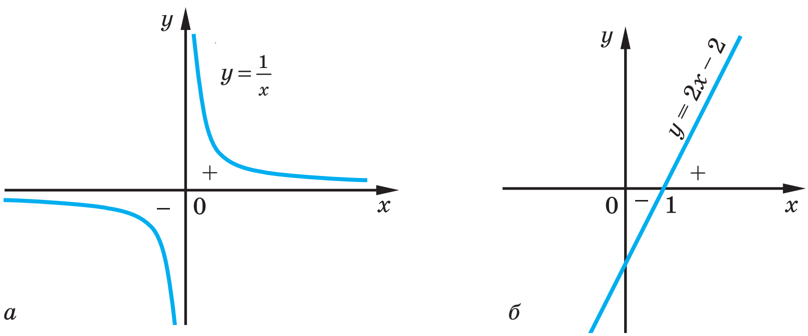


Рис. 100

[*] Більш детально це поняття буде розглянуто в курсі 11 класу.

Точки, у яких розривається графік функції $f(x)$, ми виділяємо, як правило, коли знаходимо область визначення цієї функції. Наприклад, якщо $f(x)=\frac{1}{x}$, то її область визначення $x \neq 0$, і саме в точці 0 графік цієї функції розривається (рис. 100, *а*). Якщо ж на якомусь проміжку області визначення графік функції не розривається і функція не дорівнює нулю, то за наведеним вище висновком вона не може в цьому проміжку поміняти свій знак*. Отже, якщо відмітити нулі функції на її області визначення, то область визначення розіб'ється на проміжки, всередині яких знак функції змінитися не може (і тому цей знак можна визначити в будь-якій точці з цього проміжку).

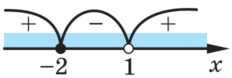
У таблиці 39 наведено розв'язання дробово-раціональної нерівності $\frac{2x+4}{x-1}>0$ методом інтервалів; коментар, який пояснює кожен крок розв'язування; *план розв'язування нерівностей виду* $f(x) \gtrless 0$ *методом інтервалів*.

Таблиця 39

Приклад	Коментар	План розв'язування
$\frac{2x+4}{x-1}>0.$ ▶ $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}.$ 1. ОДЗ: $x-1 \neq 0$, тобто $x \neq 1$.	Розглянемо функцію, яка стоїть у лівій частині цієї нерівності, і позначимо її через $f(x)$: $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$. Розв'язком нерівності $f(x)>0$ можуть бути тільки числа, що входять до області визначення функції $f(x)$, тобто числа, які входять до ОДЗ нерівності. Тому першим етапом розв'язування нерівності методом інтервалів буде знаходження її ОДЗ.	**1. Знайти ОДЗ нерівності.**
2. Нулі $f(x)$: $(f(x)=0)$. $\frac{2x+4}{x-1}=0$, тоді $x=-2$.	Нас цікавлять ті проміжки області визначення функції $f(x)$, на яких ця функція додатна. Як було зазначено вище, функція $f(x)$ може поміняти знак у своїх нулях, тому другим етапом розв'язування нерівності $f(x)>0$ буде знаходження нулів функції (для цього прирівнюємо функцію $f(x)$ до нуля і розв'язуємо одержане рівняння).	**2. Знайти нулі $f(x)$ $(f(x)=0)$.**

* У курсі 11 класу ми уточнимо формулювання цієї властивості (так званих неперервних функцій). Для всіх відомих вам функцій (лінійних, квадратичних, степеневих, дробово-раціональних, тригонометричних) ця властивість має місце.

Продовж. табл. 39

Приклад	Коментар	План розв'язування
3. 	Якщо тепер відмітити нулі на області визначення функції $f(x)$, то область визначення розбивається на проміжки, причому всередині кожного проміжку функція $f(x)$ не змінює свій знак. Тому знак функції в кожному проміжку можна визначати в будь-якій точці цього проміжку. Це і є третім етапом розв'язування.	**3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції в кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.**
4. *Відповідь:* $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$. ◁	На рисунку видно, що розв'язком нерівності є об'єднання проміжків $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$.	**4. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.**

Наведемо приклади розв'язування більш складної дробово-раціональної нерівності методом інтервалів та за допомогою рівносильних перетворень.

Приклад Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$.

I спосіб (метод інтервалів)

Розв'язання

▶ Нехай $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$.

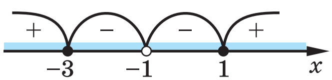
1 ОДЗ: $x \neq -1$.

2. Нулі $f(x)$: $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} = 0$,

$x^2 + 2x - 3 = 0$,

$x_1 = 1$, $x_2 = -3$ (входять до ОДЗ).

3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок).



4. *Відповідь:* $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Коментар

Задана нерівність має вигляд $f(x) \leqslant 0$, і для її розв'язування можна застосувати метод інтервалів. Для цього використаємо план, наведений вище та на с. 232.

При знаходженні нулів $f(x)$ стежимо за тим, щоб знайдені значення входили до ОДЗ (або виконуємо перевірку знайдених коренів рівняння $f(x) = 0$).

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід врахувати, що всі нулі функції повинні ввійти до відповіді (у даному випадку — числа -3 і 1).

II спосіб (за допомогою рівносильних перетворень)

Коментар

Виберемо для розв'язування метод рівносильних перетворень нерівності. При виконанні рівносильних перетворень ми повинні врахувати ОДЗ заданої нерівності, тобто врахувати обмеження $(x+1)^2 \neq 0$.

Але якщо $x \neq -1$, то $(x+1)^2 > 0$, і тоді в заданому дробу знаменник додатний. Якщо виконується задана нерівність, то чисельник дробу $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ (і навпаки, якщо виконується остання нерівність, то на ОДЗ дріб $\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2} \leqslant 0$), тобто задана нерівність рівносильна на ОДЗ нерівності $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$.

Щоб розв'язати одержану квадратну нерівність, знайдемо корені квадратного тричлена $x^2 + 2x - 3$ і побудуємо ескіз графіка функції $y = x^2 + 2x - 3$. Розв'язок квадратної нерівності: $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

Оскільки всі перетворення були рівносильними тільки на ОДЗ, то ми повинні вибрати тільки ті розв'язки квадратної нерівності, які задовольняють обмеженню ОДЗ.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $(x+1)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -1$.

Тоді $(x+1)^2 > 0$ і задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівності $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$. Оскільки $x^2 + 2x - 3 = 0$ при $x_1 = -3$, $x_2 = 1$ (ці значення x входять до ОДЗ), одержуємо $-3 \leqslant x \leqslant 1$ (див. рисунок).

Враховуючи ОДЗ, отримуємо відповідь.

Відповідь: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах зміст понять: «розв'язок нерівності», «розв'язати нерівність», «область допустимих значень нерівності», «рівносильні нерівності».
2. Сформулюйте відомі вам теореми про рівносильність нерівностей. Проілюструйте їх на прикладах.
3. Сформулюйте план розв'язування нерівностей методом інтервалів. Проілюструйте використання цього плану на прикладі.
4. Поясніть на прикладі, як можна виконувати рівносильні перетворення нерівностей у тих випадках, які не описуються відомими теоремами про рівносильність нерівностей.

Вправи

Розв'яжіть нерівність **(1—2)** двома способами: за допомогою рівносильних перетворень і за допомогою методу інтервалів.

1. 1) $\frac{x^2-4}{x^2-3x-4} \geqslant 0$; 2) $\frac{2}{x+2} < \frac{1}{x-3}$; 3) $\frac{x^2-25}{(x+5)(x-4)} \leqslant 0$; 4) $\frac{x^2+12}{x^2-2x-8} \geqslant 1$.

2. 1) $x^4 - 5x^2 + 4 \leqslant 0$; 2) $9x^4 - 10x^2 + 1 > 0$;

3) $\frac{81}{x} \geqslant x^3$; 4) $(x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) < 105$.

3. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{x-4}{x^2-4}}$; 2) $y = \sqrt{\frac{2x-x^2-1}{x^2+3x+2}}$; 3) $y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}$; 4) $y = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}$.

21.2. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЯМИ

Таблиця 40

1. Розв'язування рівнянь та нерівностей з модулями

за означенням

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0, \\ 0, \text{ якщо } a = 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

за геометричним змістом

$|a|$ — *відстань на числовій прямій від точки 0 до точки a.*

1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

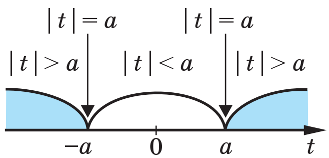
за загальною схемою

1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі всіх підмодульних функцій.**
3. **Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.**
4. **Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок).**

з використанням спеціальних співвідношень

Продовж. табл. 40

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a>0$)



1. $|f(x)|=a \Leftrightarrow f(x)=a$ **або** $f(x)=-a$.
2. $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ **або** $f(x)=-g(x)$.
3. $|f(x)|>a \Leftrightarrow f(x)<-a$ **або** $f(x)>a$.
4. $|f(x)|<a \Leftrightarrow -a<f(x)<a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-a, \\ f(x)<a. \end{cases}$

Узагальнення

5. $|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geqslant 0, \\ f(x)=g(x) \text{ або } f(x)=-g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)|>g(x) \Leftrightarrow f(x)<-g(x)$ **або** $f(x)>g(x)$.
7. $|f(x)|<g(x) \Leftrightarrow -g(x)<f(x)<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)>-g(x), \\ f(x)<g(x). \end{cases}$

3. Використання спеціальних співвідношень

1. $|u|=u \Leftrightarrow u\geqslant 0$.
2. $|u|=-u \Leftrightarrow u\leqslant 0$.
3. $|u|=|v| \Leftrightarrow u^2=v^2$.
4. $|u|>|v| \Leftrightarrow u^2>v^2$. **Тоді** $|u|-|v|>0 \Leftrightarrow u^2-v^2>0$; *знак різниці модулів двох виразів збігається із знаком різниці їх квадратів.*
5. $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u\geqslant 0, \\ v\geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u|+|v|=-u-v \Leftrightarrow \begin{cases} u\leqslant 0, \\ v\leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u|+|v|=|u+v| \Leftrightarrow uv\geqslant 0$.
8. $|u|+|v|=|u-v| \Leftrightarrow uv\leqslant 0$.
9. $|x-a|+|x-b|=b-a \Leftrightarrow a\leqslant x\leqslant b$, **де** $a<b$.

Пояснення й обґрунтування

Розв'язувати будь-яке рівняння або нерівність з модулем можна одним з трьох основних способів: за означенням модуля, виходячи з геометричного змісту модуля або за загальною схемою. Деякі рівняння або нерівність з модулем можуть бути також розв'язані з використанням спеціальних співвідношень (табл. 40).

Залежно від обраного способу розв'язування одержуємо різні записи розв'язання.

Приклад Розв'яжіть рівняння $|2x-4|=6$.

<u>I спосіб (за означенням модуля)</u>

Розв'язання

▶ 1) Якщо

$$2x-4\geqslant 0, \qquad (1)$$

то одержуємо рівняння

$$2x-4=6.$$

Тоді $x=5$, що задовольняє й умові (1).

2) Якщо

$$2x-4<0, \qquad (2)$$

то одержуємо рівняння

$$-(2x-4)=6.$$

Тоді $x=-1$, що задовольняє й умові (2).

Відповідь: 5; –1. ◁

Коментар

Щоб розкрити знак модуля за означенням, розглянемо два випадки:

$$2x-4\geqslant 0 \text{ і } 2x-4<0.$$

За означенням *модулем додатного (невід'ємного) числа є саме це число, а модулем від'ємного числа є протилежне йому число*. Тому при $2x-4\geqslant 0$ $|2x-4|=2x-4$, а при $2x-4<0$ $|2x-4|=-(2x-4)$.

У кожному випадку розв'язуємо одержане рівняння і з'ясовуємо, чи задовольняє кожен із знайдених коренів тій умові, при якій ми його знаходили.

<u>II спосіб (використовуючи геометричний зміст модуля)</u>

Розв'язання

▶ $2x-4=6$ або $2x-4=-6$,

$2x=10$ або $2x=-2$,

$x=5$ або $x=-1$.

Відповідь: 5; –1. ◁

Коментар

З геометричної точки зору $|2x-4|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x-4$. За умовою рівняння вона дорівнює 6, але відстань 6 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 6), так і ліворуч (одержуємо число –6). Отже, рівність $|2x-4|=6$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x-4=6$ або $2x-4=-6$.

Зауваження. При застосуванні геометричного змісту модуля знак модуля розкривається неявно, тобто не доводиться використовувати означення в явному вигляді.

Загальна схема розв'язування рівнянь та нерівностей з модулями — це фактично трохи змінений метод інтервалів. Пояснимо зміст цієї схеми на прикладі рівняння з двома модулями виду

$$|f(x)|+|g(x)|=a \quad (a>0).$$

Щоб розв'язати це рівняння, необхідно розкрити знаки модулів, а для цього необхідно знати, де функції $f(x)$ і $g(x)$ будуть додатними, а де — від'ємними. Тобто фактично ми повинні розв'язати нерівності

$$f(x) \gtrless 0, \qquad (1)$$

$$g(x) \gtrless 0. \qquad (2)$$

Кожну з цих нерівностей ми вміємо розв'язувати методом інтервалів. Перебудуємо прийом розв'язування нерівностей методом інтервалів таким чином, щоб він давав можливість одночасно розв'язувати кожну з останніх нерівностей. Як відомо, розв'язування нерівності (1) методом інтервалів починається із знаходження її ОДЗ (тобто області визначення функції $f(x)$), а розв'язування нерівності (2) — із знаходження її ОДЗ (тобто області визначення функції $g(x)$). Щоб почати одночасно розв'язувати обидві нерівності, необхідно знайти спільну область визначення для функцій $f(x)$ і $g(x)$, тобто **знайти ОДЗ заданого рівняння** (це і є *перший з орієнтирів* потрібної схеми).

Щоб продовжити розв'язування нерівностей $f(x) \gtrless 0$ та $g(x) \gtrless 0$ методом інтервалів, необхідно знайти нулі функцій $f(x)$ і $g(x)$, тобто **знайти нулі всіх підмодульних функцій** (це і є *другий орієнтир*).

Якщо далі використовувати схему методу інтервалів одночасно для двох нерівностей, необхідно **на ОДЗ позначити нулі підмодульних функцій і розбити ОДЗ на проміжки** (це *третій орієнтир*).

У кожному з одержаних проміжків знаки функцій $f(x)$ і $g(x)$ не можуть змінитися. Отже, ми можемо **знайти знаки підмодульних функцій на кожному проміжку** (у будь-якій точці цього проміжку), **розкрити знаки модулів і знайти розв'язок заданого рівняння в кожному з цих проміжків** (це і є *четвертий орієнтир* загальної схеми).

Обґрунтування можливості застосування наведеної схеми до розв'язування нерівностей з модулями проводиться аналогічно.

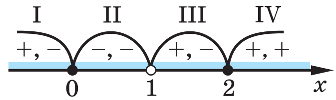
Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\left|\frac{x}{x-1}\right|+|x-2|=2.$

1. ОДЗ: $x \neq 1$.

2. Нулі підмодульних функцій: $\frac{x}{x-1}=0$ $(x=0)$ та $x-2=0$ $(x=2)$.

3. Нулі 0 і 2 розбивають ОДЗ на чотири проміжки, у яких підмодульні функції мають знаки,* показані на рисунку.



4. Знаходимо розв'язки заданого рівняння в кожному з проміжків (оскільки знаки підмодульних функцій однакові на проміжках I і III, зручно для розв'язання об'єднати ці проміжки).

<u>Проміжки I та III:</u> $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$. Враховуючи знаки підмодульних функцій на цих проміжках і означення модуля, одержуємо, що в цих проміжках задане рівняння рівносильне рівнянню $\frac{x}{x-1}-(x-2)=2$. Звідси $x = 0$ або $x = 2$. У розглянуті проміжки одержані значення не входять, отже, у цих проміжках коренів немає.

<u>Проміжок II:</u> $x \in [0; 1)$. (Слід звернути увагу на те, щоб не пропустити значення $x = 0$, яке входить в ОДЗ.) У цьому проміжку одержуємо рівняння $-\frac{x}{x-1}-(x-2)=2$. Звідси $x = 0$ — корінь, оскільки входить у цей проміжок.

<u>Проміжок IV:</u> $x \in [2; +\infty)$. (І в цьому проміжку необхідно не забути значення $x = 2$.) Одержуємо рівняння $\frac{x}{x-1}+x-2=2$. Звідси $x = 2$ — корінь, оскільки входить у цей проміжок.

Об'єднуючи всі розв'язки, які ми одержали в кожному проміжку, маємо розв'язок заданого рівняння на всій ОДЗ.

Відповідь: 0; 2. ◁

Проілюструємо також одержання і використання спеціальних співвідношень, наведених у таблиці 40.

Обґрунтуємо, наприклад, співвідношення 5: $|u|+|v|=u+v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

● Запишемо задану рівність у вигляді $u + v = |u| + |v|$ і проаналізуємо її, спираючись на відомі з 6 класу правила дій над числами з однаковими і з різними знаками. Щоб додати два числа u і v, ми додали їх модулі, отже, ці числа мають однакові знаки. Якби ці числа були обидва від'ємні, то і їх сума була б теж від'ємна, але $u+v=|u|+|v|\geqslant 0$. Тоді одержуємо, що числа u і v — обидва невід'ємні. Навпаки, якщо $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0, \end{cases}$ то виконується рівність

* На рисунку в кожному з проміжків перший знак — це знак функції $\frac{x}{x-1}$, а другий — знак функції $x - 2$. При виконанні рисунка зручно спочатку позначити на числовій прямій ОДЗ, а потім нулі підмодульних функцій на ОДЗ.

$u+v=|u|+|v|$. Отже, дійсно, рівняння $|u|+|v|=u+v$ рівносильне системі нерівностей $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$ ○

Приклад 2* Розв'яжіть рівняння $|x-5|+|2x+5|=3x$.

Розв'язання

▶ Оскільки $3x=(x-5)+(2x+5)$, то задане рівняння має вигляд $|u|+|v|=u+v$, але ця рівність може виконуватися тоді і тільки тоді, коли числа u і v — обидва невід'ємні. Отже, задане рівняння рівносильне системі

$\begin{cases} x-5 \geqslant 0, \\ 2x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x \geqslant 5, \\ x \geqslant -\frac{5}{2}. \end{cases}$

Отже, $x \geqslant 5$.

Відповідь: $[5; +\infty)$. ◁

Коментар

Якщо позначити $x-5=u$ і $2x+5=v$, то $u+v=3x$ і задане рівняння має вигляд $|u|+|v|=u+v$, а за співвідношенням 5 таке рівняння рівносильне системі $\begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$

Зауважимо, що задане рівняння можна розв'язувати і за загальною схемою, але тоді розв'язання буде більш громіздке.

При розв'язуванні *нерівностей з модулями* міркування, пов'язані з розкриттям знаків модулей, повністю аналогічні міркуванням, які використовувалися при розв'язуванні рівнянь із модулями.

Приклад 3 Розв'яжіть нерівність $|2x-5| \leqslant 7$.

Розв'язання

▶ За геометричним змістом модуля задана нерівність рівносильна нерівності

$$-7 \leqslant 2x-5 \leqslant 7. \qquad (1)$$

Тоді $-2 \leqslant 2x \leqslant 12$, отже, $-1 \leqslant x \leqslant 6$.

Відповідь: $[-1; 6]$. ◁

Коментар

Нерівність виду $|f(x)| \leqslant a$ (де $a>0$) зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. Зокрема, задана нерівність — це нерівність виду $|t| \leqslant 7$. Але модуль числа — це відстань на координатній прямій від точки, що зображує дане число, до точки 0. Тобто заданій нерівності задовольняють всі точки, які знаходяться в проміжку $[-7; 7]$, отже, $-7 \leqslant t \leqslant 7$. Якщо виникають утруднення з розв'язуванням подвійної нерівності (1), то її замінюють на рівносильну систему $\begin{cases} 2x-5 \geqslant -7, \\ 2x-5 \leqslant 7. \end{cases}$

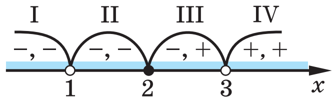
Приклад 4 Розв'яжіть нерівність

$$\frac{|x-3|}{|x-2|-1} \geqslant 1. \qquad (1)$$

▶ 1. ОДЗ: $|x-2|-1 \neq 0$. Тоді $|x-2| \neq 1$, тобто $x-2 \neq \pm 1$, отже: $x \neq 3$ або $x \neq 1$.

2. Нулі підмодульних функцій: $x-3=0$ ($x=3$ — не входить до ОДЗ) та $x-2=0$ ($x=2$).

3. Нуль 2 розбиває ОДЗ на чотири проміжки, на яких підмодульні функції мають знаки, показані на рисунку (на кожному з проміжків перший знак — це знак функції $x-3$, а другий — знак функції $x-2$).



4. Знаходимо розв'язки заданої нерівності в кожному з проміжків (оскільки знаки підмодульних функцій є однаковими на проміжках I і II, зручно для розв'язання об'єднати ці проміжки).

<u>Проміжки I та II:</u> $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$. Враховуючи знаки підмодульних функцій у цих проміжках і означення модуля, одержуємо, що при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$ задана нерівність рівносильна нерівності $\frac{-(x-3)}{-(x-2)-1} \geqslant 1$.

Тоді $\frac{3-x}{1-x} \geqslant 1$, тобто $\frac{2}{1-x} \geqslant 0$. Звідси $x < 1$. У проміжки, які ми розглянули, входять всі значення $x < 1$, отже, у цьому випадку розв'язком буде $x < 1$.

<u>Проміжок III:</u> $x \in [2; 3)$. На цьому проміжку одержуємо нерівність $\frac{-(x-3)}{x-2-1} \geqslant 1$, тобто $\frac{-(x-3)}{x-3} \geqslant 1$. Але при будь-якому значенні x з III проміжку остання нерівність перетворюється на хибну нерівність ($-1 \geqslant 1$). Отже, у проміжку III нерівність (1) розв'язків не має.

<u>Проміжок IV:</u> $x \in (3; +\infty)$. У цьому проміжку одержуємо нерівність $\frac{x-3}{x-2-1} \geqslant 1$, тобто $\frac{x-3}{x-3} \geqslant 1$. Як бачимо, при будь-якому x з IV проміжку нерівність (1) перетворюється на правильну числову нерівність ($1 \geqslant 1$). Отже, розв'язком нерівності (1) у IV проміжку є будь-яке число з цього проміжку ($x > 3$).

Об'єднуючи всі розв'язки, які ми одержали в кожному з проміжків, маємо розв'язок заданої нерівності на всій ОДЗ: $x < 1$ або $x > 3$.

Відповідь: $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Зазначимо, що для розв'язування деяких нерівностей з модулями зручно використовувати також спеціальні співвідношення, наведені в таблиці 40.

Приклад 5* Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(|x-1|-|x+3|)(|2x|-|x+6|)}{|1-x|-|x+2|}<0.$

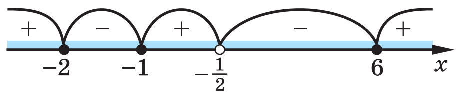
▶ Оскільки $|a|\geqslant 0$ і функція $y=t^2$ монотонно зростає на множині невід'ємних чисел, то всі різниці модулів у нерівності можна замінити на різниці їх квадратів (тобто скористатися співвідношенням 4: $|u|-|v|>0 \Leftrightarrow u^2-v^2>0$). Тоді одержуємо нерівність, рівносильну заданій нерівності

$$\frac{\left((x-1)^2-(x+3)^2\right)\left((2x)^2-(x+6)^2\right)}{(1-x)^2-(x+2)^2}<0.$$

Тепер, розкладаючи на множники всі різниці квадратів, маємо:

$$\frac{(-4)(2x+2)(x-6)(3x+6)}{(-1-2x)3}<0.$$

Далі методом інтервалів одержуємо $-2<x<-1$ або $-\frac{1}{2}<x<6.$



Відповідь: $-2<x<-1$ або $-\frac{1}{2}<x<6.$ ◁

Загальна схема, запропонована в таблиці 40, може бути використана не тільки при розв'язуванні рівнянь чи нерівностей з модулями, але й при виконанні перетворень виразів із модулями.

Наприклад, для побудови графіка функції $f(x)=|x+1|+|x-1|$ зручно спочатку за загальною схемою розкрити знаки модулів, а вже потім будувати графік функції $f(x)$.

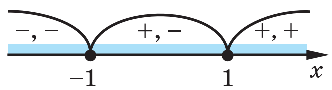
Оформлення розв'язання подібного прикладу може бути таким.

Приклад 6 Побудуйте графік функції $f(x)=|x+1|+|x-1|$.

▶ 1. Область визначення функції: $x \in \boldsymbol{R}$.

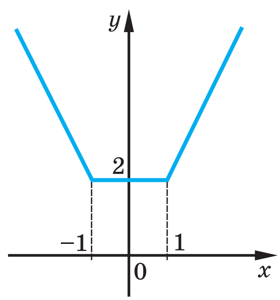
2. Нулі підмодульних функцій: $x=-1$ і $x=1$.

3. Позначаємо нулі на області визначення і розбиваємо область визначення на проміжки (на рисунку також указано знаки підмодульних функцій у кожному з проміжків).



4. Тоді $f(x)=\begin{cases}-(x+1)-(x-1), \text{ якщо } x\leqslant -1,\\ x+1-(x-1), \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1+x-1, \text{ якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$

Отже, $f(x)=\begin{cases}-2x, \text{ якщо } x\leqslant -1,\\ 2, \text{ якщо } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2x, \text{ якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$



Будуємо графік цієї функції (див. рисунок). ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, якими способами можна розв'язувати рівняння та нерівності з модулями. Проілюструйте ці способи на прикладах.
2. Обґрунтуйте спеціальні співвідношення, наведені в таблиці 40. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей з модулями.
3. Обґрунтуйте узагальнення використання геометричного змісту модуля, наведені в таблиці 40. Проілюструйте їх застосування до розв'язування рівнянь та нерівностей з модулями.

Вправи

Розв'яжіть рівняння і нерівності з модулями **(1–15)**.

1. 1) $|3x-5|=7$; 2) $|8-4x|=6$; 3) $|x^2-5x|=6$.

2. 1) $|2x-3|>5$; 2) $|3-5x|<7$; 3*) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>2$; 4) $\left|\frac{2x-3}{x-5}\right|<1$.

3. 1) $|x-2|-2x-1=0$; 2) $x^2+3x+|x+3|=0$.

4. 1) $|x-1|+|x-3|=2$; 2) $|x+1|+|x-5|=20$; 3) $|x+5|+|x-8|=13$.

5. 1) $|x+3|<x-2$; 2) $|x+1|+|x-2|\leqslant 2x-1$; 3) $|x+3|+|x-1|<|6-3x|$.

6. 1) $\sqrt{x^2-2x+1}+|x-2|=1$; 2) $\sqrt{x^2+4x+4}+|x|=x+5$.

7. 1) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}=8$; 2) $\sqrt{16-8x+x^2}+\sqrt{x^2+2x+1}=5$.

8. 1) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|}=1$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}=|x+1|$.

9. 1) $||x-1|-2|=1$; 2) $||2x-4|-5|=3$.

10. 1) $|x^2-4x|<5$; 2) $|x^2-x-6|>4$.

11. 1) $3|x-1|+x^2-7>0$; 2) $|x-6|\geqslant x^2-5x+9$.

12. 1) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1$; 2) $\frac{1}{|x|-3}<\frac{1}{2}$.

13. 1) $||x-1|-5|\leqslant 2$; 2) $|x-1|+|x+2|-|x-3|>4$.

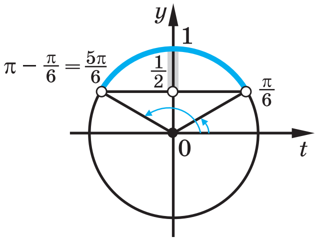
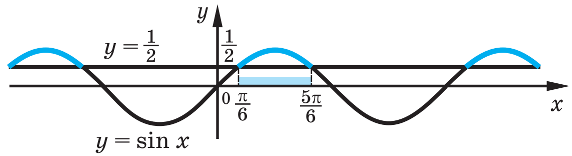
14. 1) $|x-2x^2|>2x^2-x$; 2) $|x^2+x-20|\leqslant x^2+x-20$.

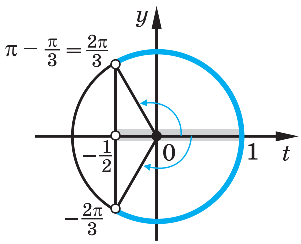
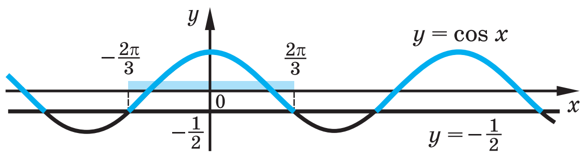
15. 1) $\frac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$; 2) $\frac{4}{|x+1|-2}\geqslant|x-1|$.

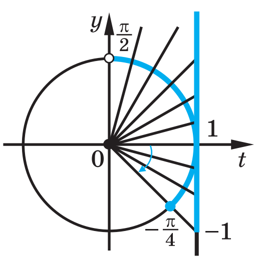
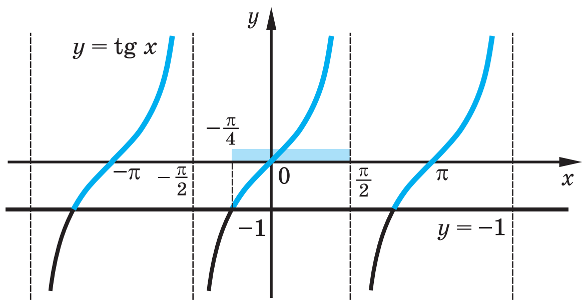
16. Побудуйте графік функції:
1) $y=|2x-4|+|2x+6|$; 2) $y=|x-5|+|3x+6|$.

§22 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 41

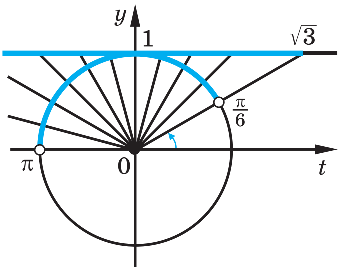
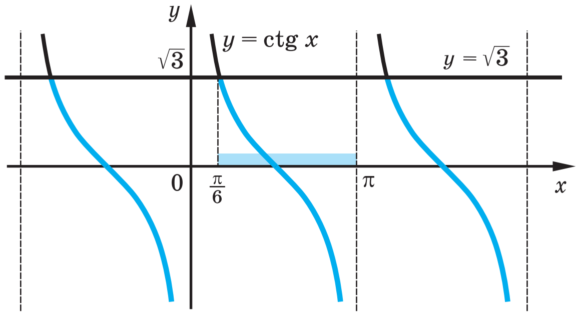
<table>
<tr><td colspan="2">1. Приклади розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей</td></tr>
<tr><td>за допомогою одиничного кола</td><td>за допомогою графіків</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$\sin x > \frac{1}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$\cos x > -\frac{1}{2}$ $\quad$ $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$\mathrm{tg}\, x \geqslant -1$ $\quad$ $-\frac{\pi}{4} + \pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 41

за допомогою одиничного кола	за допомогою графіків
 	
	$\boldsymbol{\text{ctg}\, x < \sqrt{3}}$ $\quad$ $\boldsymbol{\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in Z}$

2. Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей

а) **Використання рівносильних перетворень** і, зокрема, *зведення до алгебраїчної нерівності за схемою:* 1) *до одного аргументу*, 2) *до однієї функції*, 3) *заміна змінної* (аналогічно до схеми розв'язування тригонометричних рівнянь, наведеної на с. 170) *і наступне розв'язування одержаних найпростіших тригонометричних нерівностей.*

б) **Використання методу інтервалів** **(після зведення нерівності до вигляду $f(x) \gtrless 0$) за схемою:**

1) **Знайти ОДЗ нерівності.**
2) **Знайти** спільний період (якщо він існує) для всіх функцій, що входять до запису нерівності, тобто **період функції $f(x)$.**
3) **Знайти нулі функції: $f(x) = 0$.**
4) **Позначити нулі функції на ОДЗ всередині одного періоду і знайти знак функції $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ** (всередині одного періоду).
5) **Записати відповідь**, враховуючи знак заданої нерівності і період функції $f(x)$.

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей. Найпростішими тригонометричними нерівностями вважають нерівності виду $\sin x > a$, $\cos x > a$, $\text{tg}\, x > a$, $\text{ctg}\, x > a$ (на місці знаку «>» може стояти будь-який із знаків нерівності: «<, ⩾, ⩽»).

Щоб зробити міркування по знаходженню розв'язків цих нерівностей більш наочними, використовують одиничне коло або графіки відповідних функцій, як це показано в першому пункті таблиці 41.

Приклад 1 Пояснимо більш детально розв’язання нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$, наведене в пункті 1 таблиці 41, з використанням одиничного кола (рис. 101).

▶ Оскільки $\sin x$ — це ордината відповідної точки P_x одиничного кола, то при всіх значеннях x, які задовольняють даній нерівності, точка P_x має ординату, більшу за $\frac{1}{2}$. Усі такі точки на одиничному колі лежать вище за пряму $y = \frac{1}{2}$ (вони зображені на рисунку синьою дугою $P_{x_1}P_{x_2}$ без крайніх точок, оскільки в крайніх точках $\sin x = \frac{1}{2}$, а не більший за $\frac{1}{2}$). Якщо, записуючи відповідь, рухатися проти годинникової стрілки, то точка P_{x_1} буде початком дуги $P_{x_1}P_{x_2}$, а точка P_{x_2} — її кінцем. Спочатку запишемо відповідь на одному періоді (нагадаємо, що для синуса період дорівнює 2π). Для точок P_x виділеної дуги $x_1 < x < x_2$. Оскільки точка P_{x_1} знаходиться в правій півплощині, то можна взяти $x_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Тоді $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$. Таким чином, на одному періоді розв’язками заданої нерівності є: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Через період 2π значення синуса повторюються, отже, всі інші розв’язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв’язків чисел виду $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Для розв’язування нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$ можна скористатися також графіками функцій $y = \sin x$ та $y = \frac{1}{2}$ (рис. 102).

▶ Розв’язками нерівності $\sin x > \frac{1}{2}$ будуть ті і тільки ті значення x, для яких відповідні точки графіка функції $y = \sin x$ знаходяться вище прямої $y = \frac{1}{2}$ (на рисунку 102 відповідні частини графіка функції виділено синіми лініями). Щоб знайти абсциси точок перетину цих графіків, досить розв’язати рівняння

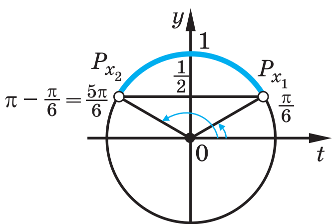


Рис. 101

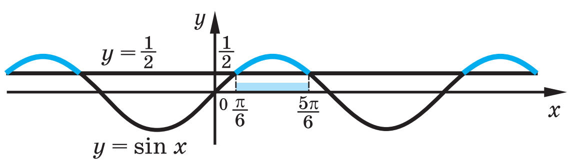


Рис. 102

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\left(x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}\right)$. Враховуючи періодичність функції sin x (T = 2π), досить записати розв'язок заданої нерівності на одному періоді. На відрізку довжиною 2π можна взяти, наприклад, такі абсциси точок перетину графіків функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$: $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ (усі інші абсциси точок перетину відрізняються від них на $2\pi k$). Тоді на одному періоді розв'язками заданої нерівності є: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$ (абсциси виділених точок графіка y = sin x). Усі інші розв'язки заданої нерівності одержуються додаванням до знайдених розв'язків чисел виду $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. *Відповідь:* $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Аналогічно можна одержати і розв'язки інших видів найпростіших нерівностей, наведених у пункті 1 таблиці 41.

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{1}{2}$.

▶ Оскільки cos x — це абсциса відповідної точки P_x одиничного кола, то при всіх значеннях x, які задовольняють даній нерівності, точка P_x має абсцису, більшу за $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Усі такі точки на одиничному колі (рис. 103) лежать праворуч від прямої $t = -\frac{1}{2}$ (вони зображені на рисунку синьою дугою $P_{x_1}P_{x_2}$ без крайніх точок, оскільки в крайніх точках $\cos x = -\frac{1}{2}$, а не більший за $-\frac{1}{2}$). Якщо, записуючи відповідь, рухатися проти годинникової стрілки, то точка P_{x_1} буде початком дуги $P_{x_1}P_{x_2}$, а точка P_{x_2} — її кінцем. Спочатку запишемо відповідь на одному періоді (нагадаємо, що для косинуса він дорівнює 2π). Для точок P_x виділеної дуги $x_1 < x < x_2$. Оскільки точка P_{x_2} знаходиться у верхній півплощині, то можна взяти $x_2 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Враховуючи симетричність точок P_{x_2} і P_{x_1} відносно осі t, одержуємо $x_1 = -x_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

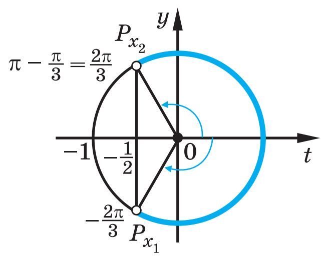


Рис. 103

Таким чином, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$. Через період 2π значення косинуса повторюються. Отже, усі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

Одержуємо *відповідь:* $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k<x<\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Міркування при використанні графічної ілюстрації розв'язування нерівності $\cos x>-\frac{1}{2}$ повністю аналогічні наведеним вище міркуванням по розв'язуванню нерівності $\sin x>\frac{1}{2}$.

Приклад 3 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x\geqslant -1$.

▶ Період тангенса дорівнює π. Тому спочатку знайдемо розв'язки цієї нерівності на проміжку довжиною π, наприклад, на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а потім використаємо періодичність тангенса. Для виділення тих точок P_x правого півкола, значення x яких задовольняють заданій нерівності, скористаємося лінією тангенсів (рис. 104). Спочатку виділимо на лінії тангенсів значення тангенсів, більші або рівні (-1) (на рисунку вони виділені синьою лінією), а потім для кожної точки лінії тангенсів знайдемо відповідну точку P_x на правому півколі (для цього досить з'єднати центр кола з виділеною точкою на лінії тангенсів і взяти точку перетину проведеного відрізка з колом). Множина відповідних точок P_x одиничного кола виділена на рисунку синьою дугою $P_{x_1}P_{\frac{\pi}{2}}$ (зверніть увагу: точка P_{x_1} належить розглянутій множині, а точка $P_{\frac{\pi}{2}}$ — ні). Оскільки точка P_{x_1} знаходиться у правій півплощині, то можна взяти $x_1=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$. Отже, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є $-\frac{\pi}{4}\leqslant x<\frac{\pi}{2}$. Через період π значення тангенса повторюються. Тому усі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду πk, де $k\in \boldsymbol{Z}$. *Відповідь:* $-\frac{\pi}{4}+\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$ ◁

Зауважимо, що при розв'язуванні заданої нерівності з використанням графіків досить, як і в попередніх випадках, на одному періоді (наприклад, на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$) записати ті абсциси, для яких відповідні точки графіка функції $y=\operatorname{tg} x$ знаходяться вище прямої $y=-1$ або на самій прямій. (На рисунку в таблиці 41 відповідні частини графіка функції $y=\operatorname{tg} x$ виділено синіми лініями.)

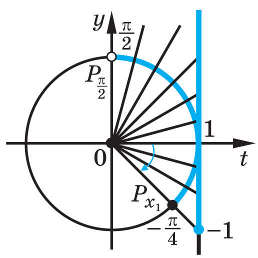


Рис. 104

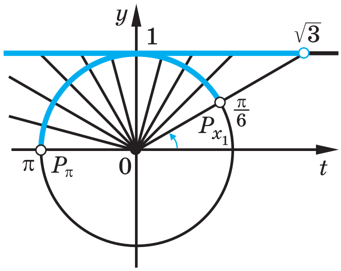


Рис. 105

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$.

▶ Період котангенса дорівнює π. Тому спочатку знайдемо розв'язки цієї нерівності на проміжку довжиною π, наприклад на проміжку $(0; \pi)$, а потім скористаємося періодичністю котангенса.

Для виділення тих точок P_x верхнього півкола, значення x яких задовольняють заданій нерівності, скористаємося лінією котангенсів (рис. 105). Спочатку виділимо на лінії котангенсів значення котангенсів, менші $\sqrt{3}$ (на рисунку 105 вони виділені синьою лінією), а потім для кожної точки лінії котангенсів знайдемо відповідну точку P_x на верхньому півколі (для цього досить з'єднати центр кола з виділеною точкою на лінії котангенсів і взяти точку перетину проведеного відрізка з колом). Множина відповідних точок P_x одиничного кола позначена на рисунку 105 синьою дугою $P_{x_1}P_\pi$. Оскільки точка P_{x_1} знаходиться у верхній півплощині, то можна взяти $x_1 = \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$. Таким чином, на одному періоді розв'язками заданої нерівності є $\frac{\pi}{6} < x < \pi$. Через період π значення котангенса повторюються. Отже, всі інші розв'язки заданої нерівності отримуємо додаванням до знайдених розв'язків чисел виду πk, де $k \in \boldsymbol{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. ◁

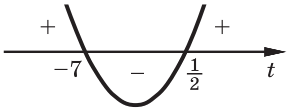
Аналогічно попереднім випадкам при розв'язуванні нерівності $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ з використанням графіків досить на одному періоді (наприклад, на проміжку $(0; \pi)$) записати ті абсциси, для яких відповідні точки графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ знаходяться нижче прямої $y = \sqrt{3}$. (На рисунку в таблиці 41 відповідні частини графіка функції $y = \operatorname{ctg} x$ виділено синіми лініями.)

2. Способи розв'язування більш складних тригонометричних нерівностей також проілюструємо на прикладах.

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x < \cos 2x$.

Розв'язання	Коментар
▶ $\frac{5}{4}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1}{4}\left(1-\cos^2 2x\right) < \cos 2x$. Тоді $2\cos^2 2x + 13\cos 2x - 7 > 0$. Заміна: $\cos 2x = t$ дає нерівність	Використаємо рівносильні перетворення заданої нерівності. Для цього зведемо її до алгебраїчної за схемою, аналогічною до схеми розв'я-

$2t^2 + 13t - 7 > 0$, розв'язки якої: $t < -7$ або $t > \frac{1}{2}$ (див. рисунок).



Обернена заміна дає: $\cos 2x < -7$ (розв'язків немає) або $\cos 2x > \frac{1}{2}$. Тоді

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Отже, $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

зування тригонометричних рівнянь:
1) до одного аргументу ($2x$);
2) до однієї функції ($\cos 2x$);
3) заміна змінної ($\cos 2x = t$). Після оберненої заміни розв'яжемо одержані найпростіші тригонометричні нерівності.

Розв'язуючи більш складні тригонометричні нерівності, можна також використати *метод інтервалів*, трохи змінивши його. Необхідність корекції відомої схеми розв'язування нерівностей $f(x) \gtrless 0$ методом інтервалів (с. 232) пов'язана з тим, що у випадку, коли функція $f(x)$ — тригонометрична, вона, як правило, має нескінченну множину коренів (які одержуємо при цілих значеннях параметра). Тому, якщо намагатися позначити корені на ОДЗ, доведеться позначити нескінченну їх множину, що неможливо. Уникнути цього можна, якщо знайти період функції $f(x)$ (якщо він існує) й розглянути знак функції на кожному проміжку всередині одного періоду.

Таким чином, **метод інтервалів для розв'язування тригонометричних нерівностей $f(x) \gtrless 0$** може застосовуватися за схемою:

1. **Знайти ОДЗ нерівності.**
2. **Знайти період функції $f(x)$ (якщо він існує).**
3. **Знайти нулі функції ($f(x) = 0$).**
4. **Позначити нулі на ОДЗ всередині одного періоду і знайти знак функції у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (всередині одного періоду).**
5. **Записати відповідь (ураховуючи знак заданої нерівності і період функції $f(x)$).**

Приклад 6 Розв'яжіть нерівність $\cos 2x \leqslant \cos 3x - \cos 4x$.

▶ Розв'яжемо дану нерівність методом інтервалів. Для цього зведемо її до вигляду $f(x) \leqslant 0$:

$$\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x \leqslant 0.$$

1. ОДЗ: x — будь-яке дійсне число.
2. Як ми знаємо, період функції $\cos x$ дорівнює 2π. Тоді період функції $\cos 2x$ буде $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, період функції $\cos 3x$ — $T_2 = \frac{2\pi}{3}$, і період функції $\cos 4x$ — $T_3 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

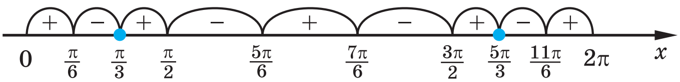
На відрізку довжиною 2π періоди T_1, T_2, T_3 вміщуються ціле число разів. Тоді 2π буде спільним періодом для всіх цих трьох функцій, і тому 2π є періодом функції $f(x) = \cos 2x + \cos 4x - \cos 3x$.

3. Знайдемо нулі цієї функції: $\cos 2x + \cos 4x - \cos 3x = 0$.

$$\text{Тоді } 2\cos 3x \cos x - \cos 3x = 0,\ \cos 3x\,(2\cos x - 1) = 0.$$

Звідси $\cos 3x = 0$ або $2\cos x - 1 = 0$. Розв'язуючи останні рівняння, одержуємо $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, або $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Позначимо всі нулі на періоді довжиною 2π, наприклад, на відрізку від 0 до 2π і одержимо 9 проміжків (див. рисунок).



Знаходимо знаки функції $f(x)$ на кожному з проміжків. Для цього зручно записати функцію $f(x)$ у вигляді добутку: $f(x) = \cos 3x\,(2\cos x - 1)$.

Відповідь (записується з урахуванням періоду):

$$x \in \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right] \cup$$

$$\cup \left[\frac{5\pi}{3} + 2\pi k; \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right],\ k \in Z. \ \triangleleft$$

З а у в а ж е н н я. При розв'язуванні тригонометричних нерівностей методом інтервалів часто доводиться знаходити знак функції у великій кількості проміжків. Для того щоб зменшити обсяг роботи, можна запропонувати такий спосіб: стежити за тим, через який нуль ми проходимо при переході з одного інтервалу до іншого і чи змінюється знак даної функції в цьому нулі.

У випадку, коли функція $f(x)$, що стоїть у лівій частині нерівності, записана у вигляді добутку $\varphi(x) \cdot g(x)$, необхідно звертати увагу на те, що знак добутку не зміниться, якщо одночасно обидва множники (функції $\varphi(x)$ і $g(x)$) змінюють знаки на протилежні.

Практично для використання цієї властивості у випадку, якщо ліва частина нерівності записана як добуток кількох функцій, нулі кожного множника позначають на проміжку різним кольором (так, як це зроблено на рисунку до прикладу 6), або, якщо множників лише два, нулі першого множника позначають під віссю, а нулі другого — над віссю.

Якщо у функцій-множників немає однакових нулів, то знак функції $f(x)$ змінюється автоматично при переході через кожний нуль (за умови, що тільки одна з функцій-множників змінює знак при переході через цей нуль). У цьому випадку для знаходження всіх знаків функції $f(x)$ на періоді досить знайти її знак лише в одному проміжку, а в інших розставити знаки, чергуючи їх. Якщо ж у функцій-множників є однакові нулі, то при переході через такий нуль знак добутку може не змінюватися, і це враховується при розстановці знаків.

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності за допомогою: а) одиничного кола; б) графіка відповідної функції.
2. Чи завжди мають розв'язки нерівності: 1) $\sin x < a$; 2) $\sin x > a$; 3) $\cos x < a$; 4) $\cos x > a$; 5) $\operatorname{tg} x < a$; 6) $\operatorname{tg} x > a$; 7) $\operatorname{ctg} x < a$; 8) $\operatorname{ctg} x > a$? Чи можуть бути розв'язками якихось із цих нерівностей всі дійсні числа? Наведіть приклади.
3. Якими способами можна розв'язувати тригонометричні нерівності, що відрізняються від найпростіших ? Наведіть приклади.

Вправи

Розв'яжіть нерівність **(1–14)**.

1. 1) $\sin x \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x < -2$; 4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. 1) $\cos x > \frac{1}{2}$; 2) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos x \leqslant 3$; 4) $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. 1) $\operatorname{tg} x < -1$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant 1$.

4. 1) $\operatorname{ctg} x > -\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg} x \geqslant 1$; 3) $\operatorname{ctg} x \leqslant -1$; 4) $\operatorname{ctg} x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. 1) $\sin 2x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geqslant -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{ctg} 5x < 1$.

6. 1) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geqslant 1$; 2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$;

3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$; 4) $2\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > \sqrt{2}$.

7. 1) $\sin\frac{\pi}{6}\cos 3x - \cos\frac{\pi}{6}\sin 3x > \frac{1}{2}$; 2) $\sin 5x \cos 5x \leqslant \frac{1}{4}$; 3) $\sin x + \cos x < 1$.

8. 1) $\left|\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\right| < \frac{1}{2}$; 2) $|\operatorname{tg} x| > 1$.

9. 1) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > \sqrt{3}$; 2) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{tg} 2x < \sqrt{3}$.

10. 1) $\sin x > \cos^2 x$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x > \sin 2x$.

11. 1) $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geqslant 0$; 2) $\sin x < \cos x$.

12. 1) $\cos 2x + \cos 6x > 1 + \cos 8x$; 2) $\sin x \sin 7x > \sin 3x \sin 5x$.

13. 1) $\sqrt{\sin x} > \sqrt{-\cos x}$; 2) $\sin x > \sqrt{1 - \sin 2x}$.

14. 1) $\sin 9x - \sin 5x + 2\sin^2 x < 2\sin 2x + 1 - \cos 2x$;
2) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

15. Знайдіть розв'язки нерівності $\sqrt{\sin 2x} < \cos x - \sin x$, які задовольняють умові $|x| < \pi$.

16. Знайдіть значення x на відрізку $0 \leqslant x \leqslant \pi$, які задовольняють нерівності $\sin 2x - \cos x + \sqrt{2}\sin x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

17. Розв'яжіть нерівність:
1) $\sin 4x > a(\sin 3x - \sin x)$; 2) $a(\cos x - \sin x)^2 + b\cos^2 x \geqslant 0$.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

Розв'яжіть рівняння **(1–8)**.

1. 1) $\sin^2 x - 4\sin x = 5$; 2) $\cos^2 x + 5\cos x = 6$;
3) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0$; 4) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0$.

2. 1) $\sin 2x + \mathrm{tg}\, x = 0$; 2) $\sin x + \mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 0$;
3) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 0$; 4) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 0$.

3. 1) $1 + \cos x - 2\cos\frac{x}{2} = 0$; 2) $1 - \cos x - 2\sin\frac{x}{2} = 0$;
3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; 4) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$.

4. 1) $\cos^2 x - 3\cos x\sin x + 1 = 0$; 2) $\sin^2 x + 3\cos x\sin x + 1 = 0$;
3) $2 + \cos^2 x = 2\sin x$; 4) $3 - 3\cos x = 2\sin^2 x$.

5. 1) $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$; 2) $(1 - \cos 4x)\cos 2x = \sin^2 2x$;
3) $5\sin^2 x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$; 4) $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7$.

6. 1) $1 - \cos x - \sqrt{3}\sin\frac{x}{2} = 0$; 2) $1 + \cos x + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 0$;
3) $\cos^2 4x + 3\sin^2 2x - 1 = 0$; 4) $\cos^2 4x + 3\cos^2 2x - 1 = 0$.

7. 1) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)$; 2) $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;
3) $1 - \cos 4x = \sin 2x$; 4) $1 + \cos 4x = \cos 2x$.

8. 1) $1 - \cos(\pi + x) - \sin\frac{3\pi + x}{2} = 0$; 2) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 5\sin(\pi - x) + 3 = 0$;
3) $2\cos^2(2\pi + x) - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2$; 4) $5\sin^2(1{,}5\pi - x) + 2\sin^2(\pi - x) = 2$.

Знайдіть розв'язки рівняння **(9–10)**.

9. 1) $\sin x + \cos x = 1$ на інтервалі $(-2\pi; 0)$;
2) $\sin x - \cos x = 1$ на інтервалі $(0; 2\pi)$;
3) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$ на проміжку $[0; 90^\circ]$;
4) $-\sin^2 x + \cos^2 x = \cos\frac{x}{2}$ на проміжку $[180^\circ; 270^\circ]$.

10. 1) $\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$ на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

2) $\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}$ на проміжку $[\pi; 2\pi]$;

3) $4 \sin x \sin 2x \sin 3x=\sin 4x$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

4) $4 \cos x \cos 2x \sin 3x=\sin 2x$ на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'яжіть рівняння **(11–26)**.

11. 1) $\sin 6x-2\sin 2x=0$; 2) $\cos 6x+2\cos 2x=0$;

3) $\cos^2\frac{x}{2}+\cos 3x=\sin^2\frac{x}{2}-\cos x$; 4) $\sin^2 x+\sin 3x=\cos^2 x+\sin x$.

12. 1) $4\cos^2 x-\sin 2x=1$; 2) $3\sin^2 x+\frac{1}{2}\sin 2x=2$;

3) $\sin^2 x+14\sin x\cos x=15\cos^2 x$; 4) $\cos^2 x-12\cos x\sin x=13\sin^2 x$.

13. 1) $\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x-\sin 3x}{1-\cos x}=0$;

3) $\frac{2\sin^2 x+3\sin x}{1-\cos x}=0$; 4) $\frac{3\cos^2 x-4\cos x}{1+\sin x}=0$.

14. 1) $\frac{\cos x+\cos 3x}{1+\sin x}=0$; 2) $\frac{\sin x-\sin 3x}{1+\cos x}=0$; 3) $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}=0$; 4) $\frac{\sin 2x}{1-\sin 2x}=0$.

15. 1) $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$; 2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$;

3) $\sin^2 x=\sin^2 3x$; 4) $\cos^2 x=\cos^2 3x$.

16. 1) $\frac{\sin 4x+\sin 2x}{\cos 2x}=\operatorname{tg} 2x$; 2) $\frac{\cos 2x-\sin 4x}{\sin 2x}=\operatorname{ctg} 2x$;

3) $\sqrt{1+\cos x}=\sin x$; 4) $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$.

17. 1) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$; 2) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+5x\right)+\sin x=2\cos 3x$; 4) $\cos 5x+\sin\left(\frac{3}{2}\pi-9x\right)-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

18. 1) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$;

2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$;

3) $5\sin 2x-11(\sin x+\cos x)+7=0$;

4) $\sin 2z+5(\sin z+\cos z)+1=0$.

19. 1) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x+0{,}375=0$;

2) $\cos^3 z\cos 3z+\sin^3 z\sin 3z=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{8}$; 4) $8\cos x\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+1=0$.

20. 1) $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x$; 2) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$;

3) $\cos 3x=1-\sqrt{3}\sin 3x$; 4) $3\sin x+5\cos x=4$.

21. 1) $\sqrt{1+4\sin x\cos x}=\cos x-\sin x$; 2) $\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x$;

3) $\frac{\operatorname{tg} 4x}{\operatorname{tg} 2x}+\frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 4x}+\frac{5}{2}=0$; 4) $\frac{\operatorname{ctg} 2x}{\operatorname{ctg} x}+\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} 2x}+2=0$.

22. 1) $\arcsin(x+2{,}5)=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin\left(\frac{x}{2}-3\right)=\frac{\pi}{6}$;

3) $(x^2-4)\arcsin x=0$; 4) $\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\arccos x=0$.

23. 1) $\arccos(\sin x)=\frac{x}{4}+\frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)-\frac{x}{4}=\frac{\pi}{2}$;

3) $\arcsin(3-2x)=-\frac{\pi}{4}$; 4) $\arccos(2x-3)=\frac{\pi}{3}$.

24. 1) $\arcsin x\cdot\arccos x=\frac{\pi^2}{18}$; 2) $\operatorname{arctg} x\cdot\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi^2}{16}$;

3) $3\arcsin x-\pi=0$; 4) $4\operatorname{arctg} x-6\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x\right)=\pi$.

25. 1) $(\arcsin x)^2-4\arcsin x=0$; 2) $(\arccos x)^2-5\arccos x=0$;

3) $\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{4}$; 4) $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=\frac{\pi}{2}$.

26. 1) $\sqrt{\operatorname{tg} x}=-2\sin x$; 2) $\sqrt{-\operatorname{tg} x}=\sqrt{2}\cos x$;

3) $\sqrt{\cos x}=-\sin x$; 4) $\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x$.

27. Знайдіть всі значення x та y, що задовольняють рівнянню:

1) $12\sin x+5\cos x=2y^2-8y+21$; 2) $3\cos x-4\sin x=2y^2-4y+7$;

3) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=y^2-4y+5$; 4) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=2y^2-4y+3$.

Розв'яжіть нерівність **(28–36)**.

28. 1) $\cos^2 x>\frac{1}{4}$; 2) $\sin^2 x<\frac{1}{4}$;

3) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3>0$; 4) $2\sin^2 x-3\sin x+1\geqslant 0$.

29. 1) $\frac{2\cos^2 x+\cos x-1}{\cos x-1}>0$; 2) $\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{\sin x-1}>0$;

3) $\cos^3 x\cos 3x-\sin^3 x\sin 3x>\frac{5}{8}$; 4) $\cos^3 x\sin 3x+\cos 3x\sin^3 x<\frac{3}{8}$.

30. 1) $\sin^4\frac{x}{3}+\cos^4\frac{x}{3}>\frac{1}{2}$; 2) $\sin^6 x+\cos^6 x>\frac{5}{8}$;

3) $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1$; 4) $\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x>1$.

31. 1) $\mathrm{tg}^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\mathrm{tg}\, x-2\sqrt{3}<0;$ 2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\, x+\sqrt{3}>0;$

3) $\mathrm{ctg}^2\, x+\mathrm{ctg}\, x \geqslant 0;$ 4) $\mathrm{tg}^2\, x-\mathrm{tg}\, x \leqslant 0.$

32. 1) $\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, 3x<-1;$ 2) $\mathrm{ctg}\, x\, \mathrm{ctg}\, 3x>-1;$

3) $3\sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x \leqslant 0;$

4) $2\cos^2 x+\left(2\sqrt{3}-1\right)\cos x\sin x-\sqrt{3}\sin^2 x \geqslant 0.$

33. 1) $\dfrac{\sin 3x\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2x}\leqslant 0;$ 2) $\cos x\cos 2x\cos 3x \leqslant 0;$

3) $\left(3\sqrt{2}\cos x-\sqrt{2}\sin x-2-\sqrt{3}\right)(2\sin 2x-1)\geqslant 0;$

4) $\cos 2x+2\sin 2x \geqslant 2\sqrt{2}\cos x;$

34. 1) $3\sin 2x-1>\sin x+\cos x;$ 2) $\cos 2x \leqslant \sqrt{2}(\cos x-\sin x);$

3) $\dfrac{1}{\sin 2x}+\dfrac{1}{\sin 4x}+\dfrac{1}{\sin 8x}<0;$ 4) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\sin 2x}\geqslant\dfrac{1}{\sin 3x}.$

35. 1) $2\arccos x>\arcsin x;$ 2) $2\arcsin x>\arccos x;$

3) $2(\arcsin x)^2-3\arcsin x+1>0;$ 4) $(\arccos x)^2-6\arccos x+8<0.$

36. 1) $\sin(2x+10^\circ)+\sin(x+10^\circ)-\sin x<0;$

2) $\mathrm{ctg}\, x+\mathrm{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\,\mathrm{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)>0;$ 3) $(\mathrm{arctg}\, x)^3+(\mathrm{arcctg}\, x)^3>\dfrac{\pi^3}{32};$

4) $\mathrm{arctg}\,(3x^2-3x+1)<\mathrm{arcctg}\,(3x^2-3x+1).$

37. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=\dfrac{3}{\pi}\arccos\left(\sqrt{0{,}125}(\cos x-\sin x)\right);$ 2) $y=\dfrac{9}{\pi}\arcsin\left(\dfrac{3\sqrt{2}+\sin x-\cos x}{4\sqrt{2}}\right).$

38. Знайдіть множину значень функції $y=\sin 2x$, якщо:

1) $x\in[\mathrm{arctg}\, 0{,}5;\ \mathrm{arctg}\, 3];$ 2) $x\in\left[\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{3};\ \mathrm{arctg}\, 2\right];$

3) $x\in\left[\arccos 0{,}8;\ \dfrac{5\pi}{12}\right];$ 4) $x\in\left[\arccos\dfrac{5}{13};\ \dfrac{5\pi}{12}\right].$

39. Розв'яжіть рівняння:

1) $7\,\mathrm{tg}\, x+\cos^2 x+3\sin 2x=1;$ 2) $\sin 2x+1=\sin^2 x+6\,\mathrm{ctg}\, x.$

40. При яких значеннях a вираз $2+\cos x\,(5\cos x+a\sin x)$ дорівнюватиме одиниці хоча б при одному значенні x?

41. При яких значеннях a вираз $3+\sin x\,(2\sin x+a\cos x)$ дорівнюватиме (-1) хоча б при одному значенні x?

Розділ 3
Степенева функція

§23 КОРІНЬ *n*–го СТЕПЕНЯ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 42

<table>
<tr><td colspan="2">1. Означення</td></tr>
<tr><td>Квадратний корінь</td><td>Корінь n-го степеня</td></tr>
<tr><td>Квадратним коренем із числа a називається таке число b, квадрат якого дорівнює a.
Якщо $a = b^2$, то b — квадратний корінь із числа a.</td><td>Коренем n-го степеня з числа a називається таке число b, n-й степінь якого дорівнює a.
Якщо $a = b^n$ $(n \in N,\ n \neq 1)$, то b — корінь n-го степеня з числа a.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Арифметичний корінь — невід’ємне значення кореня.
При $a \geqslant 0$: $\sqrt{a}$, $\sqrt[n]{a}$ — позначення арифметичного значення кореня.</td></tr>
<tr><td>$\boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}$</td><td>$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Область допустимих значень (ОДЗ)</td></tr>
<tr><td>Квадратний корінь</td><td>Корінь n-го степеня</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{a}$ існує тільки при $a \geqslant 0$.</td><td>$\sqrt[2k]{a}$ існує тільки при $a \geqslant 0$ $(k \in N)$;
$\sqrt[2k+1]{a}$ існує при будь-яких значеннях a.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Властивості кореня n-го степеня</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$ — непарне число</td><td>$n = 2k$ — парне число</td></tr>
<tr><td>1) $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$
2) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$</td><td>$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert}$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 42

Для довільних значень n ($n \in N$, $n \neq 1$)

3) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$

4) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$

5) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

Наслідки

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}}$ — *винесення множника з-під знака кореня.*

При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$ — *внесення множника під знак кореня.*

6) При $a \geqslant 0$, $b > 0$ $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$

7) При $a \geqslant 0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}}$ — *основна властивість кореня*

Значення кореня із степеня невід'ємного числа не зміниться, якщо показник кореня і показник степеня підкореневого виразу помножити (або поділити) на одне й те саме натуральне число.

8) При $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $\boxed{\textbf{якщо } a > b\textbf{, то } \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}}$.

<table>
<tr><td colspan="3">4. Запис розв'язків рівняння $x^n = a$ $(n \in N)$</td></tr>
<tr><td>$n = 2k + 1$ — непарне ($k \in N$)</td><td colspan="2">$n = 2k$ — парне ($k \in N$)</td></tr>
<tr><td>При будь-яких значеннях a рівняння $x^{2k+1} = a$ має єдиний корінь $x = \sqrt[2k+1]{a}$.</td><td>При $a < 0$ рівняння $x^{2k} = a$ не має коренів.</td><td>При $a \geqslant 0$ всі корені рівняння $x^{2k} = a$ можна записати так: $x = \pm\sqrt[2k]{a}$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Приклади</td></tr>
<tr><td>Рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$.</td><td>Рівняння $x^8 = -7$ не має коренів.</td><td>Рівняння $x^8 = 7$ має корені $x = \pm\sqrt[8]{7}$.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Означення кореня n-го степеня. Поняття кореня квадратного з числа a вам відомо: це таке число, квадрат якого дорівнює a. Аналогічно означається і корінь n-го степеня з числа a, де n — довільне натуральне число, більше 1.

***Коренем n-го степеня з числа a* називається таке число, n-й степінь якого дорівнює a.**

Наприклад, корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, оскільки $3^3 = 27$; корінь третього степеня з числа (-27) дорівнює (-3), оскільки $(-3)^3 = -27$. Числа 2 і (-2) є коренями четвертого степеня з 16, оскільки $2^4 = 16$ і $(-2)^4 = 16$.

При $n = 2$ та при $n = 3$ корені n-го степеня називають також відповідно квадратним та кубічним коренями.

Як і для квадратного кореня, для кореня n-го степеня вводиться поняття арифметичного кореня.

***Арифметичним коренем n-го степеня з числа a* називається невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.**

При $a \geqslant 0$ для арифметичного значення кореня n-го степеня з числа a існує спеціальне позначення: $\sqrt[n]{a}$; *число n називають показником кореня, а саме число a — підкореневим виразом. Знак $\sqrt[n]{\ }$ і вираз $\sqrt[n]{a}$ називають також радикалом.*

Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа 27 дорівнює 3, записується так: $\sqrt[3]{27} = 3$; те, що корінь четвертого степеня з 16 дорівнює 2, записується так: $\sqrt[4]{16} = 2$. Але для запису того, що корінь четвертого степеня з 16 дорівнює (-2), позначення немає.

При $a < 0$ значення кореня n-го степеня з числа a існує тільки при непарних значеннях n (оскільки не існує такого дійсного числа, парний степінь якого буде від'ємним числом). У цьому випадку корінь непарного степеня n з числа a теж позначається $\sqrt[n]{a}$. Наприклад, те, що корінь третього степеня з числа (-27) дорівнює (-3), записується так: $\sqrt[3]{-27} = -3$. Оскільки (-3) — від'ємне число, то $\sqrt[3]{-27}$ не є арифметичним значенням кореня. Але корінь непарного степеня з від'ємного числа можна виразити через арифметичне значення кореня за допомогою формули $\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$.

Щоб довести наведену формулу, зауважимо, що за означенням кореня n-го степеня ця рівність буде правильною, якщо $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$. Дійсно, $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = (-1)^{2k+1} \cdot \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$, а це і означає, що $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

Зазначимо також, що ***значення*** $\sqrt[2k+1]{a}$ ***має той самий знак, що і число a,*** оскільки при піднесенні до непарного степеня знак числа не змінюється.

Також за означенням кореня n-го степеня можна записати, що в тому випадку, коли існує значення $\sqrt[n]{a}$, виконується рівність

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a} \quad \text{і, зокрема, при } a \geqslant 0 \quad \boxed{\left(\sqrt{a}\right)^2 = a}.$$

2. Область допустимих значень виразів з коренями *n*-го степеня. Розв'язки рівняння $x^n = a$ $(n \in N)$. Зазначимо, що

значення $\sqrt[2k+1]{a}$ ***— кореня непарного степеня з числа a — існує при будь-яких значеннях a.***

Обґрунтуємо це, наприклад, для кореня третього степеня. Позначимо $\sqrt[3]{a} = x$. Тоді за означенням кореня n-го степеня $x^3 = a$ і значення $\sqrt[3]{a}$ буде існувати, якщо рівняння $x^3 = a$ буде мати розв'язок.

Зобразивши графіки функцій $y = x^3$ і $y = a$ (рис. 106), бачимо, що при будь-яких значеннях a пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = x^3$ в одній точці. Отже, при будь-якому значенні a існує єдине значення $\sqrt[3]{a}$ (оскільки функція $y = x^3$ зростає і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$).

Аналогічне обґрунтування можна навести і для інших коренів непарного степеня (див. графіки і властивості функцій виду $y = x^{2k+1}$ у § 25).

Наведені міркування дозволяють записати розв'язки рівняння $x^n = a$ для непарних значень $n = 2k + 1$: **при будь-яких значеннях *a* рівняння $x^{2k+1} = a$ $(k \in N)$ має єдиний корінь $x = \sqrt[2k+1]{a}$.**

Наприклад, рівняння $x^5 = 3$ має єдиний корінь $x = \sqrt[5]{3}$, а рівняння $x^7 = -11$ має єдиний корінь $x = \sqrt[7]{-11}$ (враховуючи, що $\sqrt[7]{-11} = -\sqrt[7]{11}$, корінь для рівняння $x^7 = -11$ можна записати так: $x = -\sqrt[7]{11}$).

Значення $\sqrt[2k]{a}$ ***— кореня парного степеня з числа a — існує тільки при*** $a \geqslant 0$.

Дійсно, у тому випадку, коли $\sqrt[2k]{a} = x$, за означенням кореня n-го степеня: $a = x^{2k}$. Отже, $a \geqslant 0$.

Для квадратного кореня це можна також обґрунтувати, використовуючи відомий графік функції $y = x^2$.

Нехай $\sqrt{a} = x$, тоді за означенням кореня n-го степеня $x^2 = a$ і значення $\sqrt{a}$ буде існувати, якщо рівняння $x^2 = a$ матиме розв'язок.

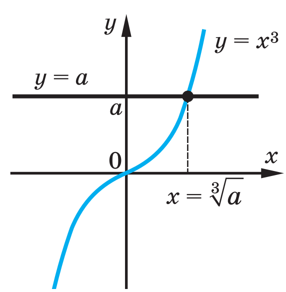


Рис. 106

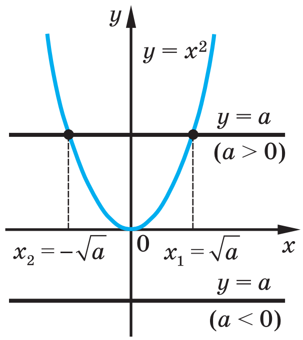


Рис. 107

Зобразивши графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ (рис. 107), бачимо, що пряма $y = a$ перетинає графік функції $y = x^2$ тільки при $a \geqslant 0$ (причому, при $a > 0$ — у двох точках: $x_1 = \sqrt{a}$ і $x_2 = -\sqrt{a}$, а при $a = 0$ — тільки в одній точці $x = 0$). Отже, при будь-яких значеннях $a \geqslant 0$ існує значення $\sqrt{a}$, оскільки функція $y = x^2$ набуває всіх значень із проміжку $[0; +\infty)$. ○

Розглянемо розв'язки рівняння $x^n = a$ для парних значень $n = 2k$ ($k \in N$).

Рівняння $x^2 = a$ при $a < 0$ не має коренів, оскільки квадрат будь-якого числа не може бути від'ємним (на рисунку 107 пряма $y = a$ при $a < 0$ не перетинає графік функції $y = x^2$). Так само: **рівняння $x^{2k} = a$ ($k \in N$) при $a < 0$ не має коренів** (оскільки парний степінь будь-якого числа не може бути від'ємним).

При $a = 0$ **рівняння $x^{2k} = 0$ ($k \in N$) має єдиний корінь $x = 0$** (оскільки парний степінь будь-якого відмінного від нуля числа — число додатне, тобто не рівне нулю, а $0^{2k} = 0$).

При $a > 0$ за означенням кореня $2k$-го степеня $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$. Отже, $x = \sqrt[2k]{a}$ — корінь рівняння $x^{2k} = a$. Але $\left(-\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = \left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$, тому $x = -\sqrt[2k]{a}$ — теж корінь рівняння $x^{2k} = a$. Інших коренів це рівняння не має, оскільки властивості функції $y = x^{2k}$ аналогічні властивостям функції $y = x^2$: при $x \geqslant 0$ функція зростає, отже, значення a вона може набувати тільки при одному значенні аргументу $\left(x = \sqrt[2k]{a}\right)$. Аналогічно при $x \leqslant 0$ функція $y = x^{2k}$ спадає, тому значення a вона може набувати тільки при одному значенні аргументу $\left(x = -\sqrt[2k]{a}\right)$. Таким чином, **рівняння $x^{2k} = a$ при $a > 0$ має тільки два корені $x = \pm\sqrt[2k]{a}$.**

Наприклад, рівняння $x^{10} = -1$ не має коренів, а рівняння $x^6 = 5$ має корені $x = \pm\sqrt[6]{5}$.

3. Властивості кореня n-го степеня можна обґрунтувати, спираючись на означення кореня n-го степеня.

1) Формула $\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$ була обґрунтована на с. 264.

Обґрунтуємо інші формули, наведені в таблиці 42.

● Нагадаємо, що за означенням кореня n-го степеня для доведення рівності $\sqrt[n]{A} = B$ (при $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$) досить перевірити рівність $B^n = A$.

2) Вираз $\sqrt[n]{a^n}$ розглянемо окремо при $n = 2k + 1$ (непарне) і при $n = 2k$ (парне).

Якщо n — *непарне*, то враховуємо, що вираз $\sqrt[n]{a^n}$ існує при будь-яких значеннях a, і те, що знак $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}$ збігається із знаком a. Тоді за означенням кореня n-го степеня одержуємо

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}\,.$$

Якщо n — *парне*, то враховуємо, що вираз $\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}}$ позначає арифметичне значення кореня n-го степеня (отже, $\sqrt[2k]{a^{2k}} \geqslant 0$), і те, що $|a|^{2k} = a^{2k}$. Тоді

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}\,.$$

3) Формулу

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \text{ при } a \geqslant 0}$$

обґрунтуємо, розглядаючи її справа наліво. Оскільки

$\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$, то за означенням $\sqrt[nk]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}$.

4) Справедливість формули

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \text{ при } a \geqslant 0}$$

випливає з рівності $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^k\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{kn} = \left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^n\right)^k = a^k$.

5) Для обґрунтування формули

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \text{ при } a \geqslant 0,\, b \geqslant 0}$$

використовуємо рівність $\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = ab$.

6) Для обґрунтування формули

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ при } a \geqslant 0,\, b > 0}$$

використовуємо рівність $\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \dfrac{a}{b}$.

7) Властивість кореня

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a \geqslant 0}$$

випливає з рівності $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right)^k = \left(a^m\right)^k = a^{mk}$. ○

Наприклад, $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 3).

За допомогою формули $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ $(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$ можна одержати важливі наслідки: формули винесення множника з-під знака кореня або внесення множника під знак кореня.

Дійсно, при $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^n b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}=a\sqrt[n]{b}$. Розглядаючи одержану формулу зліва направо, маємо *формулу винесення невід'ємного множника з-під знака кореня*

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}}\ ,$$

а справа наліво — *формулу внесення невід'ємного множника під знак кореня*

$$\boxed{a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}}\ .$$

Наприклад, $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot 3}=\sqrt[5]{2^5\cdot 3}=2\sqrt[5]{3}.$

8) Зазначимо ще одну властивість коренів n-го степеня:
для будь-яких невід'ємних чисел a і b

$$\boxed{\textit{якщо } a>b,\ \text{то } \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}}\ .$$

Доведемо це методом від супротивного. Припустимо, що $\sqrt[n]{a}\leqslant\sqrt[n]{b}$. Тоді при піднесенні обох частин останньої нерівності з невід'ємними членами до n-го степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо правильну нерівність $a\leqslant b$. Це суперечить умові $a>b$. Отже, наше припущення неправильне і $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

Наприклад, враховуючи, що $21>16$, одержуємо $\sqrt[4]{21}>\sqrt[4]{16}$. Оскільки $\sqrt[4]{16}=2$, маємо, що $\sqrt[4]{21}>2$.

Узагальнення властивостей кореня n-го степеня *

Основна частина формул, які виражають властивості коренів n-го степеня, обґрунтована для невід'ємних значень підкореневих виразів. Але інколи доводиться виконувати перетворення виразів з коренями n-го степеня і в тому випадку, коли таких обмежень немає. Наприклад, добувати корінь квадратний (або в загальному випадку корінь парного степеня) з добутку ab від'ємних чисел $(a<0,\ b<0)$. Тоді $ab>0$ і $\sqrt[2k]{ab}$ існує, проте формулою

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \qquad (1)$$

скористатися не можна: вона обґрунтована тільки для невід'ємних значень a і b. Але у випадку $ab>0$ маємо: $ab=|ab|=|a|\cdot|b|$ і тепер $|a|>0$ та $|b|>0$. Отже, для добування кореня з добутку $|a|\cdot|b|$ можна використати формулу (1).

Тоді при $a<0,\ b<0$ можемо записати: $\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{|a|\cdot|b|}=\sqrt[2k]{|a|}\cdot\sqrt[2k]{|b|}$.

---

* Цей матеріал є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, оскільки в цьому випадку $|a| = a$ і $|b| = b$. Отже,

$$\boxed{\text{при } ab \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}}\,.$$

Аналогічно можна узагальнити властивість 6.

$$\boxed{\text{При } \frac{a}{b} \geqslant 0 \quad \sqrt[2k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k]{|a|}}{\sqrt[2k]{|b|}}}\,.$$

Слід зазначити, що в тих випадках, коли обґрунтування основних формул можна повторити і для від'ємних значень a і b, такими формулами можна користуватися для будь-яких a і b (з ОДЗ лівої частини формули).

Наприклад, для коренів непарного степеня *для будь-яких значень a і b*

$$\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}\,. \tag{2}$$

Дійсно, ліва і права частини цієї формули існують при будь-яких значеннях a та b і виконується рівність $\left(\sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = \left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} \left(\sqrt[2k+1]{b}\right)^{2k+1} = ab$. Тоді за означенням кореня $(2k+1)$-го степеня виконується і рівність (2).

Наприклад, $\sqrt[3]{a^{15}b} = \sqrt[3]{a^{15}} \cdot \sqrt[3]{b} = a^5 \sqrt[3]{b}$ при будь-яких значеннях a і b.

Але деякими формулами не вдається користуватися для довільних значень a і b. Наприклад, якщо ми за основною властивістю кореня запишемо, що $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a}$ (показник кореня і показник степеня підкореневого виразу поділили на натуральне число 2), то одержана рівність не є тотожністю, оскільки при $a = -1$ (ліва і права частина цієї рівності означені при всіх значеннях a) маємо $\sqrt[6]{(-1)^2} = \sqrt[3]{-1}$, тобто $1 = -1$ — неправильну рівність.

Отже, при діленні показника кореня і показника степеня підкореневого виразу на парне натуральне число потрібно узагальнити основну властивість кореня. Для цього досить помітити, що $a^2 = |a|^2$, і тепер основа степеня підкореневого виразу $|a| \geqslant 0$, а значить, можна використати основну формулу (властивість 7): $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[6]{|a|^2} = \sqrt[3]{|a|}$.

У загальному випадку, *якщо при використанні основної властивості кореня доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число, то в результаті основу степеня підкореневого виразу доводиться брати за модулем, тобто*

$$\boxed{\sqrt[2kn]{a^{2km}} = \sqrt[n]{|a|^m}}\,.$$

Аналогічно можна обґрунтувати й інші приклади використання основних властивостей коренів при довільних значеннях a і b (з ОДЗ лівої частини формули), які наведено в таблиці 43.

Таблиця 43

Основні формули для кореня n-го степеня (тільки для невід'ємних значень a і b, тобто $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дається узагальнена формула)	
	корінь непарного степеня	корінь парного степеня
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	*можна*	*тільки для невід'ємних a*
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	*можна*	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$
3. Корінь з кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	*можна*	*можна*
4. Корінь з добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*можна*	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a \rvert}\,\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}$
і добуток коренів $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$		*можна*
5. Корінь з частки $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$	*можна*	$\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}}$
і частка коренів $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$		*можна*
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ і навпаки	можна, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід *непарний* → *непарний*)	Перехід *парний* → *парний* *можна* Перехід *непарний* → *парний* $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m \geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} \text{ при } a^m < 0 \end{cases}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\lvert a^m \rvert}$
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*можна*	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*можна*	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, \text{ при } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, \text{ при } a < 0, \end{cases}$ де $b \geqslant 0$

З а у в а ж е н н я. Під терміном «перехід», який використано в таблиці 43, слід розуміти перехід у відповідній формулі від кореня n-го степеня до кореня m-го степеня.

Якщо n і m обидва парні, то такий перехід коротко охарактеризовано як «перехід парний $\to$ парний» (типу $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt[8]{a^4}$).

Якщо n і m обидва непарні, то в таблиці записано, що виконано «перехід непарний $\to$ непарний» (типу $\sqrt[15]{a^9}=\sqrt[5]{a^3}$).

Якщо n — непарне число, а m — парне число, то в таблиці говориться, що виконано «перехід непарний $\to$ парний» (типу $\sqrt[5]{(-2)^3}=-\sqrt[10]{(-2)^6}$).

Таким чином, якщо за умовою завдання на перетворення виразів з коренями n-го степеня (ірраціональних виразів) відомо, що всі букви (які входять до запису заданого виразу) невід'ємні, то для перетворення цього виразу можна користуватися основними формулами, а якщо такої умови немає, то доводиться аналізувати ОДЗ заданого виразу і тільки після цього вирішувати, якими формулами користуватися — основними чи узагальненими.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{625}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$; 3) $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}$.

Р о з в ' я з а н н я

1) ▶ $\sqrt[4]{625}=5$, оскільки $5^4=625$; ◁

2) ▶ $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}=-\frac{1}{3}$, оскільки $\left(-\frac{1}{3}\right)^3=-\frac{1}{27}$; ◁

3) ▶ $\sqrt[5]{\frac{32}{243}}=\frac{2}{3}$, оскільки $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$. ◁

К о м е н т а р

Використаємо означення кореня n-го степеня. Запис $\sqrt[n]{a}=b$ означає, що $b^n=a$.

Приклад 2 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{27\cdot 125}$; 2) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$.

К о м е н т а р

Використаємо властивості кореня n-го степеня і врахуємо, що кожну формулу, яка виражає ці властивості, можна використати як зліва направо, так і справа наліво. Наприклад, для розв'язування завдання 1 скористаємося формулою $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$, а для розв'язування завдання 2 використаємо цю саму формулу справа наліво, тобто: $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ (при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$).

Р о з в ' я з а н н я

1) ▶ $\sqrt[3]{27\cdot 125}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{125}=3\cdot 5=15$; ◁ 2) ▶ $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2\cdot 8}=\sqrt[4]{16}=2$. ◁

Приклад 3 Порівняйте числа:

1) $\sqrt[4]{50}$ і $\sqrt{7}$; 2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[3]{3}$.

Р о з в ' я з а н н я

1) ▶ $\sqrt{7}=\sqrt[4]{7^2}=\sqrt[4]{49}$. Оскільки $50>49$, то $\sqrt[4]{50}>\sqrt[4]{49}$, тобто $\sqrt[4]{50}>\sqrt{7}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$,

$\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$.

Оскільки $27<81$, то $\sqrt[12]{27}<\sqrt[12]{81}$, тобто $\sqrt[4]{3}<\sqrt[3]{3}$. ◁

К о м е н т а р

Для порівняння заданих чисел в кожному завданні досить привести всі корені до одного показника кореня і врахувати, що *для будь-яких невід'ємних чисел a і b, якщо $a>b$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.*

Приклад 4 Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$.

К о м е н т а р

У завданні 1 врахуємо, що $\sqrt[5]{3^5}=3$, отже, після множення чисельника і знаменника заданого дробу на $\sqrt[5]{3^4}$ знаменник можна буде записати без знаку радикала. У завданні 2 досить чисельник і знаменник заданого дробу домножити на різницю $\sqrt{5}-1\neq 0$ (щоб одержати в знаменнику формулу різниці квадратів).

Але виконання аналогічного перетворення в завданні 3 пов'язане з певними проблемами. ОДЗ виразу $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}$ є: $a\geqslant 0$ (і всі тотожні перетворення потрібно виконувати для всіх значень $a\geqslant 0$). Ми хочемо домножити чисельник і знаменник заданого дробу на вираз $\sqrt{a}-1$. За основною властивістю дробу це можна зробити тільки для випадку, коли $\sqrt{a}-1\neq 0$, тобто тільки при $a\neq 1$. Але $a=1$ входить до ОДЗ початкового виразу, і тому вибраний нами спосіб розв'язування приведе до звуження ОДЗ початкового виразу. Дійсно, якщо записати, що $\dfrac{1}{\sqrt{a}+1}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\dfrac{\sqrt{a}-1}{a-1}$, то ця рівність не є тотожністю, оскільки не виконується для $a=1$ з ОДЗ початкового виразу. У цьому випадку, щоб не припуститися помилок, можна користуватися таким о р і є н т и р о м: *якщо для тотожних перетворень* (чи для розв'язування рівнянь та нерівностей) *доводиться використовувати перетворення (чи формули), які приводять до звуження ОДЗ початкового виразу, то значення, на які звужується ОДЗ заданого виразу, слід розглянути окремо.*

Розв'язання

1) ▶ $\frac{1}{\sqrt[5]{3}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[5]{3^4}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{\sqrt[5]{3^4}}{3}$. ◁

2) ▶ $\frac{4}{\sqrt{5}+1}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2-1^2}=\frac{4(\sqrt{5}-1)}{4}=\sqrt{5}-1$. ◁

3) ▶ Позначимо $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$. Тоді при $a=1$ одержуємо $A=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$.

При $a\neq 1$ ($a\geqslant 0$) маємо $A=\frac{1}{\sqrt{a}+1}=\frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$.

Відповідь: при $a=1$ $A=\frac{1}{2}$, при $a\neq 1$ ($a\geqslant 0$) $A=\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$

(тобто відповідь не може бути записана однозначно). ◁

Приклад 5 Спростіть вираз:

1) $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$; 2) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$ при $a>0$ і $b>0$; 3*) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

Розв'язання

1) I спосіб

▶ $\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{(\sqrt[6]{a})^2-(\sqrt[6]{b})^2}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=$

$=\frac{(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁

II спосіб

▶ Позначимо $\sqrt[6]{a}=x$, $\sqrt[6]{b}=y$, де $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Тоді $\sqrt[3]{a}=(\sqrt[6]{a})^2=x^2$ і $\sqrt[3]{b}=(\sqrt[6]{b})^2=y^2$. Отже,

$\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\frac{x^2-y^2}{x-y}=\frac{(x-y)(x+y)}{x-y}=$

$=x+y=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$. ◁

2) ▶ $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{(\sqrt{a})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{(\sqrt{b})^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$

$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$. ◁

Коментар

У завданні 1 ОДЗ заданого виразу: $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\neq 0$. Для невід'ємних значень a і b ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів (як зліва направо, так і справа наліво).

При $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ можна записати: $\sqrt[3]{a}=(\sqrt[6]{a})^2$ і $\sqrt[3]{b}=(\sqrt[6]{b})^2$. Тоді чисельник заданого дробу можна розкласти як різницю квадратів.

Для того щоб виділити в чисельнику різницю квадратів, можна також виконати заміну $\sqrt[6]{a}=x$; $\sqrt[6]{b}=y$.

У завданні 2 за даної умови $a>0$ і $b>0$, тому ми маємо право скористатися всіма основними формулами перетворення коренів. Тоді

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $a=(\sqrt{a})^2$, $b=(\sqrt{b})^2$.

3) ▶ Позначимо $A=\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$.

При $\begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0 \end{cases}$ $\left(\text{і } b+\sqrt{ab}\neq 0\right)$ маємо:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2+\sqrt{a}\sqrt{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{b}\left(\sqrt{b}+\sqrt{a}\right)}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

При $\begin{cases} a\leqslant 0, \\ b\leqslant 0 \end{cases}$ $\left(\text{і } b+\sqrt{ab}\neq 0\right)$ маємо:

$$A=\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}=\frac{-(-a)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}{-(-b)+\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}}=$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{-a}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{-\left(\sqrt{-b}\right)^2+\sqrt{-a}\sqrt{-b}}=\frac{\sqrt{-a}\left(-\sqrt{-a}+\sqrt{-b}\right)}{-\sqrt{-b}\left(\sqrt{-b}-\sqrt{-a}\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}=-\sqrt{\frac{-a}{-b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Відповідь:

1) при $a\geqslant 0$ і $b>0$ $A=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

2) при $a\leqslant 0$ і $b<0$ (з ОДЗ) $A=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. ◁

У завданні 3 ОДЗ заданого виразу: $ab\geqslant 0,\ b+\sqrt{ab}\neq 0$. Але $ab\geqslant 0$ при $\begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} a\leqslant 0, \\ b\leqslant 0. \end{cases}$ При $\begin{cases} a\geqslant 0, \\ b\geqslant 0 \end{cases}$ ми маємо право користуватися всіма основними формулами перетворення коренів (як у завданні 2), а при $\begin{cases} a\leqslant 0, \\ b\leqslant 0 \end{cases}$ доведеться використати узагальнену формулу: $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$ і врахувати, що при $a\leqslant 0$ одержуємо $(-a)\geqslant 0$. Тоді можна записати: $a=-(-a)=-\left(\sqrt{-a}\right)^2$. Аналогічно при $b\leqslant 0$ можна записати $b=-(-b)=-\left(\sqrt{-b}\right)^2$. Також слід врахувати, що при $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$ маємо: $|a|=-a$ і $|b|=-b$.

Записуючи відповідь, доцільно врахувати, що $b=0$ не входить до ОДЗ заданого виразу.

Приклад 6* Спростіть вираз $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}}$.

К о м е н т а р

В умові не сказано про те, що значення a невід'ємні, тому доведеться спочатку визначити ОДЗ заданого виразу.

Вираз $\sqrt[3]{a^2}$ існує при будь-яких значеннях a і є невід'ємним. Вираз a^4 також існує і невід'ємний при будь-яких значеннях a. Отже, при будь-яких значеннях a під знаком квадратного кореня буде знаходитися невід'ємний вираз $a^4\sqrt[3]{a^2}$. Тобто заданий вираз існує при будь-яких значеннях a (ОДЗ: $a\in \boldsymbol{R}$), і його перетворення потрібно виконати на всій ОДЗ.

Можливими є декілька шляхів перетворення заданого виразу, наприклад: 1) спочатку розглянути корінь квадратний із добутку, а потім скористатися формулою кореня з кореня і основною властивістю кореня; 2) внести вираз a^4 під знак кубічного кореня, а потім теж використати формулу кореня з кореня і основну властивість кореня. На кожному з цих шляхів враховуємо, що при будь-яких значеннях a значення $a^2 \geqslant 0$ і $a^4 \geqslant 0$ (отже, для цих виразів можна користуватися основними формулами), а при використанні основної властивості кореня доводиться ділити показник кореня і показник степеня підкореневого виразу на парне натуральне число 2, тому в результаті основу степеня підкореневого виразу доводиться брати за модулем (оскільки $a \in \boldsymbol{R}$).

Р о з в ' я з а н н я

I спосіб

$$\sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a^4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = a^2 \sqrt[6]{a^2} = a^2 \sqrt[6]{|a|^2} = a^2 \sqrt[3]{|a|}.$$

II спосіб

$$\sqrt{a^4 \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12} \cdot a^2}} = \sqrt[6]{a^{14}} = \sqrt[6]{|a|^{14}} = \sqrt[3]{|a|^7} =$$
$$= \sqrt[3]{|a|^6 \cdot |a|} = \sqrt[3]{|a|^6}\sqrt[3]{|a|} = |a|^2 \sqrt[3]{|a|} = a^2 \sqrt[3]{|a|}.$$

Запитання для контролю

1. Дайте означення кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
2. Дайте означення арифметичного кореня n-го степеня з числа a. Наведіть приклади.
3. При яких значеннях a існують вирази $\sqrt[2k]{a}$ та $\sqrt[2k+1]{a}$ $(k \in \boldsymbol{N})$?
4. Запишіть властивості кореня n-го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
5*. Доведіть властивості кореня n-го степеня для невід'ємних значень підкореневих виразів.
6*. Якими властивостями кореня n-го степеня можна користуватися при довільних значеннях букв (з ОДЗ лівої частини відповідної формули)? Наведіть приклади використання основних формул та їх узагальнень.
7. При яких значеннях a має корені рівняння:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$; 2) $x^{2k} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$.
8. Запишіть усі розв'язки рівняння:
   1) $x^{2k+1} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$; 2) $x^{2k} = a$ $(k \in \boldsymbol{N})$: а) при $a > 0$; б) при $a < 0$; в) при $a = 0$. Наведіть приклади таких рівнянь та розв'яжіть їх.

Вправи

1. Перевірте правильність рівності:

1°) $\sqrt[3]{64} = 4$; 2°) $\sqrt[9]{-1} = -1$; 3) $\sqrt[10]{1024} = 2$; 4°) $\sqrt[25]{0} = 0$; 5°) $\sqrt[5]{-32} = -2$; 6°) $\sqrt[13]{1} = 1$.

2°. Обчисліть:

1) $\sqrt[3]{-8}$; 2) $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$; 3) $\sqrt[13]{-1}$; 4) $\sqrt[5]{32}$; 5) $\sqrt[3]{125}$; 6) $\sqrt[4]{81}$.

Знайдіть значення виразу **(3–7)**.

3. 1°) $\sqrt[3]{8 \cdot 1000}$; 2°) $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$; 3) $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$; 4) $\sqrt[5]{48 \cdot 81}$.

4. 1) $\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[5]{27}$; 2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{500}$; 3) $\sqrt[7]{8}\cdot\sqrt[7]{-16}$; 4) $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{125}$.

5. 1) $\dfrac{\sqrt[3]{-16}}{\sqrt[3]{2}}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt[4]{9}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{-5}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[6]{1024}}{\sqrt[6]{16}}$.

6°. 1) $\sqrt[3]{7^3\cdot 11^3}$; 2) $\sqrt[6]{2^6\cdot 3^6}$; 3) $\sqrt[7]{3^7\cdot 5^7}$; 4) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\cdot 10^5}$.

7°. 1) $\sqrt[5]{2^{10}\cdot 3^{15}}$; 2) $\sqrt[3]{5^6\cdot 2^9}$; 3) $\sqrt[4]{(0{,}1)^4\, 3^8}$; 4) $\sqrt[10]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}\cdot 6^{20}}$.

8. Порівняйте числа:

1°) $\sqrt[9]{0{,}1}$ і 0; 2°) $\sqrt[11]{1{,}3}$ і 1; 3) $\sqrt[4]{23}$ і $\sqrt{5}$; 4) $\sqrt[5]{4}$ і $\sqrt[3]{3}$.

9°. При яких x має зміст вираз:

1) $\sqrt[5]{5x+1}$; 2) $\sqrt[4]{2x-6}$; 3) $\sqrt[6]{x+2}$; 4) $\sqrt[8]{\dfrac{5}{x}}$.

10. Подайте вираз у вигляді дробу, знаменник якого не містить кореня n-го степеня:

1) $\dfrac{3}{\sqrt[7]{2}}$; 2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-1}$; 3*) $\dfrac{1}{\sqrt{a}+3}$; 4*) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$.

11. Винесіть множник за знак кореня ($a>0$, $b>0$):

1) $\sqrt[5]{a^{11}b^7}$; 2) $\sqrt[4]{a^7b^{13}}$; 3) $\sqrt[3]{-27a^5b^{14}}$; 4) $\sqrt[6]{128a^9b^{17}}$.

12*. Винесіть множник за знак кореня:

1) $\sqrt[4]{a^4b^{14}}$; 2) $\sqrt[7]{a^9b^8}$; 3) $\sqrt[6]{64a^{12}b^7}$; 4) $\sqrt[8]{a^{17}b^9}$.

13. Внесіть множник під знак кореня ($a>0$, $b>0$):

1) $a\sqrt[3]{7}$; 2) $-b\sqrt[4]{ab}$; 3) $ab\sqrt[7]{5}$; 4) $ab^2\sqrt[6]{\dfrac{a}{b^{11}}}$.

14*. Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{7}$; 2) $a^3\sqrt[7]{ab}$; 3) $ab\sqrt[6]{\dfrac{2b}{a^5}}$; 4) $-b\sqrt[8]{-3b^3}$.

15. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{a^8}$ при $a<0$; 2) $\sqrt[5]{a^5}$ при $a<0$;

3) $\sqrt[4]{a^4}-\sqrt[3]{a^3}$ при $a>0$; 4) $\sqrt[7]{a^7}+\sqrt[6]{a^6}$ при $a<0$.

16*. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{2ab^3}\cdot\sqrt[4]{16a^3b^5}$; 2) $\sqrt[6]{ab^3c}\cdot\sqrt[6]{a^5b^4c}\cdot\sqrt[6]{b^5c^4}$; 3) $\sqrt[8]{a^6\sqrt[5]{a^4}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{3a\sqrt[5]{2a^2}}}$.

17. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}$; 2) $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}-\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{xy}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$;

3*) $\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-2\sqrt[6]{ab^5}+b}{\sqrt[3]{a^2b}-\sqrt{ab}}$, де $a>0$, $b>0$, $a\neq b$; 4*) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{y}-\sqrt[6]{xy}}$.

18°. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3=7$; 2) $x^6=3$; 3) $x^5=-5$; 4) $x^8=-13$; 5) $x^4=16$; 6) $x^3=-64$.

§24 ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Таблиця 44

<table>
<tr><td colspan="2">Поняття ірраціонального рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння, у яких змінна знаходиться під знаком кореня, називають ірраціональними. Для розв'язування задане ірраціональне рівняння найчастіше зводять до раціонального рівняння за допомогою деяких перетворень.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розв'язування ірраціональних рівнянь</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. За допомогою піднесення обох частин рівняння до одного степеня</td></tr>
<tr><td>При піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).</td><td>При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені, які відсіюються перевіркою.</td></tr>
<tr><td>Приклад 1.
Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-1}=2$.
▶ $\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3=2^3$,
$x-1=8$,
$x=9$.
Відповідь: 9. ◁</td><td>Приклад 2.
Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+3}=x$.
▶ $\left(\sqrt{2x+3}\right)^2=x^2$,
$x^2-2x-3=0$, $x_1=-1$, $x_2=3$.
Перевірка. При $x=-1$ маємо: $\sqrt{1}=-1$ — неправильна рівність, отже, $x=-1$ — сторонній корінь. При $x=3$ маємо: $\sqrt{9}=3$ — правильна рівність, отже, $x=3$ — корінь заданого рівняння.
Відповідь: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. За допомогою заміни змінних</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклад 3.
Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}=2$.
▶ Позначимо $\sqrt[3]{x}=t$. Тоді $\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=t^2$.
Одержуємо рівняння: $t^2+t=2$, $t^2+t-2=0$, $t_1=1$, $t_2=-2$.
Виконуємо обернену заміну: $\sqrt[3]{x}=1$, тоді $x=1$ або $\sqrt[3]{x}=-2$, звідси $x=-8$.
Відповідь: 1; −8. ◁</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Ірраціональними рівняннями називають такі рівняння, у яких змінна знаходиться під знаком кореня. Наприклад, $\sqrt{x-2}=5$, $\sqrt[3]{x}+x=2$ — ірраціональні рівняння.

Найчастіше розв'язування ірраціональних рівнянь ґрунтується на зведенні заданого рівняння за допомогою деяких перетворень до раціонального рівняння. Як правило, це досягається за допомогою піднесення обох частин ірраціонального рівняння до одного і того самого степеня (часто декілька разів).

Слід враховувати, що

> ***при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому (на його ОДЗ).***

Наприклад, рівняння $$\sqrt[3]{x+7}=3 \qquad (1)$$

рівносильне рівнянню $$\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3=3^3, \qquad (2)$$

тобто рівнянню $x+7=27$. Звідси $x=20$.

Для обґрунтування рівносильності рівнянь (1) і (2) досить звернути увагу на те, що рівності $A=B$ і $A^3=B^3$ можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y=t^3$ є зростаючою (на рисунку 108 наведено її графік) і кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу t. Отже, усі корені рівняння (1) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (2), та навпаки, усі корені рівняння (2) будуть коренями рівняння (1). А це й означає, що рівняння (1) і (2) є рівносильними. Аналогічно можна обґрунтувати рівносильність відповідних рівнянь і у випадку піднесення обох частин рівняння до одного і того самого довільного непарного степеня.

Якщо для розв'язування ірраціонального рівняння обидві частини піднести до парного степеня, то одержуємо рівняння-наслідок — коли всі корені першого рівняння будуть коренями другого, але друге рівняння може мати корені, що не задовольняють заданому рівнянню. Такі корені називають сторонніми для заданого рівняння. **Щоб з'ясувати, чи є одержані числа коренями заданого рівняння, виконують перевірку одержаних розв'язків.**

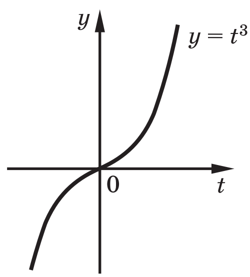


Рис. 108

Наприклад, для розв'язування рівняння $$\sqrt{x}=2-x \qquad (3)$$

піднесемо обидві його частини до квадрата і одержимо рівняння $$\left(\sqrt{x}\right)^2=(2-x)^2. \qquad (4)$$

Враховуючи, що $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, маємо $x = 4 - 4x + x^2$, тобто $x^2 - 5x + 4 = 0$. Звідси $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Виконуємо перевірку. При $x = 1$ рівняння (3) перетворюється на правильну рівність $\sqrt{1} = 2 - 1$, $1 = 1$. Отже, $x = 1$ є коренем рівняння (3).

При $x = 4$ одержуємо неправильну рівність $\sqrt{4} = 2 - 4$; $2 \neq -2$. Отже, $x = 4$ — сторонній корінь рівняння (3). Тобто до відповіді потрібно записати тільки $x = 1$.

З'явлення стороннього кореня пов'язане з тим, що рівність $A^2 = B^2$ можна одержати при піднесенні до квадрата обох частин рівності $A = B$ або рівності $A = -B$. Отже, виконання рівності $A^2 = B^2$ ще не гарантує виконання рівності $A = B$. Тобто корені рівняння (4) не обов'язково є коренями рівняння (3) (але, звичайно, кожен корінь рівняння (3) є коренем рівняння (4), оскільки при виконанні рівності $A = B$ обов'язково виконується і рівність $A^2 = B^2$).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+3} + \sqrt{5x-1} = 4$.

Розв'язання

$\sqrt{5x-1} = 4 - \sqrt{x+3}$,

$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2 = \left(4 - \sqrt{x+3}\right)^2$,

$5x - 1 = 16 - 8\sqrt{x+3} + x + 3$,

$8\sqrt{x+3} = 20 - 4x$; $2\sqrt{x+3} = 5 - x$,

$\left(2\sqrt{x+3}\right)^2 = (5 - x)^2$,

$4(x + 3) = 25 - 10x + x^2$,

$x^2 - 14x + 13 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 13$.

Перевірка. $x = 1$ — корінь $\left(\sqrt{4} + \sqrt{4} = 4,\ 4 = 4\right)$; $x = 13$ — сторонній корінь $\left(\sqrt{16} + \sqrt{64} \neq 4\right)$.

Відповідь: 1.

Коментар

Ізолюємо один корінь і піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — так ми позбудемося одного кореня.

Потім знову ізолюємо корінь і знову піднесемо обидві частини рівняння до квадрата — одержимо квадратне рівняння.

Оскільки при піднесенні до квадрата можемо одержати сторонні корені, то в кінці виконаємо перевірку одержаних розв'язків.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{8}{\sqrt{6-x}} - \sqrt{6-x} = 2$.

Розв'язання

Нехай $\sqrt{6-x} = t$, де $t > 0$.

Одержуємо $\dfrac{8}{t} - t = 2$.

Тоді $t^2 + 2t - 8 = 0$.

Звідси $t_1 = 2$, $t_2 = -4$.

Коментар

Якщо в задане рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді $\left(\sqrt{6-x}\right)$, то зручно цей вираз із змінною позначити однією буквою — новою змінною $\left(\sqrt{6-x} = t\right)$.

$t_1 = 2$ — задовольняє умові $t > 0$;
$t_2 = -4$ — не задовольняє умові $t > 0$.
Обернена заміна дає:

$$\sqrt{6-x} = 2,$$
$$6 - x = 4,$$
$$x = 2.$$

Відповідь: 2. ◁

Якщо зафіксувати обмеження $t > 0$ (арифметичне значення $\sqrt{6-x} \geqslant 0$ і в знаменнику не може стояти 0), то в результаті заміни і зведення одержаного рівняння до квадратного виконуватимуться рівносильні перетворення заданого рівняння.

Можна було не фіксувати обмеження $t > 0$, але тоді в результаті перетворень отримуємо рівняння-наслідки, і одержані розв'язки доведеться перевіряти.

Приклад 3* Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.

Розв'язання

▶ Нехай $\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = u, \\ \sqrt{x+1} = v. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$

Одержуємо систему $\begin{cases} u+v = 3, \\ u^3 - v^2 = -3. \end{cases}$

З першого рівняння знаходимо $v = 3 - u$ і підставляємо в друге рівняння.

$$u^3 - (3 - u)^2 = -3,$$
$$u^3 - (9 - 6u + u^2) = -3,$$
$$u^3 - u^2 + 6u - 6 = 0,$$
$$u^2(u - 1) + 6(u - 1) = 0,$$
$$(u - 1)(u^2 + 6) = 0.$$

Враховуючи, що $u^2 + 6 \neq 0$, одержуємо $u = 1$. Тоді $v = 2$. Маємо систему

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = 1, \\ \sqrt{x+1} = 2. \end{cases}$$

З першого рівняння $x = 3$, що задовольняє і другому рівнянню.

Відповідь: 3. ◁

Коментар

Деякі ірраціональні рівняння, що містять кілька коренів n-го степеня, можна звести до систем раціональних рівнянь, замінивши кожен корінь новою змінною.

Після заміни $\sqrt[3]{x-2} = u$, $\sqrt{x+1} = v$ із заданого рівняння отримуємо тільки одне рівняння $u + v = 3$. Для одержання другого рівняння запишемо, що за означенням кореня n-го степеня $\begin{cases} x-2 = u^3, \\ x+1 = v^2. \end{cases}$ Віднімемо від першої рівності другу (щоб позбутися змінної x) і одержимо ще один зв'язок між u і v: $u^3 - v^2 = -3$.

Одержану систему рівнянь розв'язуємо методом підстановки.

Слід звернути увагу на те, що, виконуючи обернену заміну, необхідно з'ясувати, чи існує значення x, яке задовольняє обом співвідношенням заміни.

При розв'язуванні систем рівнянь, що містять ірраціональні рівняння, найчастіше використовуються традиційні методи розв'язування систем рівнянь: метод підстановки і метод заміни змінних. При розв'язуванні слід враховувати, що *заміна змінних (разом з оберненою заміною) завжди є рівносильним перетворенням* (звичайно, якщо при вибраній заміні не відбувається звуження ОДЗ заданого рівняння чи системи). Але якщо для подальшого розв'язування рівнянь, одержаних в результаті заміни, ми будемо користуватися рівняннями-наслідками, то можемо отримати сторонні розв'язки, і тоді одержані розв'язки доведеться перевіряти.

Приклад 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=3,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=3.\end{cases}$

Розв'язання

▶ Заміна $\sqrt[4]{x}=u$ і $\sqrt[4]{y}=v$ дає систему

$$\begin{cases}u+v=3,\\ u^2-v^2=3.\end{cases}$$

З першого рівняння цієї системи:

$$u=3-v.$$

Тоді з другого рівняння одержуємо

$$(3-v)^2-v^2=3.$$

Звідси $v=1$, тоді $u=2$.

Обернена заміна дає:

$$\sqrt[4]{y}=1,\ \text{отже, } y=1;$$

$$\sqrt[4]{x}=2,\ \text{отже, } x=16.$$

Відповідь: (16; 1). ◁

Коментар

Якщо позначити $\sqrt[4]{x}=u$ і $\sqrt[4]{y}=v$, то $\sqrt{x}=u^2$ і $\sqrt{y}=v^2$. Тоді задана система буде рівносильна алгебраїчній системі, яку легко розв'язати, а після оберненої заміни одержати систему найпростіших ірраціональних рівнянь.

Враховуючи, що заміна та обернена заміна приводили до рівносильних систем, одержуємо, що розв'язки заданої системи збігаються з розв'язками системи $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=2,\\ \sqrt[4]{y}=1,\end{cases}$ тобто $\begin{cases}x=16,\\ y=1.\end{cases}$

Запитання для контролю

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних рівнянь. Наведіть приклади застосування відповідних методів.
2. Поясніть, чому для розв'язування рівнянь

$$\sqrt[5]{x^2}+3\sqrt[5]{x}-4=0,\quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[6]{x}-2=0$$

зручно використати заміну змінної. Укажіть заміну для кожного рівняння.

3*. Обґрунтуйте, що при піднесенні обох частин рівняння до непарного степеня завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому.

4*. Поясніть, чому при піднесенні обох частин рівняння до парного степеня можуть з'явитися сторонні корені. Як відсіюють сторонні корені?

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–6)**.

1. 1) $\sqrt{x-2}=1$; 2) $\sqrt{x-1}=-3$; 3) $\sqrt[3]{x-1}=-3$;

4) $\sqrt[3]{x^2+125}=5$; 5) $\sqrt[4]{2x-9}=3$.

2. 1) $\sqrt{x+1}=x-5$; 2) $\sqrt{3x-2}+x=4$;

3°) $\sqrt[3]{x-x^3}=-x$; 4) $\sqrt[3]{x^3+x}-x=0$.

3. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}=3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15}=5$;

3) $\sqrt{x-3}=1+\sqrt{x-4}$; 4) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

4. 1) $\sqrt[3]{x^3-2x+6}=x$; 2) $\sqrt[3]{x-x^3+5}=-x$;

3) $\sqrt{3-\sqrt[3]{x+10}}=2$; 4) $\sqrt[3]{2+\sqrt{x^2+3x-4}}=2$.

5. 1) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$; 2) $\sqrt{x-2}+2\sqrt[4]{x-2}=3$;

3) $3\sqrt[4]{x+1}+\sqrt[8]{x+1}=4$; 4) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt[4]{x^2-1}=2$.

6*. 1) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

Розв'яжіть систему рівнянь **(7 – 8)**.

7. 1) $\begin{cases}3\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6,\\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y}=7,\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y}=5;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=3,\\ 2x-y=7;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}2\sqrt{x}-\sqrt{y}=7,\\ \sqrt{x}\sqrt{y}=4.\end{cases}$

8*. 1) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=2,\\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+6}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2.\end{cases}$

§ 25 УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

25.1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ

Таблиця 45

1. Степінь з натуральним і цілим показником	
$\boxed{a^1 = a}$	$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ разів}}}$ $a \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}\ (n \geqslant 2)$
$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$	$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $a \neq 0,\ n \in \boldsymbol{N}$
2. Степінь з дробовим показником	
$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geqslant 0$	$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0,\ n \in \boldsymbol{N}\ (n \geqslant 2),\ m \in \boldsymbol{Z}$
3. Властивості степенів	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $a^m : a^n = a^{m-n}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $(ab)^n = a^n b^n$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Пояснення й обґрунтування

1. Вам відомі поняття степенів з натуральним та цілим показником. Нагадаємо їх означення та властивості.

Якщо n — натуральне число, більше за 1, то для будь-якого дійсного числа a $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ разів}}}$, тобто a^n дорівнює добутку n співмножників, кожен з яких дорівнює a.

При $n = 1$ вважають, що $\boxed{a^1 = a}$.

Якщо $a \neq 0$, то $\boxed{a^0 = 1}$ і $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$, де n — натуральне число.

Наприклад, $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Також вам відомі основні властивості степенів:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.}$$

Нагадаємо ще одну корисну властивість

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}.$$

Узагальнимо *поняття* степеня для виразів виду $3^{\frac{2}{7}}$; $6^{0,2}$; $5^{-\frac{1}{3}}$ і т. п., тобто *для степенів з раціональними показниками*. Відповідне означення бажано дати так, щоб степені з раціональними показниками мали ті самі властивості, що й степені з цілими показниками.

Наприклад, якщо ми хочемо, щоб виконувалася властивість $(a^p)^q=a^{pq}$, то повинна виконуватися рівність $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\cdot n}=a^m$. Але за означенням кореня n-го степеня остання рівність означає, що число $a^{\frac{m}{n}}$ є коренем n-го степеня з числа a^m. Це приводить нас до такого означення.

Степенем числа $a>0$ з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне число ($n>1$), називається число $\sqrt[n]{a^m}$.

Також за означенням приймемо, що при $r>0$

$$\boxed{0^r=0}\,.$$

Наприклад, за означенням степеня з раціональним показником:

$$3^{\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{3^2}=\sqrt[7]{9};\qquad 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5};\qquad 2^{-\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{2^{-3}}=\sqrt[4]{\frac{1}{8}};\qquad 0^{\frac{2}{5}}=0.$$

З а у в а ж е н н я. Значення степеня з раціональним показником $a^{\frac{m}{n}}$ (де $n>1$) не означається при $a<0$.

Це пояснюється тим, що раціональне число r можна подати різними способами у вигляді дробу: $r=\frac{m}{n}=\frac{mk}{nk}$, де k — будь-яке натуральне число.

При $a>0$, використовуючи основну властивість кореня і означення степеня з раціональним показником, маємо: $a^r=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}=a^{\frac{mk}{nk}}$. Отже, при $a>0$ значення a^r не залежить від форми запису r.

При $a<0$ цю властивість не вдається зберегти. Наприклад, якщо $r=\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$, то повинна виконуватися рівність $a^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{2}{6}}$. Але при $a=-1$ одержуємо: $a^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-1}=-1$; $a^{\frac{2}{6}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-1)^2}=\sqrt[6]{1}=1\neq-1$. Тобто при від'ємних значеннях a маємо: $a^{\frac{1}{3}}\neq a^{\frac{2}{6}}$, і через це означення степеня $a^{\frac{m}{n}}$ (m — ціле, n — натуральне, не рівне 1) для від'ємних значень a не вводиться.

Покажемо тепер, що для введеного означення степеня з раціональним показником зберігаються всі властивості степенів з цілими показниками (різниця полягає в тому, що наведені далі властивості є правильними тільки для додатних основ).

Для будь-яких раціональних чисел r і s та будь-яких додатних чисел a і b виконуються рівності:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;
2) $a^r : a^s = a^{r-s}$;
3) $(a^r)^s = a^{rs}$;
4) $(ab)^r = a^r b^r$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Для доведення цих властивостей досить скористатися означенням степеня з раціональним показником і доведеними в § 23 властивостями кореня n-го степеня.

Нехай $r = \frac{m}{n}$ і $s = \frac{p}{q}$, де n і q — натуральні числа (більші за 1), а m і p – цілі.

Тоді при $a > 0$ і $b > 0$ маємо:

1) $a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s}$;

2) $a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{np}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{np}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}} = a^{r-s}$;

3) $(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s = \sqrt[n]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{n}} = a^{\frac{m}{n}\cdot s} = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}$.

Поняття степеня з ірраціональним показником. Опишемо в загальних рисах, як можна означити число a^α для ірраціональних α, коли $a > 1$. Наприклад, пояснимо, як можна розуміти значення $2^{\sqrt{3}}$.

Ірраціональне число $\sqrt{3}$ можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу: $\sqrt{3} = 1{,}7320508075...$. Розглянемо десяткові наближення числа $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком:

$$1<\sqrt{3}<2;$$
$$1{,}7<\sqrt{3}<1{,}8;$$
$$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74;$$
$$1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733;$$
$$1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321;$$
$$1{,}73205<\sqrt{3}<1{,}73206;$$
$$1{,}732050<\sqrt{3}<1{,}732051;$$
$$\dots$$

Будемо вважати, що коли $r<\sqrt{3}<s$ (де r і s – раціональні числа), то значення $2^{\sqrt{3}}$ знаходиться між відповідними значеннями 2^r і 2^s, а саме: $2^r<2^{\sqrt{3}}<2^s$. Знайдемо за допомогою калькулятора наближені значення 2^r і 2^s, вибираючи як r і s наближені значення $\sqrt{3}$ з недостачею і надлишком відповідно. Одержуємо співвідношення:

$$2^1<2^{\sqrt{3}}<2^2;$$
$$2^{1,7}\approx 3{,}2490096<2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}\approx 3{,}4822022;$$
$$2^{1,73}\approx 3{,}3172782<2^{\sqrt{3}}<2^{1,74}\approx 3{,}3403517;$$
$$2^{1,732}\approx 3{,}3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1,733}\approx 3{,}3241834;$$
$$2^{1,7320}\approx 3{,}3218801<2^{\sqrt{3}}<2^{1,7321}\approx 3{,}3221104;$$
$$2^{1,73205}\approx 3{,}3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1,73206}\approx 3{,}3220182;$$
$$2^{1,732050}\approx 3{,}3219952<2^{\sqrt{3}}<2^{1,732051}\approx 3{,}3219975;$$
$$\dots$$

Як бачимо, значення 2^r і 2^s наближаються до одного і того самого числа $3{,}32199\dots$. Це число і вважається степенем $2^{\sqrt{3}}$. Отже, $2^{\sqrt{3}}=3{,}32199\dots$.

Значення $2^{\sqrt{3}}$, обчислене на калькуляторі, таке: $2^{\sqrt{3}}\approx 3{,}321997$.

Можна довести, що завжди, коли ми вибираємо раціональні числа r, які з недостачею наближаються до ірраціонального числа α, і раціональні числа s, які з надлишком наближаються до цього самого ірраціонального числа α, для будь-якого $a>1$ існує, і притому тільки одне, число y, більше за всі a^r і менше за всі a^s. Це число y за означенням є a^α.

Аналогічно означається і степінь з ірраціональним показником α для $0<a<1$, тільки у випадку, коли $r<\alpha<s$ при $0<a<1$ вважають, що $a^s<a^\alpha<a^r$. Крім того, як і для раціональних показників, за означенням вважають, що $\mathbf{1^\alpha=1}$ для будь-якого α і $\mathbf{0^\alpha=0}$ для всіх $\alpha>0$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1) $\sqrt[3]{7^5}$; 2) $\sqrt[4]{5^{-3}}$; 3) $\sqrt[7]{a^2}$ при $a \geqslant 0$; 4*) $\sqrt[7]{a^2}$.

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$; ◁

2) ▶ $\sqrt[4]{5^{-3}} = 5^{-\frac{3}{4}}$; ◁

3) ▶ При $a \geqslant 0$ $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$; ◁

4) ▶ $\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[7]{|a|^2} = |a|^{\frac{2}{7}}$. ◁

Коментар

За означенням степеня з раціональним показником для $a > 0$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}. \quad (1)$$

Для завдання 3 врахуємо, що вираз $a^{\frac{2}{7}}$ означений також і при $a = 0$.

У завданні 4 при $a < 0$ ми не маємо права користуватися формулою (1). Але якщо врахувати, що $a^2 = |a|^2$, то для основи $|a|$ формулою (1) уже можна скористатися, оскільки $|a| \geqslant 0$.

Приклад 2 Обчисліть: 1) $81^{\frac{3}{4}}$; 2) $128^{-\frac{2}{7}}$; 3*) $(-8)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання

1) ▶ $81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \left(\sqrt[4]{81}\right)^3 = 3^3 = 27$; ◁

2) ▶ $128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = \left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; ◁

3*) ▶ $(-8)^{\frac{1}{3}}$ не існує, оскільки степінь $a^{\frac{1}{3}}$ означений тільки при $a \geqslant 0$. ◁

Коментар

Використовуємо означення степеня з раціональним показником:

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, де $a > 0$. А при виконанні завдання 3 враховуємо, що вираз $a^{\frac{m}{n}}$ не означено при $a < 0$.

Приклад 3 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}$; 2*) $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} + 9}$.

Розв'язання

1) ▶ $$\frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}};$$ ◁

Коментар

Оскільки задані приклади вже містять вирази $a^{\frac{1}{2}}$, $b^{\frac{1}{2}}$, $x^{\frac{1}{3}}$, то $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Тоді в завданні 1 невід'ємні числа a і b можна подати як квадрати: $a = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2$, $b = \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ і вико-

2*) ▶ $\dfrac{x+27}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+3^3}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=$

$=\dfrac{\left(x^{\frac{1}{3}}+3\right)\left(x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9\right)}{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}+9}=x^{\frac{1}{3}}+3.$ ◁

ристати формулу різниці квадратів: $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, а в завданні 2 подати невід'ємне число x як куб: $x=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$ і використати формулу розкладу суми кубів:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[3]{x^2}=1;$ 2*) $x^{\frac{2}{3}}=1.$

Розв'язання

1) ▶ $\sqrt[3]{x^2}=1$. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$,

$x^2=1$,

$x=\pm1$.

Відповідь: ±1. ◁

2*) ▶ $x^{\frac{2}{3}}=1$. ОДЗ: $x\geqslant 0$,

$x^2=1$,

$x=\pm1$.

Враховуючи ОДЗ, одержуємо $x=1$.

Відповідь: 1. ◁

Коментар

Область допустимих значень рівняння $\sqrt[3]{x^2}=1$ — всі дійсні числа, а рівняння $x^{\frac{2}{3}}=1$ — тільки $x\geqslant 0$.

При піднесенні обох частин рівняння до куба одержуємо рівняння, рівносильне даному на його ОДЗ. Отже, першому рівнянню задовольняють всі знайдені корені, а другому — тільки невід'ємні.

(У завданні 1 також враховано, що $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3=x^2$, а в завданні 2 — що $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^3=x^{\frac{2}{3}\cdot 3}=x^2$.)

Запитання для контролю

1. Дайте означення степеня з натуральним показником. Наведіть приклади обчислення таких степенів.
2. Дайте означення степеня з цілим від'ємним показником та з нульовим показником. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразів a^0 та a^{-n}, де $n\in \boldsymbol{N}$?
3. Дайте означення степеня з раціональним показником $r=\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, не рівне 1. Наведіть приклади обчислення таких степенів. При яких значеннях a існують значення виразу $a^{\frac{m}{n}}$? Укажіть область допустимих значень виразів $a^{\frac{2}{5}}$ та $a^{-\frac{2}{5}}$.
4. Запишіть властивості степенів з раціональними показниками. Наведіть приклади використання цих властивостей.
5*. Обґрунтуйте властивості степенів з раціональними показниками.
6*. Поясніть на прикладі, як можна ввести поняття степеня з ірраціональним показником.

Вправи

1°. Подайте вираз у вигляді кореня з числа:

1) $2^{\frac{1}{2}}$; 2) $3^{-\frac{2}{5}}$; 3) $5^{0,25}$; 4) $4^{-\frac{3}{7}}$; 5) $2^{1,5}$; 6) $7^{-\frac{2}{3}}$.

2. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

1°) $\sqrt[6]{3^5}$; 2°) $\sqrt[5]{4}$; 3°) $\sqrt{7^{-9}}$; 4) $\sqrt[9]{a^{-2}}$ при $a > 0$; 5) $\sqrt[4]{2b}$ при $b \geqslant 0$; 6*) $\sqrt[11]{c^4}$.

3°. Чи має зміст вираз:

1) $(-3)^{\frac{1}{2}}$; 2) $(-5)^{-2}$; 3) $4^{\frac{2}{7}}$; 4) 0^{-5}?

4. Знайдіть область допустимих значень виразу:

1) $x^{\frac{1}{5}}$; 2) x^{-3}; 3) $(x-1)^{-\frac{2}{3}}$; 4) $(x+3)^{\frac{3}{7}}$; 5) $(x^2-1)^0$; 6) x^3-5.

5. Знайдіть значення числового виразу:

1) $243^{0,4}$; 2) $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$; 3) $16^{\frac{5}{4}}$; 4) $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$; 5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}$;

6) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{-\frac{1}{3}}$; 7) $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 7^{-1} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{-3}\right) : 49^{-\frac{1}{2}}$;

6. Розкладіть на множники:

1) $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$; 2) $a - a^{\frac{1}{2}}$; 3) $3 + 3^{\frac{1}{2}}$; 4) $a + b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$.

7. Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$; 2) $\frac{p^{\frac{1}{2}} - 5}{p - 25}$; 3) $\frac{c + c^{\frac{1}{2}}d^{\frac{1}{2}} + d}{c^{\frac{3}{2}} - d^{\frac{3}{2}}}$; 4) $\frac{m+n}{m^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}} + n^{\frac{2}{3}}}$.

Спростіть вираз **(8–9)**.

8. 1) $\left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$;

3) $\left(x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$; 4) $\left(k^{\frac{1}{4}} + l^{\frac{1}{4}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}} + l^{\frac{1}{8}}\right)\left(k^{\frac{1}{8}} - l^{\frac{1}{8}}\right)$.

9. 1) $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16}$; 2) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}}$; 3) $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4}$; 4) $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}$.

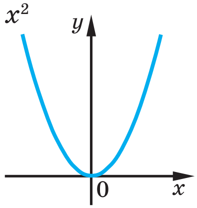
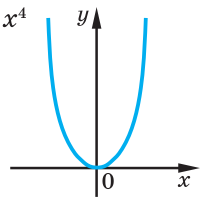
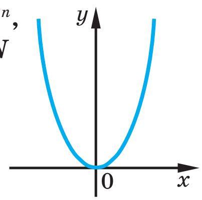
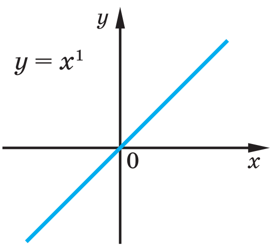
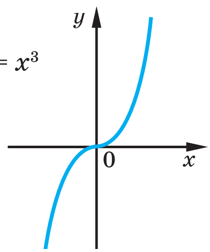
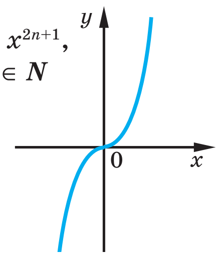
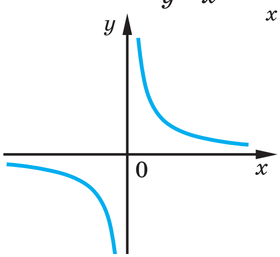
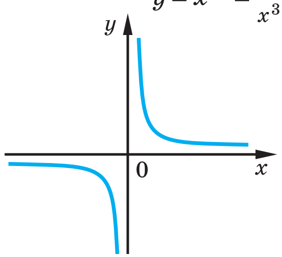
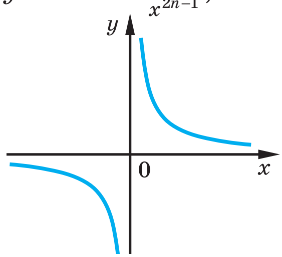
10. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\frac{3}{5}} = 1$; 2) $x^{\frac{1}{7}} = 2$; 3) $x^{\frac{2}{5}} = 2$; 4) $\sqrt[5]{x^2} = 2$.

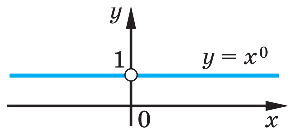
25.2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

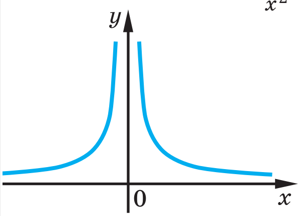
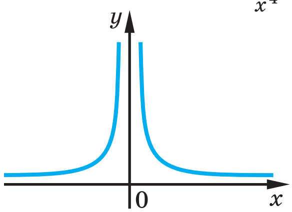
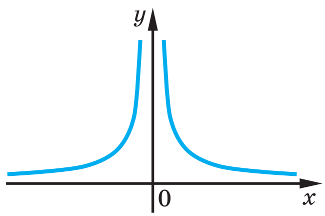
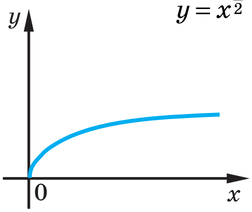
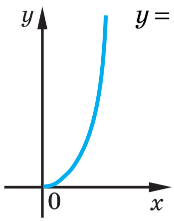
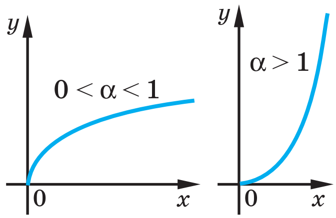
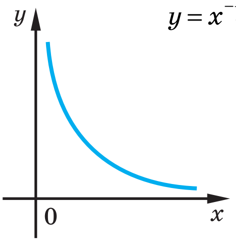
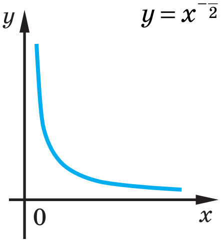
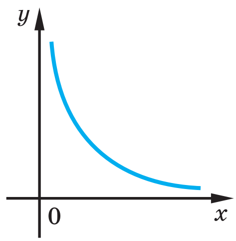
Означення. **Функція виду $y = x^{\alpha}$, де α — будь-яке дійсне число, називається *степеневою функцією*.**

Графіки і властивості

Графік		
1. $y = x^{\alpha}$, α — парне натуральне число		
$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	$y = x^{2n}$, $n \in N$ 
2. $y = x^{\alpha}$, α — непарне натуральне число		
$y = x^1$ 	$y = x^3$ 	$y = x^{2n+1}$, $n \in N$ 
3. $y = x^{\alpha}$, α — непарне від'ємне число		
$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$ 

Таблиця 46

Особливий випадок ($\alpha = 0$)			
Якщо $\alpha = 0$, то $y = x^{\alpha} = x^0 = 1$ (при $x \neq 0$). 			
функції $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)			
Властивості			
$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
($y = x^{2n}$, $n \in N$)			
$\boldsymbol{R}$	$[0; +\infty)$	парна	спадає на проміжку $(-\infty; 0]$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$
($y = x$ та $y = x^{2n+1}$, $n \in N$)			
$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	непарна	зростає
$\left(y = x^{-(2n-1)} = \dfrac{1}{x^{2n-1}}, n \in N\right)$			
$x \neq 0$	$y \neq 0$	непарна	спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$

		Графіки і властивості
	Графік	
		4. $y = x^{\alpha}$, α — парне від'ємне число
$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$ 
		5. $y = x^{\alpha}$,
$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — неціле) 
		6. $y = x^{\alpha}$,
$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — неціле) 

Продовж. табл. 46

функції $y = x^{\alpha}$ (при $\alpha \neq 0$)			
Властивості			
$D(y)$	$E(y)$	парність і непарність	зростання і спадання
$\left(y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}},\ n \in N\right)$			
$x \neq 0$	$(0; +\infty)$	парна	зростає на проміжку $(-\infty; 0)$, спадає на проміжку $(0; +\infty)$
α — неціле додатне число			
$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	зростає
α — неціле від'ємне число			
$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	ні парна, ні непарна	спадає

Пояснення й обґрунтування

Степеневими функціями називають функції виду $y = x^{\alpha}$, де α — будь-яке дійсне число.

З окремими з таких функцій ви вже ознайомилися в курсі алгебри 7–9 класів. Це, наприклад, функції $y = x^1 = x$, $y = x^2$, $y = x^3$. При довільному натуральному α графіки і властивості функції $y = x^{\alpha}$ аналогічні відомим вам графікам і властивостям указаних функцій.

Описуючи властивості степеневих функцій, виділимо ті характеристики функцій, які ми використовували в розділі 1: 1) область визначення; 2) область значень; 3) парність чи непарність; 4) точки перетину з осями координат; 5) проміжки знакосталості; 6) проміжки зростання і спадання; 7) найбільше та найменше значення функції.

1. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — парне натуральне число). Якщо α — парне натуральне число, то функція $y = x^{2n}$, $n \in N$, має властивості і графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = x^2$.

Дійсно, *область визначення* функції $y = x^{2n}$: $D(y) = R$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція *парна*: якщо $f(x) = x^{2n}$, то $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Отже, графік функції $y = x^{2n}$ симетричний відносно осі Oy.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то *графік функції $y = x^{2n}$ завжди проходить через початок координат*.

На проміжку $[0; +\infty)$ *функція зростає*.

Дійсно, для невід'ємних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$) одержуємо $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, оскільки, як відомо з курсу алгебри 9 класу, при піднесенні обох частин правильної нерівності з невід'ємними членами до парного степеня (із збереженням знаку нерівності) одержуємо правильну нерівність.

На проміжку $(-\infty; 0]$ *функція спадає*.

Дійсно, для недодатних значень x_1 і x_2 ($x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$), якщо $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер: $-x_1 \geqslant 0$, $-x_2 \geqslant 0$). Тоді $(-x_2)^{2n} < (-x_1)^{2n}$, отже, $x_2^{2n} < x_1^{2n}$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$.

Для знаходження області значень функції $y = x^{2n}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{2n} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \geqslant 0$ (тоді $x = \pm\sqrt[2n]{a}$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Таким чином, для всіх дійсних значень x значення $y \geqslant 0$. *Найменше значення* функції дорівнює нулю ($y = 0$ при $x = 0$). *Найбільшого значення функція не має*.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{2n} = 1$.

Враховуючи властивості функції $y = x^{2n}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 109).

2. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — непарне натуральне число). Якщо α — непарне натуральне число ($\alpha = 2n - 1$, $n \in N$), то властивості функції $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, аналогічні властивостям функції $y = x^3$.

Дійсно, *область визначення* функції $y = x^{2n-1}$, $n \in N$: $D(y) = \boldsymbol{R}$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x.

Функція *непарна*: якщо $f(x) = x^{2n-1}$, то $f(-x) = (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1} = -f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = x^{2n-1}$ завжди проходить через початок координат.

На всій області визначення функція зростає.

Дійсно, при $x_2 > x_1$ одержуємо $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, оскільки при піднесенні обох частин правильної нерівності до непарного степеня (із збереженням знаку нерівності) одержуємо правильну нерівність.

Для знаходження області значень функції $y = x^{2n-1}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{2n-1} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \in \boldsymbol{R}$ (при $n = 1$ одержуємо $x = a$, а при $n \neq 1$, $n \in N$ одержуємо $x = \sqrt[2n-1]{a}$). Отже, область значень заданої функції: $y \in \boldsymbol{R}$, тобто $E(y) = \boldsymbol{R} = (-\infty; +\infty)$.

Тому *найменшого і найбільшого значень функція не має.*

Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y = x^{2n-1} > 0$, а при $x < 0$ значення $y = x^{2n-1} < 0$.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{2n-1} = 1$.

Як відомо з курсу алгебри та геометрії, графіком функції $y = x^1 = x$ є пряма, яка проходить через початок координат (рис. 110), а при інших непарних натуральних α функція $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, має графік, аналогічний графіку функції $y = x^3$ (рис. 111).

3. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — непарне від'ємне число). Якщо α — непарне від'ємне число, то функція $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, має властивості і графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = \frac{1}{x}$.

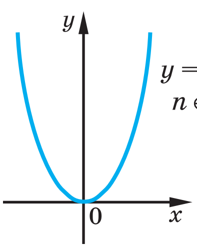


Рис. 109

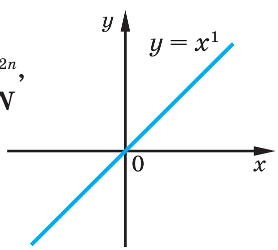


Рис. 110

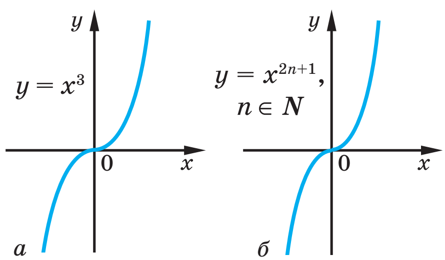


Рис. 111

Дійсно, область визначення функції $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$: $x \neq 0$, тобто $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x, крім $x = 0$.

Функція *непарна*: при $x \neq 0$, якщо $f(x) = x^{-(2n-1)}$, то

$$f(-x) = (-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)} = -f(x).$$

Отже, графік функції симетричний відносно початку координат.

Враховуючи, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$ $\left(y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}} \neq 0\right)$, одержуємо, що *графік функції $y = x^{-(2n-1)}$ не перетинає осі координат*.

На проміжку $(0; +\infty)$ *функція спадає*.

Дійсно, для додатних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) одержуємо $x_2^{2n-1} > x_1^{2n-1}$, але тоді $\frac{1}{x_2^{2n-1}} < \frac{1}{x_1^{2n-1}}$, отже, $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$.

На проміжку $(-\infty; 0)$ *функція теж спадає*. Це випливає з того, що її графік симетричний відносно початку координат.

Наведемо також і аналітичне обґрунтування: якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ і $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тоді за обґрунтованим вище $(-x_2)^{-2(n-1)} > (-x_1)^{-2(n-1)}$, отже, $-x_2^{-(2n-1)} > -x_1^{-(2n-1)}$. Звідси $x_2^{-(2n-1)} < x_1^{-(2n-1)}$.

Для знаходження *області значень* функції $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{-(2n-1)} = a$, тобто $\frac{1}{x^{2n-1}} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \neq 0$ (тоді $x = \sqrt[2n-1]{\frac{1}{a}}$ при $n \neq 1$ і $x = \frac{1}{a}$ при $n = 1$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \neq 0$, тобто $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Тому *найменшого і найбільшого значень функція не має*.

Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y = x^{-(2n-1)} > 0$, а при $x < 0$ значення $y = x^{-(2n-1)} < 0$.

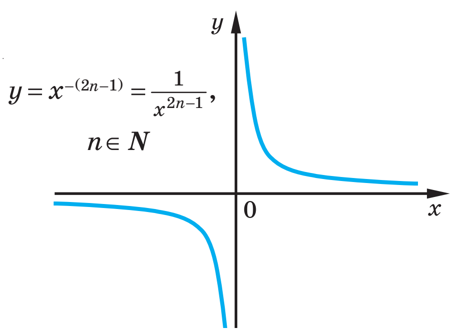


Рис. 112

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{-(2n-1)} = 1$.

Враховуючи властивості функції $y = x^{-(2n-1)}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 112).

4. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — парне від'ємне число). Якщо α — парне від'ємне число, то функція $y = x^{-2n}$, $n \in N$, має властивості і графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = \frac{1}{x^2}$.

Дійсно, *область визначення* функції $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$: $x \neq 0$, тобто $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x, крім $x = 0$.

Функція *парна*: при $x \neq 0$, якщо $f(x) = x^{-2n}$, то $f(-x) = (-x)^{-2n} = x^{-2n} = f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно осі Oy.

Враховуючи, що при $x \neq 0$ значення $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}} > 0$, одержуємо, що *графік функції $y = x^{2n}$ не перетинає осі координат*.

На проміжку $(0; +\infty)$ *функція спадає*.

Дійсно, для додатних значень при $x_2 > x_1$ $(x_1 > 0,\ x_2 > 0)$ одержуємо $x_2^{2n} > x_1^{2n}$, але тоді $\frac{1}{x_2^{2n}} < \frac{1}{x_1^{2n}}$, отже, $x_2^{-2n} < x_1^{-2n}$.

На проміжку $(-\infty; 0)$ *функція зростає*.

Це випливає з того, що її графік симетричний відносно осі Oy. Наведемо також і аналітичне обґрунтування: якщо $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ і $x_2 > x_1$, то $-x_2 < -x_1$ (і тепер $-x_1 > 0$, $-x_2 > 0$). Тоді за обґрунтованим вище $(-x_2)^{-2n} > (-x_1)^{-2n}$, отже, $x_2^{-2n} > x_1^{-2n}$.

Для знаходження області значень функції $y = x^{-2n}$, $n \in N$, складемо рівняння $x^{-2n} = a$, тобто $\frac{1}{x^{2n}} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a > 0$ (тоді $x = \pm \sqrt[2n]{\frac{1}{a}}$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, *область значень* заданої функції: $y > 0$, тобто $E(y) = (0; +\infty)$.

Тому *найменшого і найбільшого значень функція не має*.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{-2n} = 1$.

Враховуючи властивості функції $y = x^{-2n}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 113).

5. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — неціле додатне число). Якщо α — неціле додатне число, то функція $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — не ціле) має *область визначення* $x \geqslant 0$: $D(y) = [0; +\infty)$, оскільки значення степеня з додатним не цілим показником означено тільки для невід'ємних значень x.

Тоді область визначення не симетрична відносно точки 0, і функція не може бути *ні парною, ні непарною*.

Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то *графік функції $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) завжди проходить через початок координат*.

При $x > 0$ значення $y = x^{\alpha} > 0$.

Можна обґрунтувати, що *на всій області визначення функція $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) є зростаючою*.

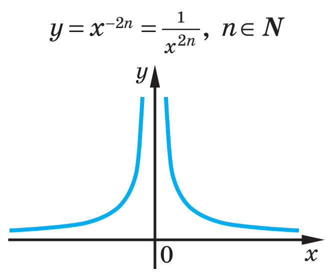


Рис. 113

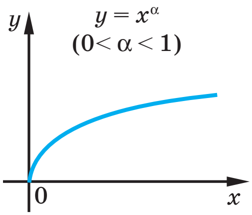


Рис. 114

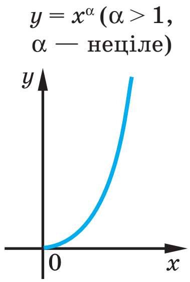


Рис. 115

Для знаходження області значень функції $y = x^{\alpha}$ складемо рівняння $x^{\alpha} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a \geqslant 0$ (тоді $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції. Отже, область значень заданої функції: $y \geqslant 0$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^{\alpha} = 1$.

При зображенні графіка функції $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — неціле) слід враховувати, що при $0 < \alpha < 1$ графік має вигляд, аналогічний графіку $y = \sqrt{x}$ (рис. 114)*, а при $\alpha > 1$ — аналогічний правій вітці графіка $y = x^2$ (рис. 115).

6. Функція $y = x^{\alpha}$ (α — неціле від'ємне число). Якщо α — неціле від'ємне число, то функція $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — неціле) має область визначення $x > 0$ ($D(y) = (0; +\infty)$), оскільки значення степеня з від'ємним нецілим показником означено тільки для додатних значень x.

Тоді область визначення не симетрична відносно точки 0, і функція не може бути *ні парною, ні непарною*.

Враховуючи, що при $x > 0$ значення $y = x^{\alpha} > 0$ (тобто $x \neq 0$ і $y \neq 0$), одержуємо, що *графік функції $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$) не перетинає осі координат*.

На проміжку $(0; +\infty)$ *функція спадає*, тобто для додатних значень при $x_2 > x_1$ ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$) одержуємо $x_2^{\alpha} < x_1^{\alpha}$.

Доведемо це, наприклад, для випадку, коли α — від'ємне раціональне неціле число $\left(\alpha = -\frac{m}{n}\right.$ — неціле, $m \in N$, $n \in N$). При додатних значеннях $x_2 > x_1$ ($x_1 > 0$, $x_2 > 0$), враховуючи результати дослідження функції $y = x^{\alpha}$ при цілому від'ємному α, одержуємо $x_2^{-m} < x_1^{-m}$. Потім, зважаючи на те, що функція $y = \sqrt[n]{t}$ при додатних t є зростаючою, маємо $\sqrt[n]{x_2^{-m}} < \sqrt[n]{x_1^{-m}}$, тоді $x_2^{-\frac{m}{n}} < x_1^{-\frac{m}{n}}$.

Можна обґрунтувати, що і в тому випадку, коли α — від'ємне ірраціональне число, функція $y = x^{\alpha}$ також спадає на всій області визначення (тобто при $x > 0$).

Для знаходження області значень функції $y = x^{\alpha}$ складемо рівняння $x^{\alpha} = a$. Воно має розв'язки для всіх $a > 0$ (тоді $x = a^{\frac{1}{\alpha}}$) і тільки при таких значеннях a. Усі ці числа і складуть область значень функції.

* Це буде детальніше обґрунтовано в підручнику для 11 класу.

Отже, область значень заданої функції: $y > 0$, тобто $E(y) = (0; +\infty)$.

Зазначимо також, що при $x = 1$ значення $y = 1^\alpha = 1$.

Враховуючи властивості функції $y = x^\alpha$ ($\alpha < 0$), одержуємо її графік (рис. 116).

Особливий випадок. Якщо $\alpha = 0$, то функція $y = x^\alpha = x^0 = 1$ при $x \neq 0$ (нагадаємо, що 0^0 — не означено) і її графік — пряма $y = 1$ без точки $(0; 1)$ (рис. 117).

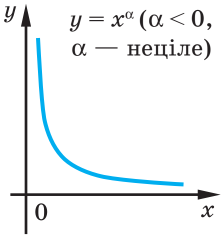


Рис. 116

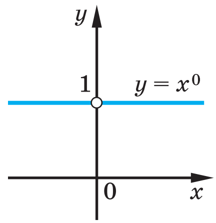


Рис. 117

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x-3)^{\frac{1}{3}}$; 2) $y = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$.

Розв'язання

1) ▶ $x - 3 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$, отже, $D(y) = [3; +\infty)$. ◁

2) ▶ $x + 1 > 0$, тобто $x > -1$, отже, $D(y) = (-1; +\infty)$. ◁

Коментар

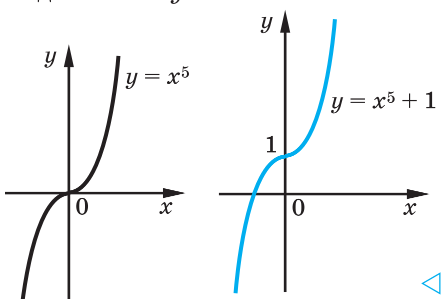
Враховуємо, що вираз $a^{\frac{1}{3}}$ означений при $a \geqslant 0$, а вираз $a^{-\frac{1}{2}}$ тільки при $a > 0$.

Приклад 2 Побудуйте графік функції:

1) $y = x^5 + 1$; 2) $y = (x+2)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання

1) ▶ Будуємо графік $y = x^5$, а потім паралельно переносимо його вздовж осі Oy на $+1$.



◁

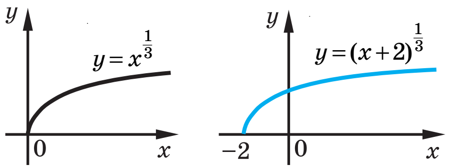
Коментар

Графіки заданих функцій можна отримати з графіків функцій:

1) $y = x^5$, 2) $y = x^{\frac{1}{3}}$ за допомогою паралельного перенесення:

1) на $+1$ уздовж осі Oy;
2) на (-2) вздовж осі Ox.

2) ▶ Будуємо графік $y=x^{\frac{1}{3}}$, а потім паралельно переносимо його вздовж осі Ox на (-2).



◁

Запитання для контролю

1. Користуючись графіком відповідної функції, охарактеризуйте властивості функції $y = x^{\alpha}$, якщо: 1) α — парне натуральне число, 2) α — непарне натуральне число, 3) α — непарне від'ємне число, 4) α — парне від'ємне число, 5) α — не ціле від'ємне число, 6) α — не ціле додатне число.

2*. Обґрунтуйте властивості степеневої функції в кожному з випадків, указаних у завданні 1.

Вправи

1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = x^7$; 2°) $y = x^{-3}$; 3°) $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$;

4°) $y=x^{-\frac{2}{7}}$; 5) $y=(x^2-x)^{\frac{5}{3}}$; 6) $y=(x^2-x+1)^{-\frac{9}{2}}$.

2. Побудуйте графік функції:

1°) $y = x^4$; 2°) $y = x^7$; 3) $y = x^{-3}$; 4) $y = x^{-4}$;

5) $y=x^{\frac{1}{4}}$; 6) $y=x^{\frac{5}{4}}$; 7) $y = (x + 1)^4$; 8*) $y=x^{\frac{1}{5}}-3$;

9*) $y=|x|^{\frac{1}{3}}$; 10*) $y = |x^5 - 1|$.

3. Побудуйте і порівняйте графіки функцій:

1) $y=\sqrt[3]{x}$ і $y=x^{\frac{1}{3}}$; 2) $y=\sqrt[4]{x}$ і $y=x^{\frac{1}{4}}$.

4. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}}=6-x$; 2) $x^{-\frac{1}{3}}=x^2$; 3) $x^{\frac{5}{2}}=2-x$; 4) $x^{-\frac{1}{4}}=2x-1$.

Перевірте підстановкою, що значення x дійсно є коренем рівняння.

5*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 4, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

§26 ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

26.1. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нагадаємо основні ідеї, які використовуються при розв'язуванні рівнянь за допомогою властивостей функцій.

Таблиця 47

1. Скінченна ОДЗ	
Орієнтир	**Приклад**
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається із скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення.	$\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18.$ ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 6-2x\geqslant 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 3. \end{cases}$ Отже, ОДЗ: $x=3$. Перевірка. $x=3$ — корінь $\left(\sqrt{0}+18=\sqrt[4]{0}+18;\ 18=18\right)$. Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число. *Відповідь:* 3. ◁
2. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння	
Орієнтир	**Приклад**
$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$ **Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a.**	$\sqrt{x^2-5x+6}=4x-x^2-4.$ ▶ Запишемо задане рівняння так: $\sqrt{x^2-5x+6}=-(x^2-4x+4)$, $\sqrt{x^2-5x+6}=-(x-2)^2$, $f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0$, $g(x)=-(x-2)^2\leqslant 0$. Отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sqrt{x^2-5x+6}=0, \\ -(x-2)^2=0. \end{cases}$ Із другого рівняння одержуємо $x=2$, що задовольняє й першому рівнянню. *Відповідь:* 2. ◁

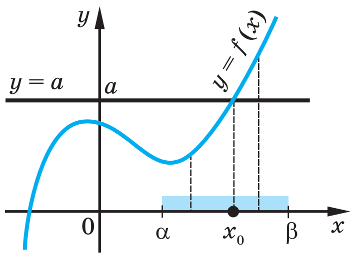
Продовж. табл. 47

3. Використання монотонності функцій

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку лівої та правої частин рівняння).*

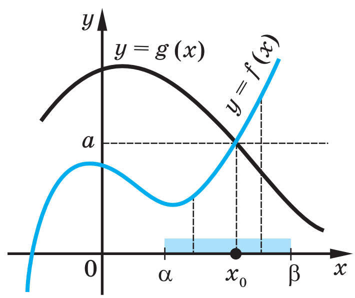
Теореми про корені рівняння



1. **Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.**

Приклад

Рівняння $\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} = 3$ має єдиний корінь $x = 1$ $\left(\sqrt{1} + 2\cdot\sqrt[3]{1} = 3\right.$, тобто $\left.3 = 3\right)$, оскільки функція $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}$ зростає (на всій області визначення $x \geqslant 0$) як сума двох зростаючих функцій.



2. **Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.**

Приклад

Рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$ має єдиний корінь $x = 4$ $\left(\sqrt{4} = 6 - 4,\ 2 = 2\right)$, оскільки $f(x) = \sqrt{x}$ зростає (при $x \geqslant 0$), а $g(x) = 6 - x$ спадає.

Пояснення й обґрунтування

1. Використання скінченності ОДЗ для розв'язування ірраціональних рівнянь. Основними способами розв'язування ірраціональних рівнянь, що використовуються в курсі алгебри і початків аналізу, є виконання рівносильних перетворень рівнянь або одержання рівнянь-наслідків, які дозволяють звести задане рівняння до раціонального. Але іноді одержане раціональне рівняння виявляється складним для розв'язування. Наприклад, рівняння $\sqrt{x-3}+2x^2=\sqrt[4]{6-2x}+18$, наведене в пункті 1 таблиці 47, можна звести до раціонального, ізолюючи $\sqrt[4]{6-2x}$ і підносячи обидві частини до четвертого степеня, а потім ізолюючи вираз, який містить $\sqrt{x-3}$, і підносячи обидві частини до квадрата. Але в результаті ми одержуємо повне рівняння шістнадцятого степеня. У таких ситуаціях спробуємо застосувати відомі нам методи розв'язування рівнянь, пов'язані з використанням властивостей функцій.

Зокрема, у розглянутому рівнянні ОДЗ визначається умовами $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 6-2x\geqslant 0. \end{cases}$

Звідки одержуємо тільки одне значення $x=3$, яке входить до ОДЗ. Оскільки будь-який корінь рівняння входить до його ОДЗ, досить перевірити, чи є ті числа, що входять до ОДЗ, коренями заданого рівняння. Перевірка показує, що $x=3$ — корінь. Інших коренів бути не може, оскільки ОДЗ рівняння складається тільки з одного значення $x=3$.

Зауважимо, що в тому випадку, **коли ОДЗ заданого рівняння — порожня множина (не містить жодного числа)**, ми навіть без перевірки можемо дати відповідь, що **рівняння не має коренів**. Наприклад, якщо потрібно розв'язати рівняння $\sqrt{x-3}=\sqrt[6]{2-x}+5x$, то його ОДЗ задається системою $\begin{cases} x-3\geqslant 0, \\ 2-x\geqslant 0, \end{cases}$

тобто $\begin{cases} x\geqslant 3, \\ x\leqslant 2, \end{cases}$ яка не має розв'язків. Отже, ОДЗ заданого рівняння не містить жодного числа, і тому це рівняння не має коренів.

2. Оцінка лівої та правої частин рівняння. Іноді в тих випадках, коли ірраціональне рівняння зводиться до громіздкого раціонального (або зовсім не зводиться до раціонального), доцільно спробувати оцінити значення функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння

$$\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=\cos^2 x-1, \tag{1}$$

досить за допомогою рівносильних перетворень записати його у вигляді $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=-(1-\cos^2 x)$, тобто $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=-\sin^2 x$. У лівій частині останнього рівняння стоїть функція $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\geqslant 0$ на всій області визначення, а в правій — функція $g(x)=-\sin^2 x\leqslant 0$ при всіх значеннях x. Тоді рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива тільки в тому випадку, коли вони одночасно дорівнюють нулю. Отже, рівняння (1) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{cases} \text{ тобто } \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0, \\ -\sin^2 x=0. \end{cases} \tag{2}$$

Розв'яжемо спочатку перше рівняння цієї системи. Врахуємо, що $\sqrt{x} \geqslant 0$ і $\sqrt[4]{x} \geqslant 0$. **Сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли кожен з доданків дорівнює нулю.** Отже, рівняння $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=0$ рівносильне системі $\begin{cases}\sqrt{x}=0,\\ \sqrt[4]{x}=0,\end{cases}$ яка має єдиний розв'язок $x=0$. Цей розв'язок задовольняє і другому рівнянню системи (2) (дійсно: $-\sin^2 0 = 0$, $0 = 0$), отже, система (2) теж має тільки один розв'язок $x=0$. Значить, і рівняння (1) має єдиний корінь $x=0$.

3. Використання монотонності функцій. Ще одним способом розв'язування тих ірраціональних рівнянь, які зводяться до громіздких раціональних, є використання зростання або спадання відповідних функцій. Найчастіше це робиться за такою схемою:

1) *підбираємо один або декілька коренів рівняння;*

2) *доводимо, що інших коренів це рівняння не має.*

Обґрунтування відповідних властивостей наведено в § 18 розділу 2, а приклади використання цього прийому для розв'язування ірраціональних рівнянь — у таблиці 47.

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–4)** та системи рівнянь **(5)**, використовуючи властивості відповідних функцій.

1. 1) $\sqrt[6]{x^2-1}+x^2=\sqrt[4]{2-2x^2}+x+2;$

2) $2x+\sqrt{x^2-5x+6}=x^2+\sqrt[8]{10x-2x^2-12}-3.$

2. 1) $\sqrt[4]{16+x^2}=2-\sqrt{x^3+x};$ 2) $1+\left|x-\sqrt{x}\right|=\sqrt[6]{1-|x|};$

3) $\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=1-x-x^2;$ 4) $\sqrt[4]{x-2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}}=2-|x-3|.$

3. 1) $\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x^2-1}+\sqrt[6]{x^3-1}=0;$ 2) $\left|\sqrt{x}-2\right|+\left|\sqrt{y}-5\right|+\sqrt[4]{xy-100}=0.$

4. 1) $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3;$ 2) $\sqrt[4]{x+12}+\sqrt[3]{x-3}=3;$

3) $2\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x+2}=6-\sqrt[4]{8x};$ 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\dfrac{2}{x}.$

5. 1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=\sqrt{y}+\sqrt[3]{y},\\ 2\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^3-\sqrt[3]{y}=y^3-\sqrt[3]{x},\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.\end{cases}$

26.2. ПРИКЛАДИ ВИКОРИСТАННЯ ІНШИХ СПОСОБІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Якщо при розв'язуванні ірраціональних рівнянь ми використовуємо рівняння-наслідки (як у § 24), то в кінці доводиться виконувати перевірку одержаних розв'язків. Але в тих випадках, коли ці розв'язки — не раціональні числа, перевірка за допомогою підстановки одержаних значень у початкове рівняння є досить складною і громіздкою. Для таких рівнянь доводиться використовувати рівносильні перетворення на кожному кроці розв'язування. При цьому необхідно пам'ятати, що всі рівносильні перетворення рівнянь чи нерівностей виконуються на ОДЗ заданого рівняння чи нерівності (§ 17), тому, виконуючи рівносильні перетворення ірраціональних рівнянь, доводиться враховувати ОДЗ заданого рівняння. Також досить часто в цих випадках використовуються міркування типу: *для всіх коренів заданого рівняння знаки лівої і правої частин рівняння збігаються*, оскільки при підстановці в задане рівняння числа, яке є його коренем, одержуємо правильну числову рівність. Використовуючи останнє міркування, часто вдається одержати якусь додаткову умову для коренів заданого рівняння і виконувати рівносильні перетворення не на всій ОДЗ даного рівняння, а на якійсь її частині.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}=1$.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1\geqslant 0, \\ x+1\geqslant 0. \end{cases}$

Розв'язок цієї системи: $x\geqslant -\frac{1}{2}$.

На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1},$$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2=\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2,$$

$$2x+1=1+2\sqrt{x+1}+x+1,$$

$$x-1=2\sqrt{x+1}. \qquad (1)$$

Для всіх коренів рівняння (1)

$$x-1\geqslant 0 \qquad (2).$$

За цієї умови рівняння (1) рівносильне рівнянням:

$$(x-1)^2=\left(2\sqrt{x+1}\right)^2,$$

$$x^2-2x+1=4(x+1),$$

$$x^2-6x-3=0.$$

Коментар

Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння.

Враховуючи, що всі рівносильні перетворення виконуються на ОДЗ заданого рівняння, зафіксуємо його ОДЗ.

При перенесенні члена $\left(-\sqrt{x+1}\right)$ із лівої частини рівняння в праву з протилежним знаком одержуємо рівняння, рівносильне даному.

У рівнянні $\sqrt{2x+1}=1+\sqrt{x+1}$ обидві частини невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівняння, рівносильне даному, яке рівносильне рівнянню (1).

Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. У цій рівності права частина — невід'ємне число $\left(2\sqrt{x+1}\geqslant 0\right)$, тоді і ліва

Тоді $x = 3 \pm 2\sqrt{3}$.

$x_1 = 3 + 2\sqrt{3}$ — входить до ОДЗ і задовольняє умові (2), отже, є коренем заданого рівняння; $x_2 = 3 - 2\sqrt{3}$ — входить до ОДЗ, але не задовольняє умові (2), отже, не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: $3 + 2\sqrt{2}$. ◁

частина є невід'ємним числом, тобто $x - 1 \geqslant 0$ для всіх коренів. Тоді за умови (2) обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин до квадрата одержуємо рівносильне рівняння. Але після знаходження коренів цього рівняння необхідно перевірити не тільки те, чи входять вони до ОДЗ, а й чи задовольняють вони умові (2). Для такої перевірки досить взяти наближені значення коренів $x_1 \approx 6{,}4$ та $x_2 \approx -0{,}4$.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = x + 2$.

Коментар

Заміна $\sqrt{x-1} = t$ дозволяє помітити, що кожен вираз, який стоїть під знаком зовнішнього квадратного кореня, є квадратом двочлена.

Застосовуючи формулу $\sqrt{a^2} = |a|$, одержуємо рівняння з модулями, для розв'язування якого використовуємо *план:*

1) *знайти ОДЗ;*
2) *знайти нулі всіх підмодульних функцій;*
3) *позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;*
4) *знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.*

Розв'язання

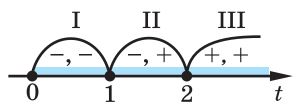
▶ Нехай $\sqrt{x-1} = t$, де $t \geqslant 0$. Тоді $x - 1 = t^2$; $x = t^2 + 1$.

Одержуємо рівняння $\sqrt{t^2 + 4 - 4t} + \sqrt{t^2 + 1 - 2t} = t^2 + 3$,

яке можна записати так: $\sqrt{(t-2)^2} + \sqrt{(t-1)^2} = t^2 + 3$. Звідси

$$|t - 2| + |t - 1| = t^2 + 3. \qquad (1)$$

1) ОДЗ рівняння (1): $t \in \boldsymbol{R}$, але за змістом завдання це рівняння потрібно розв'язати при $t \geqslant 0$.
2) Нулі підмодульних функцій: $t = 2$ і $t = 1$.
3) Ці нулі розбивають область $t \geqslant 0$ на три проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (див. рисунок).



<u>Проміжок I.</u> При $t \in [0; 1]$ маємо рівняння

$$-(t - 2) - (t - 1) = t^2 + 3.$$

Тоді $t^2 + 2t = 0$, $t = 0$ або $t = -2$, але в проміжок $[0; 1]$ входить тільки $t = 0$.

Проміжок II. При $t \in [1; 2]$ маємо рівняння

$-(t-2)+(t-1)=t^2+3$, яке рівносильне рівнянню $t^2=-2$, що не має коренів. Отже, у проміжку $[1; 2]$ коренів немає.

Проміжок III. При $t \in [2; +\infty)$ маємо рівняння

$(t-2)+(t-1)=t^2+3$, з якого одержуємо рівняння $t^2-2t+6=0$, що не має коренів. Отже, у проміжку $[2; +\infty)$ коренів немає.

Об’єднуючи одержані результати, робимо висновок, що рівняння (1) має тільки один корінь $t=0$.

Виконуючи обернену заміну, маємо $\sqrt{x-1}=0$, звідки $x=1$.

Відповідь: 1. ◁

Приклад 3 Розв’яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0.$$

Розв’язання

▶ Оскільки $x=6$ не є коренем заданого рівняння, то при діленні обох частин рівняння на $\sqrt[3]{(x-6)^2}\neq 0$ одержуємо рівносильне рівняння

$$1-3\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}+2\sqrt[3]{\left(\frac{2x+3}{x-6}\right)^2}=0.$$

Після заміни $t=\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}$ маємо рівняння $2t^2-3t+1=0$, корені якого:

$$t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Виконавши обернену заміну, одержуємо:

$$\sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=1 \text{ або } \sqrt[3]{\frac{2x+3}{x-6}}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{2x+3}{x-6}=1 \text{ або } \frac{2x+3}{x-6}=\frac{1}{8},$$

$$x=-9 \text{ або } x=-2.$$

Відповідь: -9; -2. ◁

Коментар

Якщо виконати заміну $\sqrt[3]{x-6}=u$, $\sqrt[3]{2x+3}=v$, то одержимо *рівняння* $u^2-3uv+2v^2=0$, *усі члени якого мають однаковий сумарний степінь** — два. Нагадаємо, що таке рівняння *називається однорідним і розв’язується діленням обох частин на найвищий степінь однієї із змінних*. Розділимо, наприклад, обидві частини на u^2 (тобто на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$).

Щоб при діленні на вираз із змінною не загубити корені рівняння, потрібно ті значення змінної, при яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо, тобто в даному прикладі підставити значення $x=6$ в задане рівняння (це можна виконати усно, до розв’язання записати тільки одержаний результат).

Для реалізації одержаного плану розв’язування не обов’язково вводити змінні u і v, досить помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на $\sqrt[3]{(x-6)^2}$, а вже потім ввести нову змінну t.

* В означенні однорідного рівняння не враховується член 0, який степеня не має.

Запитання для контролю

1. Поясніть, які обмеження доведеться накласти на змінну x, щоб розв'язати рівняння $\sqrt{x-2}=x-6$ за допомогою рівносильних перетворень.
2. Наведіть приклад однорідного ірраціонального рівняння. Складіть план його розв'язування.

Вправи

1. Розв'яжіть ірраціональне рівняння за допомогою рівносильних перетворень:

1) $\sqrt{3x-2}=5-x$; 2) $\sqrt{3-2x}-\sqrt{1-x}=1$;

3) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$; 4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=\sqrt{4x+9}$.

Розв'яжіть рівняння **(2–5)**.

2. 1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x+1$; 2) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$.

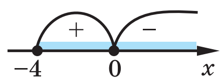
3. 1) $\sqrt[3]{(x+1)^2}+2\sqrt[3]{(x-1)^2}=3\sqrt[3]{x^2-1}$; 2) $x^2+x\sqrt{x+1}-2(x+1)=0$.

4. 1) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x^2-3x+2}$; 2) $\sqrt[3]{2x+3}-\sqrt[3]{2x+1}=2$.

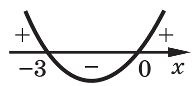
5. 1) $\dfrac{x\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[5]{x^3}-1}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3}-1}{\sqrt[5]{x}-1}=16$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

§27 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 48

Орієнтир	Приклад
1. Метод інтервалів **(для нерівностей виду $f(x)\gtrless 0$)**	
1) Знайти ОДЗ нерівності. **2) Знайти нулі функції $f(x)$ ($f(x)=0$).** **3) Відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак функції в кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.** **4) Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.**	$\sqrt{x+4}>x+2.$ ▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x+4}-x-2>0$. Позначимо $f(x)=\sqrt{x+4}-x-2$. ОДЗ: $x+4\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -4$. Нулі $f(x)$: $\sqrt{x+4}-x-2=0$, $\sqrt{x+4}=x+2$, $x+4=x^2+4x+4$, $x^2+3x=0$, $x_1=0$ — корінь, $x_2=-3$ — сторонній корінь.  *Відповідь:* $[-4; 0)$.

Продовж. табл. 48

2. Рівносильні перетворення	
1) **При піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну даній (на ОДЗ даної).**	$\sqrt[3]{x+2}<-1.$ ▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. Задана нерівність рівносильна нерівностям: $\left(\sqrt[3]{x+2}\right)^3<(-1)^3$, $x+2<-1$, $x<-3$. *Відповідь:* $(-\infty; -3)$. ◁
2) **Якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну даній (на ОДЗ даної).**	$\sqrt[4]{2x-6}<1.$ ▶ ОДЗ: $2x-6 \geqslant 0$, тобто $x \geqslant 3$. Обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, вона рівносильна (на її ОДЗ) нерівностям: $\left(\sqrt[4]{2x-6}\right)^4<1^4$, $2x-6<1$, $x<\frac{7}{2}$. Враховуючи ОДЗ, одержуємо $3 \leqslant x<\frac{7}{2}$. *Відповідь:* $\left[3; \frac{7}{2}\right)$. ◁
3) **Якщо на ОДЗ заданої нерівності якась частина нерівності може набувати як додатних, так і від'ємних значень, то, перш ніж підносити обидві частини нерівності до парного степеня, ці випадки доводиться розглядати окремо.** Наприклад, $\sqrt[2k]{f(x)}>g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x)>g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x)<0. \end{cases}$ $\sqrt[2k]{f(x)}<g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x)>0, \\ f(x)<g^{2k}(x). \end{cases}$	$\sqrt{x+4}>x+2.$ ▶ Задана нерівність рівносильна сукупності систем: $\begin{cases} x+2 \geqslant 0, \\ \left(\sqrt{x+4}\right)^2>(x+2)^2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x+4 \geqslant 0, \\ x+2<0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x^2+3x<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x<-2. \end{cases}$ Розв'язавши нерівність $x^2+3x<0$, маємо $-3<x<0$ (див. рисунок).  Враховуючи нерівність $x \geqslant -2$, одержуємо розв'язок першої системи: $-2 \leqslant x<0$. Розв'язок другої системи: $-4 \leqslant x<-2$. Об'єднуючи ці розв'язки, одержуємо відповідь. *Відповідь:* $[-4; 0)$. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів. Загальну схему розв'язування нерівностей методом інтервалів пояснено в § 21 розділу 2, а приклад застосування методу інтервалів до розв'язування ірраціональних нерівностей наведено в таблиці 48.

2. Рівносильні перетворення ірраціональних нерівностей. Коли для розв'язування ірраціональних нерівностей використовуються рівносильні перетворення, то найчастіше за допомогою піднесення обох частин нерівності до одного і того самого степеня задана нерівність зводиться до раціональної нерівності. При цьому потрібно мати на увазі такі властивості:

1) Якщо обидві частини нерівності доводиться підносити до непарного степеня, то скористаємося тим, що *числові нерівності* $A > B$ *і* $A^{2k+1} > B^{2k+1}$ *або одночасно правильні, або одночасно неправильні.* Тоді кожен розв'язок нерівності
$$f(x) > g(x) \qquad (1)$$
(який перетворює цю нерівність у правильну числову нерівність) буде також і розв'язком нерівності
$$f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x) \qquad (2)$$
і, навпаки, кожен розв'язок нерівності (2) буде також і розв'язком нерівності (1), тобто нерівності (1) і (2) — рівносильні. Отже, **при піднесенні обох частин нерівності до непарного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну даній (на ОДЗ даної).**
Наприклад,
$$\boxed{\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)}\,.$$

2) Аналогічно, *якщо числа A і B невід'ємні* ($A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$), *то числові нерівності* $A > B$ *і* $A^{2k} > B^{2k}$ також *або одночасно правильні, або одночасно неправильні.* Повторюючи попередні міркування, маємо: **якщо обидві частини нерівності невід'ємні, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня (із збереженням знака нерівності) одержуємо нерівність, рівносильну даній (на ОДЗ даної).**
Наприклад, розглядаючи нерівність
$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \qquad (3)$$
на її ОДЗ, де $f(x) \geqslant 0$, помічаємо, що для всіх розв'язків нерівності (3) ліва частина невід'ємна (арифметичний корінь $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$) і нерівність (3) може виконуватися тільки за умови
$$g(x) > 0. \qquad (4)$$

Якщо виконується умова (4), то обидві частини нерівності (3) невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня $2k$ одержуємо нерівність, рівносильну заданій: $f(x) < g^{2k}(x)$ (звичайно, за умови врахування ОДЗ заданої нерівності і умови (4)). Отже,

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}}.$$

3) Якщо за допомогою рівносильних перетворень необхідно розв'язати нерівність

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \qquad (5)$$

на її ОДЗ, де $f(x) \geqslant 0$, то для правої частини цієї нерівності розглянемо два випадки: а) $g(x) < 0$; б) $g(x) \geqslant 0$.

а) При $g(x) < 0$ нерівність (5) виконується для всіх x з ОДЗ заданої нерівності, тобто при $f(x) \geqslant 0$.

б) При $g(x) \geqslant 0$ обидві частини нерівності (5) невід'ємні, і при піднесенні до парного степеня $2k$ одержуємо нерівність, рівносильну заданій:

$$f(x) > g^{2k}(x). \qquad (6)$$

Зауважимо, що для всіх розв'язків нерівності (6) обмеження ОДЗ заданої нерівності $f(x) \geqslant 0$ виконується автоматично; отже, при $g(x) \geqslant 0$ досить записати тільки нерівність (6).

Об'єднуючи одержані результати, робимо висновок, що:

$$\boxed{\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}}.$$

Приклади розв'язування завдань

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$.

Коментар

Зведемо нерівність до виду $f(x) > 0$ і розв'яжемо її методом інтервалів.

Для знаходження нулів функції $f(x)$ використаємо рівняння-наслідки. Щоб відсіяти сторонні корені, виконаємо перевірку одержаних розв'язків.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} > 0$.

Позначимо $f(x) = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1}$.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 0, \\ 2x-1 \geqslant 0. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 1, \\ x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$ Тобто $x \geqslant 1$.

2. Нулі функції $f(x)$: $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}=0$. Тоді:

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x-1}$, $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}\right)^2$,

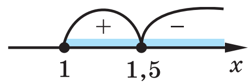
$$x+3-2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}+x-1=2x-1,\ \ 2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-1}=3.$$

Підносимо обидві частини останнього рівняння до квадрата:

$$4(x+3)(x-1)=9,\ \ 4x^2+8x-21=0,$$

$x_1=\frac{3}{2}=1,5$ — корінь, $x_2=-\frac{7}{2}$ — сторонній корінь.

3. Розбиваємо ОДЗ точкою 1,5 на два проміжки і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків (див. рисунок).



Відповідь: [1; 1,5). ◁

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}>x-2$.

<u>I спосіб</u> (метод інтервалів)

Коментар

Зведемо задану нерівність до виду $f(x)>0$ і розв'яжемо її методом інтервалів. При знаходженні ОДЗ заданої нерівності для розв'язування нерівності $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ теж використаємо метод інтервалів (ОДЗ: $x\neq 0$; $\frac{x^3+8}{x}=0$ при $x=-2$).

Для знаходження нулів функції $f(x)$ використаємо рівняння-наслідки.

Хоча функція $f(x)$ і не має нулів, але й у такому випадку метод інтервалів також працює. Тільки в цьому випадку інтервали знакосталості функції $f(x)$ збігаються з інтервалами, з яких складається її область визначення.

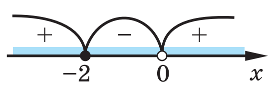
Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2>0. \qquad (1)$$

Позначимо $f(x)=\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2$.

1. ОДЗ: $\begin{cases}\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0,\\ x\neq 0.\end{cases}$ Розв'яжемо нерівність $\frac{x^3+8}{x}\geqslant 0$ методом інтервалів (див. рисунок).



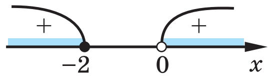
Одержуємо: $x\in(-\infty;-2]\cup(0;+\infty)$.

2. Нулі функції $f(x)$: $\sqrt{\frac{x^3+8}{x}}-x+2=0$. Тоді:

$\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}} = x-2, \quad \dfrac{x^3+8}{x} = x^2-4x+4, \quad x^3+8 = x^3-4x^2+4x,$

$4x^2-4x+8=0$ — коренів немає ($D<0$).

3. ОДЗ нерівності (1) розбивається на два проміжки, у яких функція $f(x)$ має знаки, указані на рисунку.



Відповідь: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

<u>II спосіб</u> (рівносильні перетворення)

Коментар

Для розв'язування використаємо рівносильні перетворення (с. 311):

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{або} \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Щоб розв'язати одержану проміжну нерівність $\dfrac{x^3+8}{x} \geqslant 0$, врахуємо умови, за яких цей дріб буде невід'ємний.

У кінці, об'єднуючи одержані розв'язки, отримуємо відповідь.

Розв'язання

▶ $$\sqrt{\frac{x^3+8}{x}} > x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ \dfrac{x^3+8}{x} > (x-2)^2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x} \geqslant 0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \dfrac{x^3+8}{x} > x^2-4x+4 \end{cases}$$

$$\text{або} \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x} \geqslant 0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 2, \\ \dfrac{4x^2-4x+8}{x} > 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^3+8 \geqslant 0, \\ x>0, \\ x<2, \end{cases} \text{або} \begin{cases} x^3+8 \leqslant 0, \\ x<0, \\ x<2. \end{cases}$$

Враховуючи, що $4x^2-4x+8>0$ при всіх значеннях x ($D<0$ і $a=4>0$), одержуємо, що остання сукупність трьох систем рівносильна сукупності:

$$\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x>0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x>0, \\ x<2 \end{cases} \text{або} \begin{cases} x \leqslant -2, \\ x<0, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \geqslant 2 \text{ або } 0<x<2 \text{ або } x \leqslant -2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leqslant -2 \text{ або } x>0.$$

Відповідь: $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$. ◁

Зауваження. Записуючи наведене розв'язання, знаки рівносильності ($\Leftrightarrow$) можна не ставити, досить на початку розв'язання записати таку фразу: «Виконаємо рівносильні перетворення заданої нерівності».

Приклад 3 Розв'яжіть нерівність

$$\sqrt{3x+9-4\sqrt{3x+5}}+\sqrt{3x+14-6\sqrt{3x+5}}\leqslant 1. \qquad (1)$$

Коментар

Заміна $\sqrt{3x+5}=t$ дозволяє помітити, що кожен вираз, який стоїть під знаком зовнішнього квадратного кореня, є квадратом двочлена.

Застосовуючи формулу $\sqrt{a^2}=|a|$, одержуємо нерівність з модулями, для розв'язування якої використовуємо *план*:

1) *знайти ОДЗ;*
2) *знайти нулі всіх підмодульних функцій;*
3) *відмітити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;*
4) *знайти розв'язки нерівності в кожному з проміжків.*

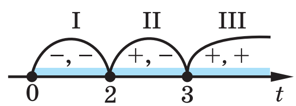
Розв'язання

► Нехай $\sqrt{3x+5}=t$, де $t\geqslant 0$. Тоді $3x+5=t^2$, $3x=t^2-5$.

Отримуємо нерівність $\sqrt{t^2+4-4t}+\sqrt{t^2+9-6t}\leqslant 1$, яку можна записати так: $\sqrt{(t-2)^2}+\sqrt{(t-3)^2}\leqslant 1$. Одержуємо

$$|t-2|+|t-3|\leqslant 1. \qquad (2)$$

1. ОДЗ нерівності (2): $t\in \boldsymbol{R}$, але за змістом завдання цю нерівність потрібно розв'язати при $t\geqslant 0$.
2. Нулі підмодульних функцій: $t=2$ і $t=3$.
3. Ці нулі розбивають область $t\geqslant 0$ на три проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (див. рисунок).



<u>Проміжок I.</u> При $t\in[0;2]$ маємо нерівність
$-(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, з якої одержуємо $t\geqslant 2$, але в проміжок $[0; 2]$ входить тільки $t=2$.

<u>Проміжок II.</u> При $t\in[2;3]$ маємо нерівність
$(t-2)-(t-3)\leqslant 1$, яка рівносильна нерівності $0\cdot t\leqslant 0$, що виконується при будь-яких значеннях t. Отже, у проміжку $[2; 3]$ розв'язками нерівності будуть усі значення t з цього проміжку ($2\leqslant t\leqslant 3$).

<u>Проміжок III.</u> При $t\in[3;+\infty)$ маємо нерівність
$(t-2)+(t-3)\leqslant 1$, з якої одержуємо $t\leqslant 3$, але в проміжок $[3;+\infty)$ входить тільки значення $t=3$.

Об'єднуючи одержані результати, робимо висновок, що розв'язками нерівності (2) будуть усі значення t, такі що: $2\leqslant t\leqslant 3$.

Виконуючи обернену заміну, маємо $2\leqslant\sqrt{3x+5}\leqslant 3$, звідки $4\leqslant 3x+5\leqslant 9$.

Тоді $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{4}{3}$.

Відповідь: $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}\right]$. ◁

Запитання для контролю

1. Назвіть основні методи розв'язування ірраціональних нерівностей.
2. Назвіть основні етапи розв'язування ірраціональної нерівності методом інтервалів.
3. Обґрунтуйте справедливість таких рівносильних перетворень:

1) $\sqrt[2k+1]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g^{2k+1}(x)$;

2) $\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x); \end{cases}$

3) $\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ або $\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

Вправи

Розв'яжіть нерівність **(1–8)**.

1. 1) $\sqrt{x^2-3x-18} < 4-x$; 2) $\sqrt{x^2-3x} < 5-x$.

2. 1) $(x-3)\sqrt{x^2+4} \leqslant x^2-9$; 2) $(x-1)\sqrt{x^2+1} \leq x^2-1$.

3. 1) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \leqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8} \leqslant \dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$;

4. 1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5} \geqslant 3$; 2) $\sqrt{2x-20}+\sqrt{x+15} \geqslant 5$.

5. 1) $\dfrac{14}{3-\sqrt{x}} \geqslant \sqrt{x}+5$; 2) $\dfrac{x-\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-6} > 0$.

6. 1) $\sqrt{\dfrac{x^3+27}{x}} > x-3$; 2) $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

7*. 1) $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}}+\sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \leqslant 2$;

2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} > 1$.

8*. 1) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right) \leqslant 0$;

2) $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+2\right)\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{10x-2x^2-12}+2\right) \geqslant 0$.

§ 28 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ З ПАРАМЕТРАМИ

Основні методи та ідеї, які використовуються при розв'язуванні завдань з параметрами, було розглянуто в § 20 розділу 2. Як і раніше, при розв'язуванні завдань з параметрами, у яких вимагається розв'язати рівняння чи нерівність, можна користуватися орієнтиром: *будь-яке рівняння чи нерівність з параметрами можна розв'язувати як звичайні рівняння чи нерівність доти, поки всі перетворення або міркування, необхідні для розв'язування, можна виконати однозначно. Але в тому разі, коли якесь перетворення не можна виконати однозначно, розв'язування необхідно розбити на декілька випадків, щоб у кожному з них відповідь через параметри записувалася однозначно.*

Також на етапі пошуку плану розв'язування рівнянь чи нерівностей з параметрами або при проведенні міркувань, пов'язаних із самим розв'язанням, часто зручно супроводжувати відповідні міркування схемами, за якими легко простежити, у який момент ми не змогли однозначно виконати необхідні перетворення, на скільки випадків довелося розбити розв'язання і чим відрізняється один випадок від іншого.

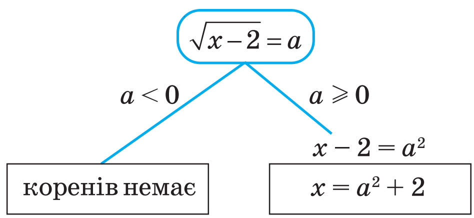
Зазначимо, що рівняння та нерівності з параметрами найчастіше розв'язують за допомогою їх рівносильних перетворень, хоча інколи використовуються і властивості функцій, метод інтервалів для розв'язування нерівностей та рівняння-наслідки.

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}=a.$

Коментар

Ми не можемо однозначно дати відповідь на питання, чи є в заданого рівняння корені, і тому вже на першому кроці повинні розбити розв'язання на два випадки: 1) $a<0$ — коренів немає, 2) $a \geqslant 0$ — корені є (див. схему).

При $a \geqslant 0$ маємо найпростіше ірраціональне рівняння, обидві частини якого невід'ємні. Отже, при піднесенні до квадрата обох його частин одержуємо рівняння, рівносильне заданому. ОДЗ заданого рівняння можна не записувати, вона враховується автоматично, бо для всіх коренів одержаного рівняння $x-2=a^2 \geqslant 0$.



Розв'язання

▶ 1) При $a<0$ рівняння не має коренів.

2) При $a \geqslant 0$ $x-2=a^2$. Тоді $x=a^2+2$.

Відповідь: 1) якщо $a<0$, то коренів немає; 2) якщо $a \geqslant 0$, то $x=a^2+2$. ◁

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$.

Розв'язання*

► $$\sqrt{x+a}=3-\sqrt{x-1}. \qquad (1)$$

Для всіх коренів рівняння (1):

$$3-\sqrt{x-1}\geqslant 0. \qquad (2)$$

Тоді рівняння (1) рівносильне рівнянням:

$$x+a=\left(3-\sqrt{x-1}\right)^2, \qquad (3)$$

$$x+a=9-6\sqrt{x-1}+x-1,$$

$$\sqrt{x-1}=\frac{8-a}{6}. \qquad (4)$$

Для всіх коренів рівняння (4):

$$\frac{8-a}{6}\geqslant 0. \qquad (5)$$

Тоді рівняння (4) рівносильне рівнянню

$$x-1=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2. \qquad (6)$$

Отже, $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1.$

Врахуємо обмеження (2) і (5):

$$3-\sqrt{x-1}=3-\sqrt{\left(\frac{8-a}{6}\right)^2}=3-\left|\frac{8-a}{6}\right|.$$

За умовою (5) $\frac{8-a}{6}\geqslant 0$, тоді $\left|\frac{8-a}{6}\right|=\frac{8-a}{6}$. Отже, умови (2) і (5) дають систему $\begin{cases}3-\frac{8-a}{6}\geqslant 0,\\ \frac{8-a}{6}\geqslant 0,\end{cases}$ тобто $\begin{cases}a\geqslant -10,\\ a\leqslant 8,\end{cases}$ тоді $-10\leqslant a\leqslant 8$.

Відповідь:

1) при $-10\leqslant a\leqslant 8$ $x=\left(\frac{8-a}{6}\right)^2+1$;

Коментар

Використаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього необхідно врахувати його ОДЗ:

$$\begin{cases}x+a\geqslant 0, & (7)\\ x-1\geqslant 0. & (8)\end{cases}$$

При перенесенні члена заданого рівняння з лівої частини в праву з протилежним знаком одержали рівносильне рівняння (1).

Для всіх коренів рівняння (1) воно є правильною числовою рівністю. Його ліва частина невід'ємна, отже, і права частина повинна бути невід'ємною. Тоді далі можна розв'язувати рівняння (1) не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, яка задається умовою (2). За цієї умови обидві частини рівняння (1) невід'ємні, отже, при піднесенні обох його частин до квадрата одержимо рівносильне рівняння (3) (а після рівносильних перетворень — рівняння (4)).

Для всіх коренів рівняння (3) його права частина невід'ємна, отже, і ліва частина буде невід'ємною: $x+a\geqslant 0$, але тоді умова (7) ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично і її можна не записувати до розв'язання.

Також для всіх коренів рівняння (4) його ліва частина невід'ємна, отже, і права частина повинна бути невід'ємною. Тому далі можна розв'язувати рівняння (4) не на всій ОДЗ, а тільки на тій її частині, яка задається умовою (5). Тоді обидві частини рівняння (4) невід'ємні і після під-

* У запису розв'язання прикладів 2–6 синім кольором виділено обмеження, які довелося накласти в процесі рівносильних перетворень заданого рівняння чи нерівності.

2) при $a < -10$ або $a > 8$ коренів немає.

несення обох його частин до квадрата одержимо рівносильне рівняння (6).

Для всіх коренів рівняння (6) його права частина невід'ємна, отже, і ліва частина буде невід'ємною: $x - 1 \geqslant 0$, але тоді й умова (8) ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично, і тому ОДЗ можна не записувати до розв'язання.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{a+\sqrt{a+x}} = x$.

Розв'язання

▶ Для всіх коренів даного рівняння

$$x \geqslant 0 \qquad (1).$$

Тоді задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$a + \sqrt{a+x} = x^2, \qquad (2)$$

$$\sqrt{a+x} = x^2 - a. \qquad (3)$$

Для всіх коренів рівняння (3)

$$x^2 - a \geqslant 0. \qquad (4)$$

Тоді рівняння (3) рівносильне рівнянням:

$$a + x = (x^2 - a)^2, \qquad (5)$$

$$a + x = x^4 - 2ax^2 + a^2. \qquad (6)$$

Розглянемо рівняння (6) як квадратне відносно a:

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + x^4 - x = 0.$$

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = \\ = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Тоді $a = \dfrac{(2x^2+1) \pm (2x+1)}{2}$.

Отже, $a = x^2 + x + 1$ або $a = x^2 - x$. Звідси

$$x^2 - a + x + 1 = 0 \qquad (7)$$

або

$$x^2 - a = x. \qquad (8)$$

Враховуючи умови (1) і (4), одержимо, що $(x^2 - a) + x + 1 \geqslant 1$, отже, рівняння (7) не має коренів.

Коментар

Як і в прикладі 2, ОДЗ заданого рівняння $\begin{cases} a+\sqrt{a+x} \geqslant 0, \\ a+x \geqslant 0 \end{cases}$ буде врахована автоматично при переході до рівнянь (2) та (5) (для всіх коренів цих рівнянь), отже, її можна не записувати в розв'язанні.

Міркування при виконанні рівносильних перетворень заданого рівняння (до рівнянь (2) – (3) – (5) – (6)) повністю аналогічні міркуванням, наведеним у коментарі до прикладу 2.

Аналізуючи рівняння (6) (яке досить важко розв'язати відносно змінної x), користуємося орієнтиром, який умовно можна назвати «Шукай квадратний тричлен», а саме: *спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції)*. У даному випадку розглянемо це рівняння як квадратне відносно параметра a (цей спосіб ефективно спрацьовує тільки тоді, коли дискримінант одержаного квадратного тричлена є повним квадратом, як у розглянутому випадку).

Якщо для коренів рівняння (8) виконується умова (1) ($x \geqslant 0$), то автоматично виконується і умова (4) ($x^2 - a \geqslant 0$).

З рівняння (8) одержимо

$$x^2 - x - a = 0.$$

Це рівняння має корені, якщо $D = 1 + 4a \geqslant 0$, тобто при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Тоді $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$.

Для x_1 умова $x \geqslant 0$ виконується, отже, x_1 — корінь заданого рівняння при $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

Врахуємо умову $x \geqslant 0$ для x_2:

$$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2} \geqslant 0, \quad \sqrt{1+4a} \leqslant 1,$$

$$0 \leqslant 1 + 4a \leqslant 1, \quad -\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0.$$

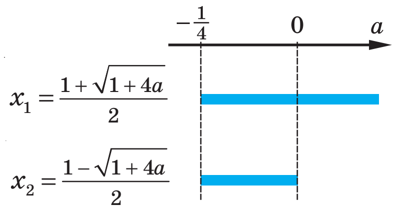
Відповідь: 1) при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}, \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2};$$

2) при $a > 0$ $x = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$;

3) при $a < -\frac{1}{4}$ коренів немає. ◁

Перед записом відповіді зручно зобразити всі одержані розв'язки на схемі (як це описано на с. 219).



Із цієї схеми видно, що при $a > 0$ у відповідь потрібно записати тільки одну формулу (x_1), при $-\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 0$ — дві формули (x_1 і x_2), а при $a < -\frac{1}{4}$ коренів немає.

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} ax \geqslant 0, \\ x + 4a > 0, \\ (x+4a)^2 > 25ax. \end{cases} \qquad (1)$$

При $a = 0$ одержуємо систему

$$\begin{cases} 0 \cdot x \geqslant 0, \\ x > 0, \\ x^2 > 0, \end{cases}$$ розв'язком якої є $x > 0$.

Коментар

Використаємо рівносильні перетворення. Для цього врахуємо ОДЗ заданої нерівності ($ax \geqslant 0$) і те, що права частина невід'ємна, отже, для всіх розв'язків заданої нерівності її ліва частина повинна бути додатною ($x + 4a > 0$). За цієї умови (на ОДЗ) обидві частини заданої нерівності невід'ємні, отже, при піднесенні обох частин нерівності до квадрата одержимо рівносильну нерівність.

При $a > 0$ одержуємо систему

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв'яжемо окремо нерівність

$$x^2 - 17ax + 16a^2 > 0.$$

Оскільки $x^2 - 17ax + 16a^2 = 0$ при $x = a$ та $x = 16a$, то при $a > 0$ одержуємо $x < a$ або $x > 16a$.

Тоді система (2) має розв'язки:

$$0 \leqslant x < a \text{ або } x > 16a.$$

При $a < 0$ одержуємо систему

$$\begin{cases} x \leqslant 0, \\ x > -4a, \\ x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) розв'язків не має, оскільки при $a < 0$ перша і друга нерівності не мають спільних розв'язків.

Відповідь: при $a = 0$ $x > 0$;

при $a > 0$ $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$;

при $a < 0$ розв'язків немає. ◁

Отримуємо систему (1).

Для розв'язування нерівності $ax \geqslant 0$ необхідно розглянути три випадки: $a = 0$ (ділити на a не можна); $a > 0$ (знак нерівності зберігається при діленні обох її частин на a); $a < 0$ (знак нерівності змінюється).

При $a > 0$ значення $-4a < 0$, тому перші дві нерівності системи (2) мають спільний розв'язок $x \geqslant 0$, а для розв'язування нерівності $x^2 - 17ax + 16a^2 > 0$ можна використати графічну ілюстрацію:

При $a < 0$ значення $-4a > 0$, тому перші дві нерівності системи (3) не мають спільних розв'язків, отже, і вся система (3) не має розв'язків.

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-a} > x+1$.

Коментар

Спочатку скористаємося рівносильними перетвореннями (с. 311):

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Якщо в одержані системи параметр а входить лінійно, то в таких випадках іноді буває зручно виразити параметр через змінну, розглянути параметр як функцію від цієї змінної і використати графічну ілюстрацію розв'язування нерівностей (у системі координат xOa). Зазначимо, що для зображення розв'язків сукупності нерівностей зручно використовувати дві системи координат, у яких осі Ox знаходяться на одній прямій (і на кожній виділяти штриховкою відповідні розв'язки).

При різних значеннях a пряма $a = \text{const}$ або не перетинає заштриховані області (при $a \geqslant -\frac{3}{4}$), або перетинає їх по відрізках. Абсциси точок перетину є розв'язками систем (1) і (2), а тому і розв'язками заданої нерівності.

Розв'язання

Задана нерівність рівносильна сукупності систем:

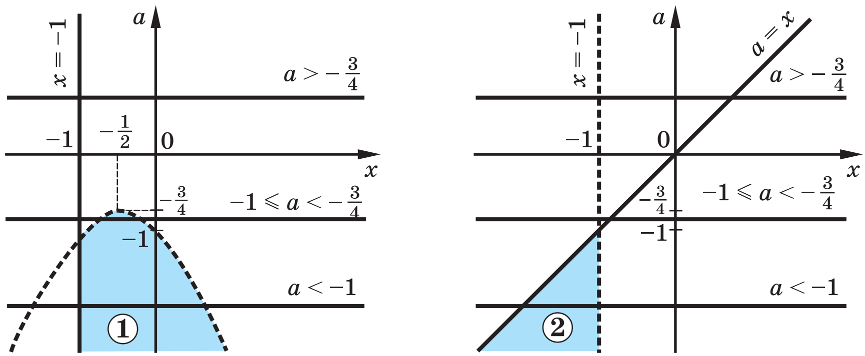
$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ x-a > (x+1)^2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x-a \geqslant 0, \\ x+1 < 0. \end{cases} \text{ Тоді:}$$

$$\begin{cases} x \geqslant -1, \\ a < -x^2 - x - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

або

$$\begin{cases} a \leqslant x, \\ x < -1. \end{cases} \qquad (2)$$

Зобразимо графічно розв'язки систем нерівностей (1) і (2) у системі координат xOa (на рисунках заштриховано відповідні області ① і ②).



Бачимо, що: $\boxed{\text{1) при } a \geqslant -\frac{3}{4}}$ розв'язків немає (немає заштрихованих точок); $\boxed{\text{2) якщо } -1 \leqslant a < -\frac{3}{4}}$, то пряма $a=\text{const}$ перетинає тільки заштриховану область ①. Причому одержаний інтервал обмежений зліва і справа вітками параболи $a=-x^2-x-1$. Але для відповіді нам потрібно записати x через a. Для цього з рівняння $x^2+x+a+1=0$ знаходимо x:

$$x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-a-1}.$$

Як бачимо, $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}>-\frac{1}{2}$, тобто $x=-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$ — рівняння правої вітки параболи, а $x=-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$ — лівої. Тоді відповідь у цьому випадку буде:

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a};$$

3) якщо $a<-1$, то пряма $a=\text{const}$ перетинає заштриховані області ① і ②. Для області ① інтервал для x обмежений: зліва — прямою $x=-1$, а справа — правою віткою параболи, тобто $-1\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$. Для області ② інтервал для x обмежений зліва прямою $x=a$, а справа — прямою $x=-1$, тобто $a\leqslant x<-1$. Об'єднання цих інтервалів можна коротше записати так:

$$a\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}.$$

Відповідь: 1) при $a\geqslant-\frac{3}{4}$ — розв'язків немає;

2) при $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$ $\quad -\frac{1}{2}-\sqrt{-\frac{3}{4}-a}<x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$;

3) при $a<-1$ $\quad a\leqslant x<-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}-a}$. ◁

Для розв'язування деяких дослідницьких завдань з параметрами можна використати властивості квадратного тричлена і, зокрема, умови розміщення коренів квадратного тричлена відносно заданих чисел (табл. 37, с. 225).

Приклад 6 Знайдіть всі значення параметра k, при яких має корені рівняння $x+2k\sqrt{x+1}-k+3=0$.

Розв'язання

▶ Заміна $\sqrt{x+1}=t$, де $t\geqslant 0$ (тоді $x=t^2-1$). Одержуємо рівняння

$$t^2+2kt-k+2=0. \qquad (1)$$

Задане рівняння буде мати корені тоді і тільки тоді, коли рівняння (1) буде мати хоча б один невід'ємний корінь ($t\geqslant 0$).

Випадок $t=0$ дослідимо окремо.

При $t=0$ з рівняння (1) маємо $k=2$. Отже, при $k=2$ рівняння (1) має корінь $t=0$. Тоді і задане рівняння має корінь $x=-1$, тобто $k=2$ задовольняє умові задачі.

Позначимо $f(t)=t^2+2kt-k+2$.

Рівняння (1) може мати хоча б один додатний корінь в одному з двох випадків:

Коментар

Якщо ірраціональне рівняння містить тільки один корінь, то інколи можна звести таке рівняння до раціонального, позначивши цей корінь новою змінною. Оскільки заміна є рівносильним перетворенням (разом з оберненою заміною), то одержуємо рівняння, рівносильне даному, і тому замість дослідження заданого рівняння можна досліджувати одержане.

Але при цьому слід враховувати, що *після заміни змінної інколи змінюється вимога задачі*, зокрема, для рівняння (1) вона буде такою: знайти всі значення параметра k, для яких це рівняння має хоча б один невід'ємний корінь (тоді після оберненої заміни ми обов'язково знайдемо корені заданого рівняння). Це можливо в одному

1) один корінь додатний і один від'ємний — для цього необхідно і достатньо виконання умови $f(0) < 0$;
2) обидва корені додатні — для цього необхідно і достатньо виконання системи умов:

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ D \geqslant 0, \\ t_0 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Умова $f(0) < 0$ дає: $-k + 2 < 0$, тобто $k > 2$.

Система (2) дає:

$$\begin{cases} -k+2>0, \\ 4k^2-4(-k+2)\geqslant 0, \\ -k>0. \end{cases}$$

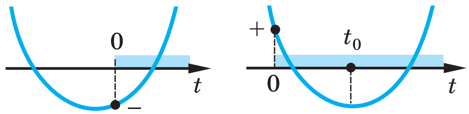
Тоді:

$$\begin{cases} k<2, \\ k^2+k-2\geqslant 0, \\ k<0. \end{cases} \quad \begin{cases} k<2, \\ k\leqslant -2 \text{ або } k\geqslant 1, \\ k<0. \end{cases}$$

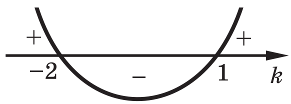
Отже, $k \leqslant -2$.

Відповідь: $k \leqslant -2$ або $k \geqslant 2$. ◁

з трьох випадків: або один з коренів рівняння (1) дорівнює нулю (цей випадок легко досліджується підстановкою в рівняння (1) $t = 0$), або рівняння (1) має один додатний і один від'ємний корені, або обидва корені додатні. Зобразивши відповідні ескізи графіків функції $f(t) = t^2 + 2kt - k + 2$ (див. рисунок), записуємо необхідні і достатні умови такого розміщення для коренів квадратного тричлена (або використовуємо табл. 37 на с. 225).



Для розв'язування квадратної нерівності $k^2 + k - 2 \geqslant 0$ можна використати графічну ілюстрацію.



У кінці необхідно об'єднати всі одержані результати. Звичайно, для одержання відповіді можна було розв'язати задане рівняння (аналогічно прикладу 2), а потім дати відповідь на запитання задачі, але такий шлях потребує більш громіздких обчислень.

Вправи

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-a} = 2$; 2) $\sqrt{x+2a} = a$; 3) $\sqrt{x+6} - m = \sqrt{x-3}$; 4) $\sqrt{a - \sqrt{a+x}} = x$.

2. Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{(x-1)\sqrt{a-x}}{2-x} \geqslant 0$; 2) $x + 2a > \sqrt{3ax + 4a^2}$; 3) $\sqrt{4x+a} > x$;
4) $\sqrt{x-a} \geqslant 2x + 1$; 5) $\sqrt{a^2 - x^2} > 2 - x$.

3. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $3\sqrt{x+2} = 2x + a$ має корені.

4. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $\left(\sqrt{x}-a\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)=0$ має тільки один дійсний корінь.

5. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $\sqrt{2-ax}+2=x$ має тільки один дійсний корінь.

6. Визначіть кількість розв'язків системи $\begin{cases} y=a+\sqrt{x}, \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ залежно від значення параметра a.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$.

2. Обчисліть:

1) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(1{,}5-\sqrt{5}\right)^3}-1$; 2) $\frac{\left(5\sqrt{3}+\sqrt{50}\right)\left(5-\sqrt{24}\right)}{\sqrt{75}-5\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-1{,}5\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\left(1-\sqrt{2}\right)^3\right)^2}+0{,}75$; 4) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{20}}{2\sqrt{5}+\sqrt{24}}\cdot\left(11+2\sqrt{30}\right)$.

Спростіть вираз **(3–5)**.

3. 1) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}}-\frac{a}{\sqrt{2a}+2}+\frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$; 2) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$;

3) $\frac{\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}+x}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; 4) $\left(\frac{\sqrt{c}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{c}-1}{\sqrt{c}+1}-\frac{\sqrt{c}+1}{\sqrt{c}-1}\right)$.

4. 1) $\left(\sqrt{k}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+1}{\sqrt{k}+1}\right)^{-1}-\frac{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt{k}}{\sqrt{k}-1}$; 2) $\left(\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(2\sqrt{b}\right)^2}{a-b}-\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\frac{32b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

3) $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\right)\left(\sqrt[4]{\frac{x}{y}}+1\right)$; 4) $\frac{\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^3}-\sqrt{a^2b}-\sqrt{b^3}}{\sqrt[4]{b^3}+\sqrt[4]{a^4b}-\sqrt[4]{ab^4}-\sqrt[4]{a^3}}$.

5. 1) $\frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\frac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1}+\frac{2}{x^{-0,5}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}\right):\frac{(ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}}{a-b}$;

3) $\left(\frac{2x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{3x}\right)^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}}{x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)$; 4) $\left(\frac{1-c^{-2}}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}-\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{c^2}+\frac{c^{-2}-c}{c^{\frac{1}{2}}-c^{-\frac{1}{2}}}\right)\left(1+\frac{2}{c^2}\right)^{-2}$.

Розв'яжіть рівняння **(6–10)**:

6. 1) $\left(\sqrt{x^2-7x+10}\right)^2=2x^2-9x+7$; 2) $x^2+\sqrt{x^2-1}-\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0$;

3) $\sqrt{(x+1)(2x+3)}=x+3$; 4) $\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x+3}=x+3$.

7. 1) $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x$; 2) $\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-3x-5}=3x$;

3) $\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{2x+2}$; 4) $\sqrt{x^2-7x+1}=\sqrt{2x^2-15x+8}$.

8. 1) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$; 2) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{5x+2}$;

3) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

4) $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+18-8\sqrt{x+2}}=1$.

9. 1) $\sqrt[3]{2x-8}+\sqrt[3]{x-8}=2$; 2) $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$;

3) $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{5-x}=2$; 4) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

10. 1) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$; 2) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{2x-3}=0$;

3) $\dfrac{x\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[5]{x^3-1}}+\dfrac{\sqrt[5]{x^3-1}}{\sqrt[5]{x-1}}=16$; 4) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$.

Розв'яжіть систему рівнянь **(11–12)**.

11. 1) $\begin{cases}\sqrt{x+y}=1,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{x+3y+1}=2,\\ \sqrt{2x-y+2}=7y-6;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\dfrac{7}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{4}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{5}{3},\\ \dfrac{5}{\sqrt{x-7}}-\dfrac{3}{\sqrt{y+6}}=\dfrac{13}{6};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{4}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{31}{20},\\ \dfrac{3}{\sqrt{x-9}}+\dfrac{2}{\sqrt{y+9}}=\dfrac{7}{20}.\end{cases}$

12. 1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}}+4\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}}=5,\\ x=y+1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}=\dfrac{10}{3},\\ xy-2x-2y=2;\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sqrt{2x+y-1}-\sqrt{x+y}=1,\\ 3x+2y=4;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7.\end{cases}$

Розв'яжіть нерівність **(13–21)**.

13. 1) $\sqrt{3x^2+13}\geqslant 1-2x$; 2) $\sqrt{x^2+x}>1-2x$;

3) $\sqrt{3x-x^2}<4-x$; 4) $\sqrt{x^2-x-2}<2x+6$.

14. 1) $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$; 2) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

3) $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}}<0;$ 4) $\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}>0.$

15. 1) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}\leqslant 2;$ 2) $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\geqslant 3;$

3) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2};$ 4) $\sqrt{x+6}>\sqrt{2x-4}+\sqrt{x+1}.$

16. 1) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{4}}>\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{4};$ 2) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}<\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2};$

3) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0;$ 4) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0.$

17. 1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1;$ 2) $(x-3)\sqrt{x^2+1}\leqslant x^2-9;$

3) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\geqslant\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4};$ 4) $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\geqslant\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}.$

18. 1) $\dfrac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1;$ 2) $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2;$

3) $\sqrt{x+5}<1+\sqrt{-x-3}+\sqrt{(x+5)(-x-3)};$

4) $\sqrt{(x-5)(-x+7)}+1>\sqrt{-x+7}-\sqrt{x-5}.$

19. 1) $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5};$ 2) $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1};$

3) $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}>\sqrt{4x^2-18x+18};$

20. 1) $\dfrac{(1-x)\sqrt{1-x}+(1+x)\sqrt{1+x}}{\sqrt{4-4x^2+2\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}}\geqslant 1;$ 2) $\dfrac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2-2\left(x^2-x\right)\sqrt{x-x^2}}}>1;$

3) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}+\dfrac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}-1}\geqslant 0;$ 4) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt{1+x}}\leqslant 0.$

21. 1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\leqslant\dfrac{a}{\sqrt{x}}\ \ (a>0);$ 2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\geqslant\dfrac{a}{\sqrt{x}}.$

22. Розв'яжіть нерівність $\sqrt{1-x^2}\geqslant\dfrac{4}{3}(x-a)$ при $a=0$ і переконайтеся, що множиною її розв'язків є відрізок. При яких значеннях a множиною розв'язків данної нерівності є відрізок довжиною $\dfrac{9}{5}$?

23. При яких значення параметра a множина розв'язків нерівності $a+\sqrt{x^2+ax}\geqslant x$ не перетинається з проміжком $[-1;\,0]$?

24. При яких значення параметра a у множині розв'язків нерівності $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ міститься проміжок $\left[\dfrac{1}{4};\,1\right]$?

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Поняття *степеня* виникло в давнину. Збереглися глиняні плитки древніх вавилонян (близько 1700 р. до н. е.), які містять записи таблиць квадратів і кубів та їх обернених значень. До множення рівних множників приводить розв'язування багатьох задач. Вираз *квадрат числа* виник внаслідок обчислення площі квадрата, а *куб числа* — внаслідок знаходження об'єму куба. Але сучасні позначення (типу a^4, a^5) введені в XVII ст. Р. Декартом (1596—1650).

Дробові показники степеня і найпростіші правила дій над степенями з дробовими показниками зустрічаються в XIV ст. у французького математика Н. Орема (бл. 1323—1382). Відомо, що Н. Шюке (бл. 1445—бл. 1500) розглядав степені з від'ємними і нульовим показниками.

С. Стевін запропонував розуміти під $a^{\frac{1}{n}}$ корінь $\sqrt[n]{a}$. Але систематично дробові і від'ємні показники першим став застосовувати Ньютон.

Німецький математик М. Штіфель (1487—1567) дав позначення $a^0=1$, якщо $a\neq 1$, і ввів назву *показник* (це переклад з німецької Exponent). Німецьке potenzieren означає *піднести до степеня.* (Звідси походить і слово *потенціювати,* яке буде застосовуватися в наступному розділі для позначення переходів від так званих логарифмів (log) виразів $f(x)$ і $g(x)$ до відповідних степенів, тобто від рівності $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ до рівності $a^{\log_a f(x)}=a^{\log_a g(x)}$. У свою чергу, термін exponenten виник внаслідок не зовсім точного перекладу з грецької слова, яким Діофант Александрійський (близько III ст.) позначав квадрат невідомої величини.

Терміни *радикал* і *корінь,* уведені в XII ст., походять від латинського radix, що має два значення: *сторона і корінь.* Грецькі математики замість «добути корінь» казали «знайти сторону квадрата за його даною величиною (площею)». Знак кореня у вигляді символу $\surd$ з'явився вперше в 1525 р. Сучасний символ введений Декартом, який додав горизонтальну риску. І. Ньютон (1643—1727) вже позначав показники коренів: $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$.

Термін *логарифм* походить від сполучення грецьких слів «логос» (у значенні «відношення») і «аритмос» (число) і перекладається як *відношення чисел.* Вибір винахідником логарифмів Дж. Непером такої назви (1594 р.) пояснюється тим, що логарифми виникли внаслідок зіставлення двох чисел, одне з яких є членом арифметичної прогресії, а друге — геометричної. Логарифми з основою e увів Спейдел (1619 р.), який склав перші таблиці для функції $\ln x$. Назву *натуральний* (природний) для цього логарифма запропонував Н. Меркатор (1620—1687), який виявив, що $\ln x$ — це площа під гіперболою $y=\frac{1}{x}$.

Розділ 4
Показникова і логарифмічна функції

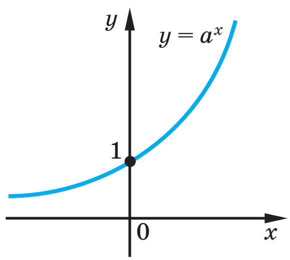
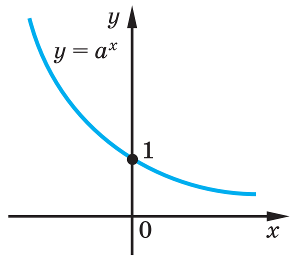
§29 ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Таблиця 49

1. Поняття показникової функції та її графік

Означення. ***Показниковою функцією* називається функція виду $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$.**

Графік показникової функції (*експонента*)

$a > 1$	$0 < a < 1$
	

2. Властивості показникової функції

1. *Область визначення:* $x \in \boldsymbol{R}$. $\boxed{D(a^x) = \boldsymbol{R}}$
2. *Область значень:* $y > 0$. $\boxed{E(a^x) = (0; +\infty)}$
3. *Функція* ***ні парна, ні непарна.***
4. *Точки перетину з осями координат:*

з віссю Oy $\boxed{\begin{cases} x = 0, \\ y = 1 \end{cases}}$ з віссю Ox $\boxed{\text{немає}}$

5. *Проміжки зростання і спадання:*

$a > 1$	$0 < a < 1$
функція $y = a^x$ при $a > 1$ зростає на всій області визначення	**функція $y = a^x$ при $0 < a < 1$ спадає на всій області визначення**

Продовж. табл. 49

6. *Проміжки знакосталості:* $\boxed{y > 0 \text{ при всіх значеннях } x \in \boldsymbol{R}}$.

7. $\boxed{\textit{Найбільшого і найменшого значень} \text{ функція не має}}$.

8. *Для будь-яких дійсних значень* u і v $(a > 0, b > 0)$ *виконуються рівності:*

$$a^u \cdot a^v = a^{u+v} \qquad \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \qquad (a^u)^v = a^{uv}$$

$$(ab)^u = a^u b^u \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття показникової функції та її графік. *Показниковою функцією називається функція виду* $y = a^x$, *де* $a > 0$ *і* $a \neq 1$.

Наприклад, $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$, $y = \pi^x$ — показникові функції.

Зазначимо, що функція виду $y = a^x$ існує й при $a = 1$.

Тоді $y = a^x = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх значеннях $x \in \boldsymbol{R}$. Але в цьому випадку функція $y = 1^x$ не називається показниковою. (Графік функції $y = 1^x$ — пряма, зображена на рисунку 118.)

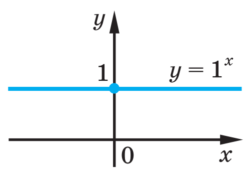


Рис. 118

Оскільки при $a > 0$ вираз a^x означений при всіх дійсних значеннях x, то *областю визначення показникової функції* $y = a^x$ *є всі дійсні числа*.

Спробуємо спочатку побудувати графіки деяких показникових функцій, наприклад, $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ «за точками», а потім перейдемо до характеристики загальних властивостей показникової функції.

Складемо таблицю деяких значень функції $y = 2^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	1	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	2	4	8

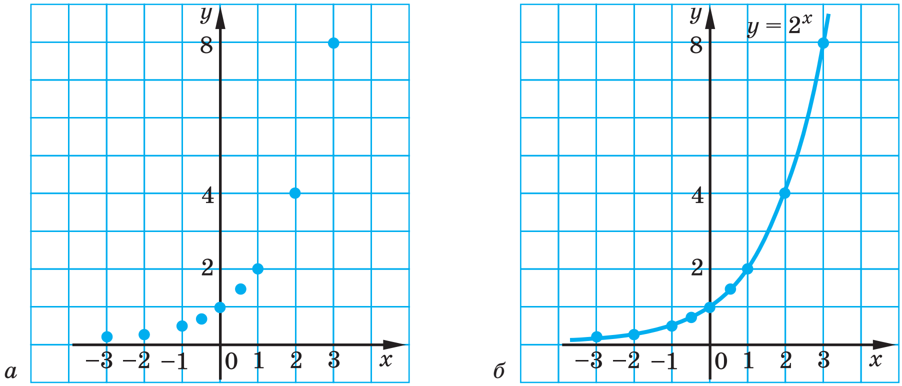


Рис. 119

Побудуємо на координатній площині відповідні точки (рис. 119, *а*) і з'єднаємо ці точки плавною лінією, яку природно вважати графіком функції $y = 2^x$ (рис. 119, *б*).

Як бачимо з графіка, функція $y = 2^x$ є зростаючою функцією, яка набуває всіх значень із проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно складемо таблицю деяких значень функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	$\sqrt{2} \approx 1{,}4$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Побудуємо на координатній площині відповідні точки (рис. 120, *а*) і з'єднаємо ці точки плавною лінією, яку природно вважати графіком функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

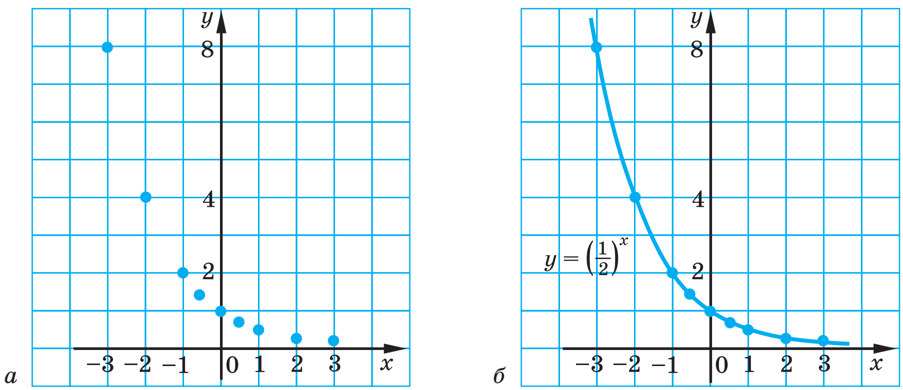


Рис. 120

(рис. 120, *б*). Як бачимо з графіка, функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ є спадною функцією, яка набуває всіх значень із проміжку $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ можна одержати з графіка функції $y = f(x) = 2^x$ за допомогою геометричних перетворень. Дійсно, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{2^x}=$ $=2^{-x}=f(-x)$. Отже, графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ симетричний графіку функції $y = 2^x$ відносно осі Oy (табл. 4, с. 28), і тому, якщо функція $y = 2^x$ є зростаючою, функція $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ обов'язково буде спадною.

Виявляється, завжди при $a > 1$ графік функції $y = a^x$ схожий на графік функції $y = 2^x$, а при $0 < a < 1$ — на графік функції $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ (рис. 121).

Графік показникової функції називається *експонентою*.

2. Властивості показникової функції. Як обґрунтовувалося вище, *областю визначення показникової* функції $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ *є всі дійсні числа*: $D(a^x) = \boldsymbol{R}$.

Областю значень функції $y = a^x$ є множина всіх додатних чисел, тобто *функція* $y = a^x$ *набуває тільки додатних значень*, причому будь-яке додатне число є значенням функції, тобто

$$E(a^x) = (0; +\infty).$$

Це означає, що графік показникової функції $y = a^x$ завжди розміщений вище осі Ox і будь-яка пряма, що паралельна осі Ox і знаходиться вище неї, перетинає цей графік.

При $a > 1$ функція $y = a^x$ зростає на всій області визначення, а при $0 < a < 1$ функція $y = a^x$ спадає на всій області визначення.

Обґрунтування області значень та проміжків зростання і спадання показникової функції проводиться так: ці властивості перевіряються послідовно для натуральних, цілих, раціональних показників, а потім уже переносяться на довільні дійсні показники. Але слід враховувати, що при введенні поняття степеня з ірраціональним показником ми вже користувалися зростан-

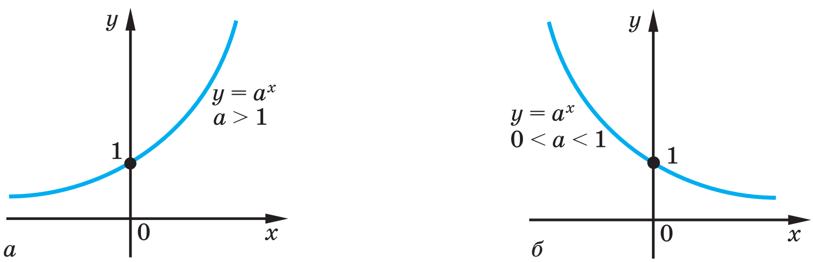


Рис. 121

ням функції , коли проводили такі міркування: оскільки $1,7<\sqrt{3}<1,8$, то $2^{1,7}<2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}$. Отже, у нашій системі викладу матеріалу ми зможемо обґрунтувати ці властивості тільки для раціональних показників, але, враховуючи громіздкість таких обґрунтувань, приймемо їх без доведення.

Усі інші властивості показникової функції легко обґрунтовуються за допомогою цих властивостей.

Функція $y=a^x$ не є ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}\neq f(x)=a^x$ (за означенням $a\neq 1$). Також $f(-x)\neq -f(x)$, оскільки $f(-x)=a^{-x}>0$ (за властивістю 1), а $-f(x)=-a^x<0$.

Точки перетину з осями координат. **Графік функції $y=a^x$ перетинає вісь Oy у точці $y=1$.** Дійсно, на осі Oy значення $x=0$, тоді $y=a^0=1$.

Графік показникової функції $y=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$) не перетинає вісь Ox, оскільки на осі Ox $y=0$, але значення $y=0$ не входить до області значень показникової функції $y=a^x$ ($y=a^x=0$ тільки при $a=0$, але за означенням $a>0$).

Проміжки знакосталості. $y>0$ при всіх дійсних значеннях x, оскільки $y=a^x>0$ при $a>0$.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції. Оскільки графік функції $y=a^x$ перетинає вісь Oy у точці $y=1$, то, враховуючи зростання функції при $a>1$ та спадання при $0<a<1$, одержуємо такі співвідношення між значеннями функції і відповідними значеннями аргументу:

Значення функції	Значення аргументу	
$y>1$	при $a>1$	при $0<a<1$
	$x\in(0;+\infty)$	$x\in(-\infty;0)$
$0<y<1$	$x\in(-\infty;0)$	$x\in(0;+\infty)$

Функція $y=a^x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень, оскільки її область значень — проміжок $(0;+\infty)$, який не містить ні найменшого, ні найбільшого числа.

Властивості показникової функції, вказані в пункті 8 таблиці 49:

$$a^u\cdot a^v=a^{u+v};\quad \frac{a^u}{a^v}=a^{u-v};\quad (a^u)^v=a^{uv};\quad (ab)^u=a^ub^u;\quad \left(\frac{a}{b}\right)^u=\frac{a^u}{b^u}.$$

було обґрунтовано в розділі 3.

Зазначимо ще одну властивість показникової функції, яка виділяє її з ряду інших функцій: *якщо $f(x)=a^x$ ($a>0$, $a\neq 1$), то при будь-яких дійсних значеннях аргументів x_1 і x_2 виконується рівність*

$$\boxed{f(x_1)\cdot f(x_2)=f(x_1+x_2)}\ .$$

Дійсно, $f(x_1)\cdot f(x_2)=a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}=$ $=f(x_1+x_2)$. У курсах вищої математики ця властивість (разом із строгою монотонністю) є основою аксіоматичного означення показникової функції. У цьому випадку дається означення, що *показникова функція* $y=f(x)$ *— це строго монотонна функція, визначена на всій числовій осі, яка задовольняє функціональному рівнянню* $f(x_1)\cdot f(x_2)=$ $=f(x_1+x_2)$, а потім обґрунтовується, що функція $f(x)$ збігається з функцією $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

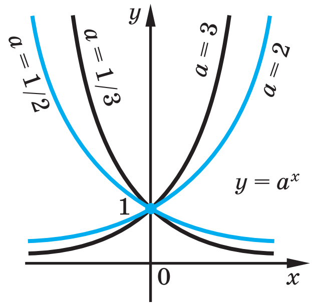


Рис. 122

Крім загальних властивостей показникової функції при $a>1$ і при $0<a<1$, відзначимо деякі особливості поведінки графіків показникових функцій при конкретних значеннях a. Так, на рисунку 122 наведено графіки показникових функцій $y=a^x$ при значеннях основи $a=2;\ 3;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}$.

Порівнюючи ці графіки, можна зробити висновок: *чим більша основа* $a>1$, *тим крутіше піднімається графік функції* $y=a^x$ *при русі точки вправо і тим швидше графік наближається до осі Ox при русі точки вліво. Аналогічно, чим менша основа* $0<a<1$, *тим крутіше піднімається графік функції* $y=a^x$ *при русі точки вліво і тим швидше графік наближається до осі Ox при русі точки вправо.*

Завершуючи розмову про показникову функцію, укажемо на ті причини, які заважають розглядати показникові функції з від'ємною чи нульовою основою.

Зауважимо, що вираз a^x можна розглядати і при $a=0$ і при $a<0$. Але в цих випадках він уже буде означений не при всіх дійсних значеннях x, як показникова функція $y=a^x$. Зокрема, вираз 0^x означений при всіх $x>0$ (і тоді $0^x=0$), а вираз $(-2)^x$ — при всіх цілих значеннях x (наприклад, $\left((-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}=-\frac{1}{8}\right)$. З цієї причини й не беруть основу показникової функції $a=0$ (одержуємо постійну функцію при $x>0$) та $a<0$ (одержуємо функцію, означену тільки при досить «рідких» значеннях x: $x\in \boldsymbol{Z}$). Але наведені міркування стосовно доцільності вибору основи показникової функції не впливають на область допустимих значень виразу a^x (наприклад, як ми бачили вище, пара значень $a=-2$, $x=-3$ входить до його ОДЗ, і це доводиться враховувати при розв'язуванні деяких завдань).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Порівняйте значення виразів:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}$ і $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$.

Розв'язання

1) ▶ Функція $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x}$ є спадною $\left(\frac{2}{3}<1\right)$, тому з нерівності $-3>-5$ одержуємо $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$. ◁

2) ▶ Функція $y=\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{x}$ є зростаючою $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}>1\right)$, тому з нерівності $4>3$ одержуємо $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{4}>\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{3}$. ◁

Коментар

Врахуємо, що функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною. Отже, спочатку порівняємо задану основу a з одиницею, а потім, порівнюючи аргументи, зробимо висновок про співвідношення між заданими значеннями функції.

Приклад 2 Порівняйте з одиницею додатну основу a, якщо відомо, що виконується нерівність:

1) $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$; 2) $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$.

Розв'язання

1) ▶ Оскільки $\sqrt{5}<\sqrt{11}$ і за умовою $a^{\sqrt{5}}>a^{\sqrt{11}}$, то функція a^x є спадною, отже, $0<a<1$. ◁

2) ▶ Оскільки $-\frac{1}{3}<-\frac{1}{5}$ і за умовою $a^{-\frac{1}{3}}<a^{-\frac{1}{5}}$, то функція a^x є зростаючою, отже, $a>1$. ◁

Коментар

У кожному завданні задані вирази — це два значення функції a^x.

Проаналізуємо, яке значення функції відповідає більшому значенню аргументу (для цього спочатку порівняємо аргументи).

Якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, то функція a^x є зростаючою і $a > 1$; якщо відповідає менше значення функції, то функція a^x є спадною і тоді $0 < a < 1$.

Приклад 3 Побудуйте графік функції:
1) $y = 1{,}7^x$; 2) $y = 0{,}3^x$.

Коментар

При $a > 0$ значення $a^x > 0$, отже, графік функції $y = a^x$ завжди розміщений вище осі Ox. Цей графік перетинає вісь Oy в точці $y = 1$ ($a^0 = 1$).

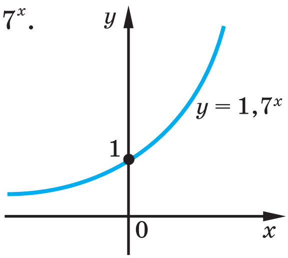
При $a > 1$ показникова функція ($y = 1{,}7^x$) зростає, отже, її графіком буде крива (експонента), точки якої при збільшенні аргументу піднімаються вгору.

При $0 < a < 1$ показникова функція ($y = 0{,}3^x$) спадає, отже, графіком функції $y = a^x$ буде крива, точки якої при збільшенні аргументу опускаються вниз. (Нагадаємо, що, опускаючись вниз, графік наближається до осі Ox, але ніколи її не перетинає.)

Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

Розв'язання

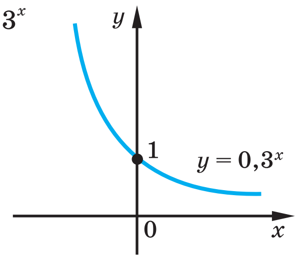
1) ▶ $y = 1{,}7^x$.



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{17}$	1	$1{,}7$	$2{,}89$

◁

2) ▶ $y = 0{,}3^x$



x	-1	0	1	2
y	$\frac{10}{3}$	1	$0{,}3$	$0{,}09$

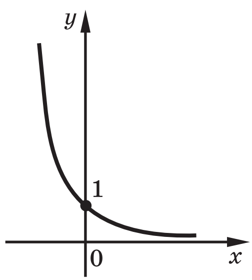
◁

Приклад 4* Зобразіть схематично графік функції $y = \left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 3\right|$.

Розв'язання

▶ Послідовно будуємо графіки:

1. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

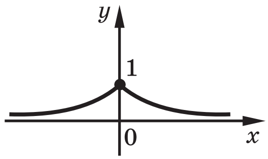


Коментар

Складемо план побудови графіка заданої функції за допомогою послідовних геометричних перетворень (табл. 4 на с. 28).

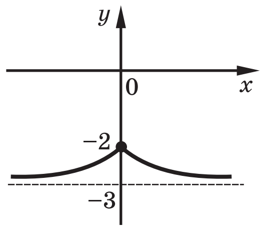
1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ (основа $a = \frac{1}{3} < 1$ — показникова функція спадає).

2. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$;



2. Потім можна побудувати графік функції $y=g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}=f(|x|)$: праворуч від осі Oy (і на самій осі) графік функції $y=f(x)$ залишається без зміни, і саме ця частина графіка — симетрія відносно осі Oy.

3. $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3$;

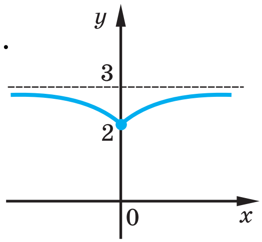


3. Після цього можна побудувати графік функції

$$y=\varphi(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3=g(x)-3:$$

паралельно перенести графік $g(x)$ уздовж осі Oy на (-3) одиниці.

4. $y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|$.



4. Потім можна побудувати графік заданої функції

$$y=\left|\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}-3\right|=|\varphi(x)|:$$

вище осі Ox (і на самій осі) графік функції $y=\varphi(x)$ повинен залишитися без зміни, але таких точок у графіка функції $y=\varphi(x)$ немає, а нижче осі Ox — симетрія відносно осі Ox (тобто весь графік функції $y=\varphi(x)$ потрібно відобразити симетрично відносно осі Ox). ◁

Запитання для контролю

1. Дайте означення показникової функції.
2. Побудуйте графіки показникової функції $y=a^x$ при $a>1$ та при $0<a<1$ (виберіть конкретні значення a). Через яку точку проходять графіки всіх показникових функцій?
3. Користуючись графіком показникової функції $y=a^x$ (при $a>1$ та при $0<a<1$), охарактеризуйте її властивості.

4*. Обґрунтуйте властивості функції $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$.

5. Використовуючи зростання чи спадання відповідної показникової функції, порівняйте значення: а) 7^5 та 7^9; б) $0{,}7^5$ та $0{,}7^9$.

Вправи

1. Укажіть, які із заданих функцій зростають, а які спадають:

1°) $y=4^x$; 2°) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$; 3°) $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$; 4°) $y=\pi^x$; 5) $y=\left(\sqrt{5}-2\right)^x$;

6*) $y=\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}\right)^{x}$; 7*) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-x}$; 8*) $y=2^{-x}$; 9*) $y=-5^{x}$.

2°. Побудуйте графік функції:

1) $y=3^{x}$; 2) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}$; 3) $y=0{,}2^{x}$; 4) $y=2{,}5^{x}$; 5) $y=0{,}7^{x}$.

3. Знаючи, що $a>b>1$, зобразіть схематично в одній системі координат графіки функцій $y=a^{x}$ і $y=b^{x}$.

4. Знайдіть область значень функції:

1) $y=3^{x}+1$; 2) $y=-5^{x}$; 3) $y=7^{x}-2$; 4) $y=-\left(\dfrac{1}{6}\right)^{x}$.

5. Побудуйте графік функції:

1°) $y=-3^{x}$; 2) $y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x}+3$; 3*) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{|x|}$; 4*) $y=5^{|x|}$; 5*) $y=\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}-1\right|$.

6. Порівняйте значення виразів:

1°) $3^{1,5}$ та $3^{1,4}$; 2°) $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{1,3}$ та $\left(\dfrac{2}{7}\right)^{1,8}$; 3°) $0{,}78^{-0,7}$ та $0{,}78^{-0,6}$;

4) $(\sqrt{2})^{-3}$ та $(\sqrt{2})^{-5}$; 5) $0{,}5^{\sqrt{3}}$ та $0{,}5^{\sqrt{7}}$; 6) $2^{\sqrt{2}}$ та $2^{\sqrt{3}}$;

7) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{8}$ та $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{9}$; 8) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{6}$ та $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 9) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-4}$ та $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{5}$;

10) $0{,}2^{-10}$ та 5^{11}.

7. Порівняйте показники m і n, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $3{,}2^{m}<3{,}2^{n}$; 2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{m}>\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n}$; 3) $\left(\dfrac{7}{6}\right)^{m}>\left(\dfrac{7}{6}\right)^{n}$; 4) $0{,}99^{m}<0{,}99^{n}$;

5) $(\sqrt{2})^{m}>(\sqrt{2})^{n}$; 6) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{m}<\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}$; 7) $(\sqrt{5}-1)^{m}<(\sqrt{5}-1)^{n}$;

8) $(\sqrt{2}-1)^{m}<(\sqrt{2}-1)^{n}$.

8. Порівняйте з одиницею додатну основу a, якщо відомо, що є правильною нерівність:

1) $a^{100}>a^{99}$; 2) $a^{0,2}<a^{\frac{1}{3}}$; 3) $a^{\sqrt{3}}<a^{\sqrt{7}}$;

4) $a^{\sqrt{17}}>a^{4}$; 5) $a^{-\frac{1}{17}}<a^{-\frac{1}{8}}$; 6) $a^{-0,25}>a^{-\sqrt{3}}$.

9. Порівняйте з одиницею значення виразу:

1) $0{,}01^{1,2}$; 2) $0{,}99^{100}$; 3) $\left(\dfrac{13}{12}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\left(\dfrac{30}{31}\right)^{-\frac{1}{5}}$;

5) $0{,}007^{0}$; 6) $100^{-0,01}$; 7) $3^{-\sqrt{2}}$; 8) $\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\sqrt{3}}$.

10. Який висновок можна зробити про знак числа x, якщо:

1) $3^x = 0{,}6$; 2) $\left(\frac{1}{6}\right)^x = 10$; 3) $10^x = 4$; 4) $0{,}3^x = 0{,}1$?

11. Розташуйте числа в порядку їх зростання:

1) $2^{\frac{1}{3}},\ 2^{-1{,}5},\ 2^{\sqrt{2}},\ \ 2^{-\sqrt{2}},\ 2^{1{,}4},\ 1$;

2) $0{,}3^9,\ 1,\ 0{,}3^{-\sqrt{5}},\ 0{,}3^{\frac{1}{2}},\ 0{,}3^{-9},\ 0{,}3^{\frac{1}{3}}$.

12*. Відомо, що коли при радіоактивному розпаді кількість речовини за добу зменшується вдвічі, то через x діб від маси M_0 залишається маса M, яка обчислюється за формулою: $M = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Звідси $\frac{M}{M_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Покажіть графічно, як із зміною x змінюється відношення $\frac{M}{M_0}$.

Використовуючи у випадку необхідності побудований графік, дайте відповіді (точні або наближені) на запитання:

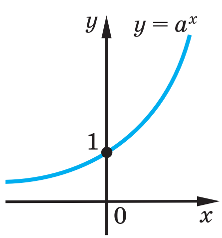
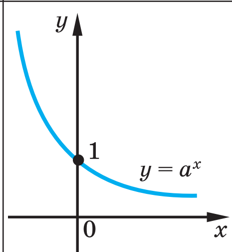
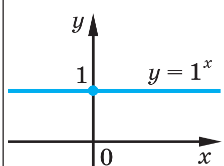
а) У скільки разів зменшиться маса радіоактивної речовини через 1,5 доби, 2,5 доби, 3 доби, 4 доби?

б) Скільки часу повинно минути, щоб початкова маса радіоактивної речовини зменшилася в 2,5 раза, у 3 рази, у 4 рази?

§30 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

30.1. НАЙПРОСТІШІ ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ

Таблиця 50

1. Основні формули та співвідношення			
$a^u \cdot a^v = a^{u+v}$ $(ab)^u = a^u \cdot b^u$ $\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^u = \frac{a^u}{b^u}$ $(a^u)^v = a^{uv}$ $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	Графік функції $y = a^x$ $(a > 0)$		
	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a = 1$
	 зростає	 спадає	 стала

Продовж. табл. 50

2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових рівнянь		
Орієнтир	Приклад	
При $a > 0$ і $a \neq 1$ $\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}$	$3^{2x+4} = 9.$ ▶ $3^{2x+4} = 3^2,$ $2x + 4 = 2,$ $x = -1.$ *Відповідь:* -1. ◁	$6^{x+3} = -36.$ ▶ Коренів немає (оскільки $6^t > 0$ для всіх t). *Відповідь:* коренів немає. ◁

3. Зведення деяких показникових рівнянь до найпростіших	
Орієнтир	Приклад
1) *Якщо в лівій і правій частинах показникового рівняння стоять тільки добутки, частки, корені або степені, то доцільно за допомогою основних формул спробувати записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.*	$2^{x-3} \cdot 4^x = \frac{\sqrt{2}}{16^x}.$ ▶ $2^{x-3} \cdot 2^{2x} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{4x}},$ $2^{3x-3} = 2^{\frac{1}{2} - 4x},$ $3x - 3 = \frac{1}{2} - 4x,$ $x = \frac{1}{2}.$ *Відповідь:* $\frac{1}{2}$. ◁
2) *Якщо в одній частині показникового рівняння стоїть число, а в іншій всі члени містять вираз виду a^{kx} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами), то зручно в цій частині рівняння винести за дужки найменший степінь a.*	$5^x - 2 \cdot 5^{x-2} = 23.$ ▶ $5^{x-2}(5^2 - 2) = 23,$ $5^{x-2} \cdot 23 = 23,$ $5^{x-2} = 1,$ $5^{x-2} = 5^0,$ $x - 2 = 0,$ $x = 2.$ *Відповідь:* 2. ◁

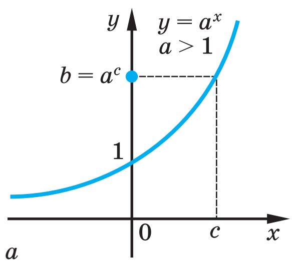


Рис. 123

Пояснення й обґрунтування

Показниковими звичайно називають рівняння, у яких змінна входить у показник степеня (а основа цього степеня не містить змінної).

Розглянемо найпростіше показникове рівняння

$$a^x = b, \qquad (1)$$

де $a > 0$ і $a \neq 1$. Оскільки при цих значеннях a функція $y = a^x$ строго монотонна (зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$), то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу. Це означає, що **рівняння $a^x = b$ при $b > 0$ має єдиний корінь.** Щоб його знайти, досить подати b у вигляді $b = a^c$.

Очевидно, що $x = c$ є коренем рівняння $a^x = a^c$.

Графічно це проілюстровано на рисунку 123.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $7^x = 49$, досить подати це рівняння у вигляді $7^x = 7^2$ і записати його єдиний корінь $x = 2$.

Якщо $b \leqslant 0$, то рівняння $a^x = b$ (при $a > 0$) коренів не має, оскільки a^x завжди більше нуля. (На графіках, наведених на рисунку 124, пряма $y = b$ не перетинає графік функції $y = a^x$ при $b \leqslant 0$.)

Наприклад, рівняння $7^x = -7$ не має коренів.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових рівнянь, відзначимо, що **при $a > 0$ і $a \neq 1$ рівняння**

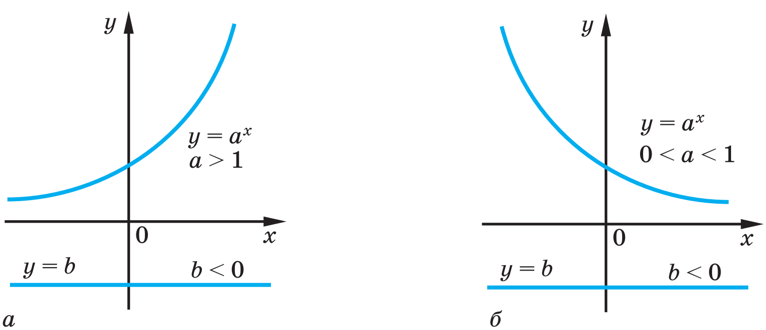


Рис. 124

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (2)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (3)$$

Коротко це твердження можна записати так: **при $a > 0$ і $a \neq 1$**

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)}.$$

Щоб обґрунтувати цю рівносильність, досить помітити, що рівності (2) і (3) можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ є строго монотонною і кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу t (тобто з рівності степенів (2) обов’язково випливає рівність показників (3)). Отже, усі корені рівняння (2) (які перетворюють це рівняння на правильну рівність) будуть і коренями рівняння (3), та навпаки, усі корені рівняння (3) будуть коренями рівняння (2). А це й означає, що рівняння (2) і (3) рівносильні.

У найпростіших випадках при розв’язуванні показникових рівнянь намагаються за допомогою основних формул дій над степенями (див. таблицю 46) звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для розв’язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують заміну змінних (застосування цього методу розглянуто в таблиці 51, с. 344) або властивості відповідних функцій (застосування цих методів розглянуто в таблиці 58, с. 403).

Зауважимо, що всі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цього рівняння). Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень (ОДЗ) є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ явно не знаходять і не записують до розв’язання рівняння (див. нижче приклади 1–3). Але якщо в процесі розв’язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то в цьому випадку доводиться згадувати про ОДЗ (приклад 4* на с. 343).

Приклади розв’язання завдань

Приклад 1 Розв’яжіть рівняння:

1) $4^x = 64$; 2) $5^x = -1$; 3) $12^{x^2-4} = 1$.

Розв’язання

1) ▶ $4^x = 64$, $4^x = 4^3$, $x = 3$; ◁

2) ▶ $5^x = -1$ — коренів немає, оскільки $5^x > 0$ завжди; ◁

3) ▶ $12^{x^2-4} = 1$, $12^{x^2-4} = 12^0$, $x^2 - 4 = 0$; $x = \pm 2$. ◁

Коментар

При $a > 0$ завжди $a^x > 0$, тому рівняння $5^x = -1$ не має коренів.

Інші рівняння зведемо до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) і перейдемо до рівносильного рівняння

$$f(x) = g(x).$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot(0{,}04)^{x-2}$;   2) $2^x\cdot3^x=\left(\frac{1}{6}\right)^{2x-3}$.

Розв'язання

1) ▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\frac{(5^{-1})^{x-0{,}5}}{5^{\frac{1}{2}}}=5\cdot(5^{-2})^{x-2},$$

$$\frac{5^{-x+0{,}5}}{5^{\frac{1}{2}}}=5^1\cdot5^{-2x+4},$$

$$5^{-x+0{,}5-\frac{1}{2}}=5^{1+(-2x+4)},$$

$$5^{-x}=5^{5-2x},$$

$$-x=5-2x,$$

$$x=5.$$

Відповідь: 5. ◁

2) ▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$(2\cdot3)^x=(6^{-1})^{2x-3},$$

$$6^x=6^{-2x+3},$$

$$x=-2x+3,$$

$$x=1.$$

Відповідь: 1. ◁

Коментар

У лівій і правій частинах заданих рівнянь стоять тільки добутки, частки, корені або степені. У цьому випадку для зведення рівняння до виду $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ спробуємо використати основні формули дій над степенями, щоб записати обидві частини рівняння як степені з однією основою.

У рівнянні 1 слід звернути увагу на те, що $0{,}2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=5^{-1}$, а $0{,}04=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}=5^{-2}$ і $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$, отже, ліву і праву частини цього рівняння можна записати як степені числа 5.

Для перетворення рівняння 2 згадаємо, що всі формули можна використовувати як зліва направо, так і справа наліво, наприклад, для лівої частини цього рівняння скористаємося формулою $a^u\cdot b^u=(ab)^u$, тобто $2^x\cdot3^x=(2\cdot3)^x=6^x$.

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $3^{2x+2}+5\cdot3^{2x-2}=86$.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$3^{2x-2}(3^4+5)=86,$$

$$3^{2x-2}\cdot86=86,$$

$$3^{2x-2}=1,$$

$$3^{2x-2}=3^0,$$

$$2x-2=0,$$

$$x=1.$$

Відповідь: 1. ◁

Коментар

У лівій частині рівняння всі члени містять вирази виду 3^{2x} (показники степенів відрізняються тільки вільними членами). У цьому випадку зручно винести за дужки в лівій частині рівняння найменший степінь числа 3, тобто 3^{2x-2}.

Приклад 4* Розв'яжіть рівняння $(1+b^2)^{\sqrt{x}}=(1+b^2)^{4-\sqrt{x}}$.

Розв'язання

ОДЗ: $x \geqslant 0$, $b \in \boldsymbol{R}$.

Розглянемо два випадки.

1) При $b = 0$ одержуємо рівняння $1^{\sqrt{x}}=1^{4-\sqrt{x}}$, корені якого — усі дійсні числа з ОДЗ, тобто $x \geqslant 0$.

2) При $b \neq 0$ значення $1+b^2 \neq 1$, і тоді задане рівняння рівносильне рівнянню

$$\sqrt{x}=4-\sqrt{x}.$$

Звідси $\sqrt{x}=2$, тоді $x=4$.

Відповідь: 1) при $b=0$ $x \in [0;+\infty)$;
2) при $b \neq 0$ $x=4$. ◁

Коментар

Це рівняння відносно змінної x, яке містить параметр b. Аналізуючи основу степенів у цьому рівнянні, робимо висновок, що при будь-яких значеннях b основа $1 + b^2 \geqslant 1$. Функція $y = a^x$ при $a > 1$ є зростаючою, а при $a = 1$ — постійною (див. графіки функції $y = a^x$ у таблиці 50).

Основа $1 + b^2 = 1$ при $b = 0$, а при всіх інших значеннях b основа

$$1 + b^2 > 1.$$

Розглянемо кожен із цих випадків окремо, тобто: $b = 0$ і $b \neq 0$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, у яких випадках показникове рівняння $a^x = b$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) має корені. У яких випадках це рівняння не має коренів? Наведіть приклади. Проілюструйте ці приклади графічно.
2. Якому рівнянню рівносильне показникове рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ при $a > 0$ і $a \neq 1$? Наведіть приклади.
3*. Чи зміниться відповідь на запитання 2, якщо для основи степенів буде задано тільки одне обмеження $a > 0$?

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–5)**.

1. 1°) $4^x = 8$; 2°) $3^x = 9^{x+1}$; 3°) $5^{3x-1} = 0{,}2$; 4°) $7^{1-4x} = 1$; 5°) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x} = \sqrt[4]{2}$;
6°) $3^{x^2-4x} = 9$; 7) $4^x = 2^{6+x-x^2}$; 8) $2^{2^x} = 2$; 9°) $2^x = 4$; 10°) $2^x = 16$;
11°) $3^x = -1$; 12°) $2^x = 32$; 13°) $3^x = 0$; 14°) $5^x = 1$; 15) $3^x - 3 = 0$;
16) $3^{2x} = 81$; 17°) $2^{3x} = 8$; 18) $3^{x^2-5x+8} = 9$; 19) $7^x = 7^{2-x}$; 20) $25^x = 5^{3-x}$;
21*) $2^x \cdot 3^{x+1} = 108$; 22*) $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^x = \frac{3}{8}$; 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{10}{15}\right)^x = \frac{2}{5}$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$.

3. 1) $2^{x^2}=\frac{16^2}{4^x}$; 2) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2x^2}{3}}=4^{-x}\cdot 8^{-4}$; 3) $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$;

4) $\frac{3^{x^2}}{27}=9^x$; 5) $2^{x(x+2)-\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}\cdot 4^x$.

4. 1°) $7^{x+2}+4\cdot 7^{x+1}=539$; 2°) $2\cdot 3^{x+1}-3^x=15$; 3°) $4^{x+1}+4^x=320$;

4°) $3\cdot 5^{x+3}+2\cdot 5^{x+1}=77$; 5°) $3^{x+2}-2\cdot 3^{x-2}=79$; 6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}-\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=4{,}8$;

7) $5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}=162$; 8) $5\cdot 9^x+9^{x-2}=406$.

5*. 1) $\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{2x-3}=\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^{x+5}$; 2) $(1+|a|)^x=(1+|a|)^{2-x}$;

3) $(1+\sqrt{a})^{\frac{1}{x}}=(1+\sqrt{a})^{6-\frac{2}{x}}$.

30.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ПОКАЗНИКОВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ СИСТЕМ

Таблиця 51

<table>
<tr><th colspan="2">Схема пошуку плану розв'язування показникових рівнянь</th></tr>
<tr><th>Орієнтир</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>1. Позбавляємося числових доданків у показниках степенів (використовуючи справа наліво основні формули дій над степенями, наведені в таблиці 50).
2. Якщо можливо, зводимо всі степені (із змінною в показнику) до однієї основи і виконуємо заміну змінної.</td><td>$4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0.$
▶ $4^x\cdot 4^1-3\cdot 2^x-10=0.$
Враховуючи, що $4^x=2^{2x}$, зводимо до однієї основи 2:
$4\cdot 2^{2x}-3\cdot 2^x-10=0.$
Заміна $2^x=t$ дає рівняння
$4t^2-3t-10=0$, $t_1=2$, $t_2=-\frac{5}{4}$.
Обернена заміна дає $2^x=2$, тоді $x=1$
або $2^x=-\frac{5}{4}$ — коренів немає.
Відповідь: 1. ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 51

3. Якщо не можна звести до однієї основи, то пробуємо звести всі степені **до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння** *(яке розв'язується діленням обох частин рівняння на найбільший степінь одного з видів змінних)*.	$4^x + 3 \cdot 6^x - 4 \cdot 9^x = 0.$ ▶ Зведемо всі степені до двох основ 2 і 3: $2^{2x} + 3 \cdot 2^x \cdot 3^x - 4 \cdot 3^{2x} = 0.$ Маємо однорідне рівняння (у всіх членів однаковий сумарний степінь — $2x$). Для його розв'язування поділимо обидві частини на $3^{2x} \neq 0$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0.$ *Заміна* $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ дає рівняння $t^2 + 3t - 4 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -4$. Обернена заміна дає $\left(\frac{2}{3}\right)^x = -4$ — коренів немає або $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$, тоді $x = 0$. *Відповідь:* 0. ◁
4. В інших випадках **переносимо всі члени рівняння в один бік і пробуємо розкласти одержаний вираз на множники або** застосовуємо спеціальні прийоми розв'язування, в яких **використовуються властивості відповідних функцій.**	$6^x - 9 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x + 18 = 0.$ ▶ Якщо попарно згрупувати члени в лівій частині рівняння і в кожній парі винести за дужки спільний множник, то одержуємо $2^x(3^x - 9) - 2(3^x - 9) = 0.$ Тепер можна винести за дужки спільний множник $3^x - 9$: $(3^x - 9) \cdot (2^x - 2) = 0.$ Тоді $3^x - 9 = 0$ або $2^x - 2 = 0$. Одержуємо два рівняння: 1) $3^x = 9$, тоді $x = 2$; 2) $2^x = 2$, тоді $x = 1$. *Відповідь:* 2; 1. ◁

Пояснення й обґрунтування

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь (порівняно з тими, які було розглянуто в попередньому пункті 30.1) найчастіше використовують заміну змінних. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування *позбутися числових доданків у показниках степенів,* використовуючи формули: $a^{u+v}=a^u\cdot a^v$; $a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$. Наприклад, у рівнянні

$$4^{x+1}-3\cdot 2^x-10=0 \qquad (1)$$

замість 4^{x+1} записуємо добуток $4^x\cdot 4^1$ і одержуємо рівняння

$$4^x\cdot 4-3\cdot 2^x-10=0, \qquad (2)$$

рівносильне заданому.

Потім пробуємо *всі степені* (із змінною в показнику) *звести до однієї основи і виконати заміну змінної.* Наприклад, у рівнянні (2) степінь з основою 4 можна записати як степінь з основою 2: $4^x=\left(2^2\right)^x=2^{2x}$ і одержати рівняння

$$2^{2x}\cdot 4-3\cdot 2^x-10=0. \qquad (3)$$

Нагадаємо загальний орієнтир: **якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).** Звертаємо увагу на те, що $2^{2x}=\left(2^x\right)^2$. Отже, у рівняння (3) змінна фактично входить в одному вигляді — 2^x, тому в цьому рівнянні зручно ввести заміну $2^x=t$ і одержати квадратне рівняння

$$4t^2-3t-10=0, \qquad (4)$$

для якого знаходимо корені, а потім виконуємо обернену заміну (див. розв'язання в табл. 51).

Зазначимо, що як використання основних формул дій над степенями, так і використання заміни та оберненої заміни завжди приводить до рівняння, рівносильного даному на його ОДЗ (у рівнянні (1) — на множині всіх дійсних чисел) через те, що всі вказані перетворення ми можемо виконати і в прямому, і в зворотному напрямках. (Отже, ми завжди зможемо довести, що кожен корінь одного рівняння є коренем другого і навпаки, аналогічно тому, як було обґрунтовано рівносильний перехід для найпростіших показникових рівнянь на с. 341).

У тих випадках, коли всі степені (із змінною в показнику) у показниковому рівнянні, яке не зводиться безпосередньо до найпростішого, не вдається звести до однієї основи, слід *спробувати звести всі степені до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння.*

Наприклад, розглянемо рівняння

$$4^x+3\cdot 6^x-4\cdot 9^x=0. \qquad (5)$$

Усі степені в цьому рівнянні можна записати через основи 2 і 3, оскільки

$$4^x=(2^2)^x=2^{2x},\ 9^x=(3^2)^x=3^{2x},\ 6^x=(2\cdot 3)^x=2^x\cdot 3^x.$$

Одержуємо рівняння

$$2^{2x}+3\cdot 2^x\cdot 3^x-4\cdot 3^{2x}=0. \qquad (6)$$

Усі одночлени, які стоять у лівій частині цього рівняння, мають степінь $2x$ (степінь одночлена $2^x\cdot 3^x$ теж дорівнює $x+x=2x$).

Нагадаємо загальний орієнтир (розділ 2, с. 172):

> ***Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь*, то рівняння називається однорідним.***
> ***Розв’язується однорідне рівняння діленням обох його частин на найвищий степінь однієї із змінних.***

Отже, рівняння (6) є однорідним, і його можна розв’язати діленням обох частин або на 2^{2x}, або на 3^{2x}. Відзначимо, що при всіх значеннях x вирази 2^{2x} і 3^{2x} не дорівнюють нулю. Отже, при діленні на ці вирази не може відбутися втрата коренів (як це могло бути, наприклад, для однорідних тригонометричних рівнянь) і в результаті ділення обох частин рівняння на будь-який з цих виразів завжди одержуємо рівняння, рівносильне заданому. Наприклад, якщо розділити обидві частини рівняння (6) на $3^{2x} \neq 0$, одержуємо

$$\frac{2^{2x}}{3^{2x}}+\frac{3\cdot 2^x\cdot 3^x}{3^{2x}}-\frac{4\cdot 3^{2x}}{3^{2x}}=0 \text{ або після скорочення } \frac{2^{2x}}{3^{2x}}+3\cdot\frac{2^x}{3^x}-4=0.$$

В останньому рівнянні всі члени можна подати як степені з однією основою $\frac{2}{3}$: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}-4=0$ і виконати заміну $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$. Подальше розв’язання одержаного рівняння повністю аналогічне розв’язанню рівняння (2). Повне розв’язання цього рівняння наведене в таблиці 51.

Шукаючи план розв’язування показникового рівняння, потрібно враховувати, що при розв’язуванні деяких із них доцільно *перенести всі члени рівняння в один бік і спробувати розкласти* одержаний вираз *на множники*, наприклад, із використанням групування членів, як це зроблено в таблиці 51 для рівняння

$$6^x-9\cdot 2^x-2\cdot 3^x+18=0.$$

Для розв’язування деяких показникових рівнянь можна використовувати властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в § 35 розділу 4).

Приклади розв’язання завдань

Приклад 1 Розв’яжіть рівняння $\frac{6}{3^x}-\frac{4}{3^x+1}=1.$

Розв’язання	Коментар
▶ Заміна $3^x=t$. Одержуємо $$\frac{6}{t}-\frac{4}{t+1}=1.$$ Тоді $6(t+1)-4t=t(t+1)$, $t^2-t-6=0$. Звідси $t_1=-2$, $t_2=3$.	У задане рівняння змінна входить тільки в одному вигляді 3^x, і тому зручно ввести заміну $3^x=t$ і одержати дробове рівняння, для якого знаходимо корені, а потім виконуємо обернену заміну.

* Звичайно, якщо рівняння має вигляд $f=0$ (де f — многочлен), то йдеться тільки про степінь членів многочлена f, оскільки нуль-многочлен степеня не має.

Обернена заміна дає

$3^x = -2$ — коренів немає або

$3^x = 3$, тоді $x = 1$.

Відповідь: 1. ◁

Як уже відзначалося, заміна і обернена заміна — це рівносильні перетворення заданого рівняння, але при розв'язуванні одержаного дробового рівняння слід подбати про те, щоб не отримати сторонніх коренів (для цього, наприклад, досить врахувати, що $t = 3^x > 0$, і тому ОДЗ одержаного рівняння: $t \neq -1$ і $t \neq 0$ буде врахована автоматично).

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $25^{x+\frac{1}{2}} - 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$.

Розв'язання

▶ $25^x \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 10 \cdot \frac{5^x}{5^1} - 3 = 0$,

$5^{2x} \cdot 5 - 2 \cdot 5^x - 3 = 0$.

Заміна $5^x = t$ дає рівняння

$5t^2 - 2t - 3 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = -\frac{3}{5}$.

Обернена заміна дає $5^x = 1$, тоді $x = 0$

або $5^x = -\frac{3}{5}$ — коренів немає.

Відповідь: 0. ◁

Коментар

1. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів.
2. Зводимо всі степені (із змінною в показнику) до однієї основи 5.
3. Виконуємо заміну $5^x = t$, розв'язуємо одержане рівняння, здійснюємо обернену заміну і розв'язуємо одержані найпростіші показникові рівняння (а також враховуємо, що всі перетворення були рівносильними).

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} - 3^x = 3^{x+1} - 2^x$.

Розв'язання

▶ $2^x \cdot 2^3 - 3^x - 3^x \cdot 3^1 + 2^x = 0$,

$9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0 \mid : 3^x \neq 0$,

$$9 \cdot \frac{2^x}{3^x} - \frac{4 \cdot 3^x}{3^x} = 0,$$

$$9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0,$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9},$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

$x = 2$.

Відповідь: 2. ◁

Коментар

1. Позбуваємося числових доданків у показниках степенів, переносимо всі члени рівняння в один бік і зводимо подібні члени.
2. Помічаємо, що степені всіх членів одержаного рівняння $9 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x = 0$ (з двома основами 2 і 3) однакові — x, отже, це рівняння однорідне. Його можна розв'язати діленням обох частин на найвищий степінь одного з видів виразу із змінною — або на 2^x, або на 3^x.

Враховуючи, що $3^x \neq 0$ при всіх значеннях x, у результаті ділення на 3^x отримуємо рівняння, рівносильне попередньому (а значить, і заданому).

При розв'язуванні систем рівнянь, що містять показникові функції, найчастіше використовуються традиційні методи розв'язування систем рівнянь: метод підстановки і метод заміни змінних.

Приклад 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+y=1, \\ 4^x+4^y=5. \end{cases}$

Розв'язання

► З першого рівняння системи

$$y=1-x.$$

Тоді з другого рівняння одержуємо $4^x+4^{1-x}=5$. Тобто $4^x+\frac{4^1}{4^x}=5$. Заміна $4^x=t$ дає рівняння $t+\frac{4}{t}=5$, з якого одержуємо рівняння $t^2-5t+4=0$, що має корені: $t_1=1$, $t_2=4$.

Обернена заміна дає $4^x=1$, тоді $x_1=0$ або $4^x=4$, звідки $x_2=1$.

Знаходимо відповідні значення

$$y=1-x:$$

якщо $x_1=0$, то $y_1=1$;

якщо $x_2=1$, то $y_2=0$.

Відповідь: (0; 1), (1; 0). ◁

Коментар

Якщо з першого рівняння виразити y через x і підставити в друге рівняння, то одержимо показникове рівняння, яке ми вміємо розв'язувати (аналогічно розв'язуванню прикладу 2).

Виконуючи заміну, враховуємо, що $t=4^x\neq 0$. Тоді в одержаному дробовому рівнянні $t+\frac{4}{t}=5$ знаменник $t\neq 0$. Отже, це дробове рівняння рівносильне рівнянню $t^2-5t+4=0$.

Приклад 5* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 5^x-3^y=16, \\ 5^{\frac{x}{2}}-3^{\frac{y}{2}}=2. \end{cases}$

Розв'язання

► Заміна $5^{\frac{x}{2}}=u$ і $3^{\frac{y}{2}}=v$ дає систему

$$\begin{cases} u^2-v^2=16, \\ u-v=2. \end{cases}$$

З другого рівняння цієї системи маємо $u=2+v$. Тоді з першого рівняння одержуємо $(2+v)^2-v^2=16$. Звідси $v=3$, тоді $u=5$.

Обернена заміна дає

$3^{\frac{y}{2}}=3$, тоді $\frac{y}{2}=1$, отже, $y=2$;

$5^{\frac{x}{2}}=5$, тоді $\frac{x}{2}=1$, отже, $x=2$.

Відповідь: (2; 2). ◁

Коментар

Якщо позначити $5^{\frac{x}{2}}=u$ і $3^{\frac{y}{2}}=v$, то $5^x=u^2$ і $3^y=v^2$.

Тоді задана система буде рівносильною алгебраїчній системі, яку легко розв'язати.

Після оберненої заміни одержуємо систему найпростіших показникових рівнянь.

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна організувати пошук плану розв'язування показникових рівнянь, які не зводяться безпосередньо до найпростіших?
2. Яку заміну змінних можна виконати при розв'язуванні рівняння $4^{2x}+2\cdot 4^{x}-3=0$? Яке рівняння одержимо після заміни?
3. Поясніть, чому рівняння $5^{x}=7^{x}$ і $2^{2x}+3\cdot 2^{x}\cdot 5^{x}-4\cdot 5^{2x}=0$ є однорідними. Як можна розв'язати ці однорідні рівняння?

Вправи

Розв'язіть рівняння **(1–5)**.

1°. 1) $5^{2x}+4\cdot 5^{x}-5=0$; 2) $6^{2x}-5\cdot 6^{x}-6=0$; 3) $3^{2x}-2\cdot 3^{x}=3$;
4) $\dfrac{8}{5^x-3}-\dfrac{6}{5^x+1}=3$; 5) $\dfrac{6}{4^x-2}-\dfrac{5}{4^x+1}=2$.

2. 1) $49^{x}-6\cdot 7^{x}-7=0$; 2) $64^{x}-7\cdot 8^{x}-8=0$; 3) $2^{x}+2^{2-x}=5$;
4) $3^{x}+3^{2-x}=10$; 5) $2^{x+1}+4^{x}=80$; 6) $\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=2$;
7) $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$; 8*) $10^{\sin^2 x}+10^{\cos^2 x}=11$.

3. 1°) $7^{x}=9^{x}$; 2°) $5\cdot 3^{x}-3\cdot 5^{x}=0$;
3) $2^{x+3}-3^{x}=3^{x+1}-2^{x}$; 4) $4^{x+1}+4\cdot 3^{x}=3^{x+2}-4^{x}$;
5) $2^{x}+2^{x+1}+2^{x+2}=2\cdot 5^{x}+5^{x+1}$; 6) $4^{x}-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

4. 1) $2^{2x}+2^{x}\cdot 5^{x}-2\cdot 5^{2x}=0$; 2) $3^{2x}+2\cdot 3^{x}\cdot 7^{x}-3\cdot 7^{2x}=0$;
3) $4^{x}=3\cdot 49^{x}-2\cdot 14^{x}$; 4) $4\cdot 9^{x}-7\cdot 12^{x}+3\cdot 16^{x}=0$;
5) $5\cdot 4^{x}-7\cdot 10^{x}+2\cdot 25^{x}=0$.

5*. 1) $6^{x}-4\cdot 3^{x}-9\cdot 2^{x}+36=0$; 2) $5\cdot 15^{x}-3\cdot 5^{x+1}-3^{x}+3=0$;
3) $4\cdot 20^{x}-20\cdot 5^{x-1}+5\cdot 4^{x+1}-20=0$; 4) $8^{x}-4^{x}-2^{x+3}+8=0$.

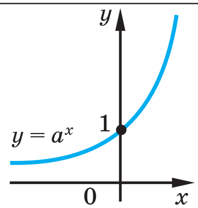
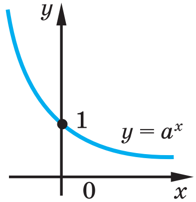
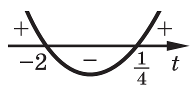
6. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $2^{x}=3-x$; 2) $3^{x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$; 3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}=x+3$; 4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}=x+1$.
Перевірте підстановкою, що знайдене значення x дійсно є коренем рівняння.

7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

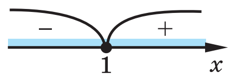
8. Розв'яжіть систему:
1) $\begin{cases}4^{x+y}=16,\\5^{x+2y-1}=1;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3^{2y-x}=\dfrac{1}{81},\\3^{x-y+2}=27;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x+y=3,\\2^{x}+2^{y}=6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x-y=2,\\3^{x}-3^{y}=24;\end{cases}$
5*) $\begin{cases}3^{x}-2^{y}=77,\\3^{\frac{x}{2}}-2^{\frac{y}{2}}=7;\end{cases}$ 6*) $\begin{cases}5^{x}-6^{y}=589,\\5^{\frac{x}{2}}+6^{\frac{y}{2}}=31.\end{cases}$

30.3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 52

1. Графік показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$ і $a \neq 1$)	
$a > 1$	$0 < a < 1$
 зростає	 спадає
2. Схема рівносильних перетворень найпростіших показникових нерівностей	
$a > 1$	$0 < a < 1$
$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)}$ *знак нерівності зберігається*	$\boxed{a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)}$ *знак нерівності змінюється на протилежний*
Приклади	
$2^{x-3} > 4.$ ▶ $2^{x-3} > 2^2.$ Функція $y = 2^t$ є зростаючою, отже: $x - 3 > 2,\ \ x > 5.$ *Відповідь:* $(5; +\infty)$. ◁	$(0,7)^{x-3} > 0,49.$ ▶ $(0,7)^{x-3} > (0,7)^2.$ Функція $y = 0,7^t$ є спадною, отже: $x - 3 < 2,\ \ x < 5.$ *Відповідь:* $(-\infty; 5)$. ◁
3. Розв'язування більш складних показникових нерівностей	
Орієнтир	Приклад
I. **За допомогою рівносильних перетворень** (за схемою розв'язування показникових рівнянь, табл. 51) **задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду** (квадратної, дробової тощо). Після розв'язування одержаної нерівності приходимо до найпростіших показникових нерівностей.	$4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ ▶ $4^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0,$ $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0.$ *Заміна* $2^x = t$ дає нерівність $4t^2 + 7t - 2 > 0$, розв'язки якої $t < -2$ або $t > \frac{1}{4}$ (див. рисунок).  Обернена заміна дає $2^x < -2$ (розв'язків немає) або $2^x > \frac{1}{4}$, звідки $2^x > 2^{-2}$, тобто $x > -2.$ *Відповідь:* $(-2; +\infty)$. ◁

Продовж. табл. 52

II. **Застосовуємо загальний *метод інтервалів*,** зводячи задану нерівність до виду $f(x) \gtrless 0$ і використовуючи схему: **1. Знайти ОДЗ.** **2. Знайти нулі $f(x)$.** **3. Відмітити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.** **4. Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.**	$$3^x + 4^x > 7.$$ ▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Задана нерівність рівносильна нерівності $3^x + 4^x - 7 > 0$. Позначимо $f(x) = 3^x + 4^x - 7$. 1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $3^x + 4^x - 7 = 0$. Оскільки функція $f(x) = 3^x + 4^x - 7$ є зростаючою (як сума двох зростаючих функцій), то значення, рівне нулю, вона набуває тільки в одній точці області визначення: $x = 1$ $(f(1) = 3^1 + 4^1 - 7 = 0)$. 3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) > 0$.  *Відповідь:* $(1; +\infty)$. ◁

Пояснення й обґрунтування

Розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду $a^x > b$ (або $a^x < b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$) ґрунтується на властивостях функції $y = a^x$, яка зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Наприклад, щоб знайти розв'язки нерівності $a^x > b$ при $b > 0$, досить подати b у вигляді $b = a^c$. Одержуємо нерівність

$$a^x > a^c. \qquad (1)$$

При $a > 1$ функція a^x зростає, отже, більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу, тому з нерівності (1) одержуємо $x > c$ (знак цієї нерівності збігається із знаком нерівності (1)).

При $0 < a < 1$ функція a^x спадає, отже, більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу, тому з нерівності (1) одержуємо $x < c$ (знак цієї нерівності протилежний знаку нерівності (1)).

Графічно це проілюстровано на рисунку 125.

Наприклад, щоб розв'язати нерівність $5^x > 25$, досить подати цю нерівність у вигляді $5^x > 5^2$, врахувати, що $5 > 1$ (функція 5^x є зростаючою, отже, при переході до аргументів знак нерівності не змінюється), і записати розв'язки: $x > 2$.

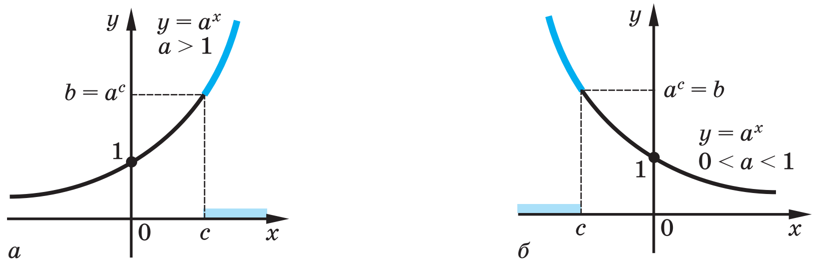


Рис. 125

Зауважимо, що розв'язки заданої нерівності можна записувати у вигляді $x > 2$ або у вигляді проміжка $(2; +\infty)$.

Аналогічно, щоб розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \frac{1}{16}$, досить подати цю нерівність у вигляді $\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^2$, врахувати, що $\frac{1}{4} < 1$ (функція $\left(\frac{1}{4}\right)^x$ є спадною, отже, при переході до аргументів знак нерівності змінюється на протилежний), і записати розв'язки: $x < 2$.

Враховуючи, що при будь-яких додатних значеннях a значення a^x завжди більше нуля, одержуємо, що **при $b \leqslant 0$ нерівність $a^x < b$ розв'язків не має, а нерівність $a^x > b$ виконується при всіх дійсних значеннях x.**

Наприклад, нерівність $7^x < -7$ не має розв'язків, а розв'язками нерівності $7^x > -7$ є всі дійсні числа.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв'язування найпростіших показникових нерівностей, відзначимо, що

при $a > 1$ нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — нерівності $f(x) < g(x)$.

Коротко це твердження можна записати так.

При $a > 1$ $\quad a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ (*знак нерівності зберігається*).

При $0 < a < 1$ $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$ (*знак змінюється на протилежний*).

Щоб обґрунтувати рівносильність відповідних нерівностей, досить відзначити, що при $a > 1$ нерівності

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, \qquad (2)$$

$$f(x) > g(x) \qquad (3)$$

можуть бути правильними тільки одночасно, оскільки функція $y = a^t$ при $a > 1$ є зростаючою і більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу (і навпаки: більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції). Отже, усі розв'язки нерівності (2) (які перетворюють її на правильну числову нерівність) будуть і розв'язками нерівності (3), та навпаки: усі розв'язки нерівності (3) будуть розв'язками нерівності (2). А це й означає, що нерівності (2) і (3) є рівносильними.

Аналогічно обґрунтовується рівносильність нерівностей $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ і $f(x) < g(x)$ при $0 < a < 1$. ○

У найпростіших випадках при розв'язуванні показникових нерівностей, як і при розв'язуванні показникових рівнянь, намагаються за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задану нерівність до виду $a^{f(x)} \gtrless a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових нерівностей найчастіше використовують заміну змінних або властивості відповідних функцій (ці методи розглянуто в § 35 розділу 4).

Зауважимо, що, аналогічно до розв'язування показникових рівнянь, усі рівносильні перетворення нерівності завжди виконуються на її області допустимих значень (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цієї нерівності). Для показникових нерівностей досить часто областю допустимих значень (ОДЗ) є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ явно не знаходять і не записують до розв'язання нерівності (див. далі приклад 1). Але якщо в процесі розв'язування показникової нерівності рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то в цьому випадку доводиться згадувати про ОДЗ (див. далі приклад 2).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $(0,6)^{x^2-7x+6} \geqslant 1$.

Розв'язання

▶ $$(0,6)^{x^2-7x+6} \geqslant (0,6)^0.$$

Оскільки функція $y = (0,6)^t$ є спадною, то $x^2 - 7x + 6 \leqslant 0$.

Звідси $1 \leqslant x \leqslant 6$ (див. рисунок).

Відповідь: [1; 6]. ◁

Коментар

Запишемо праву частину нерівності як степінь числа 0,6: $1 = (0,6)^0$.

Оскільки $0,6 < 1$, то при переході від степенів до показників знак нерівності змінюється на протилежний (одержуємо нерівність, рівносильну заданій).

Для розв'язування одержаної квадратної нерівності використаємо графічну ілюстрацію.

Приклад 2 Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x \geqslant 0$.

$$3^{\sqrt{x}} - \frac{3^2}{3^{\sqrt{x}}} \leqslant 8.$$

Заміна $3^{\sqrt{x}} = t$ $(t > 0)$ дає нерівність

Коментар

Оскільки рівносильні перетворення нерівностей виконуються на ОДЗ початкової нерівності, то зафіксуємо цю ОДЗ. Використовуючи формулу

$t-\frac{9}{t}\leqslant 8$, яка рівносильна нерівності

$$\frac{t^2-8t-9}{t}\leqslant 0.$$

Оскільки $t>0$, одержуємо $t^2-8t-9\leqslant 0$. Звідси $-1\leqslant t\leqslant 9$.

Враховуючи, що $t>0$, маємо

$$0<t\leqslant 9.$$

Виконуючи обернену заміну, одержуємо $0<3^{\sqrt{x}}\leqslant 9$. Тоді $3^{\sqrt{x}}\leqslant 3^2$.

Функція $y=3^t$ є зростаючою, отже, $\sqrt{x}\leqslant 2$. Враховуючи ОДЗ, одержуємо

$$0\leqslant x\leqslant 4.$$

Відповідь: [0; 4]. ◁

$a^{u-v}=\frac{a^u}{a^v}$, позбуваємося числового доданка в показнику степеня і одержуємо степені з однією основою 3, що дозволяє ввести заміну $3^{\sqrt{x}}=t$, де $t>0$.

В одержаній нерівності знаменник додатний, тому цю дробову нерівність можна звести до рівносильної їй квадратної.

Після виконання оберненої заміни слід врахувати не тільки зростання функції $y=3^t$, а й ОДЗ початкової нерівності.

Приклад 3* Розв'яжіть нерівність $2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}>0$.

Розв'язання

▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Позначимо

$$f(x)=2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}.$$

1. ОДЗ: $x\in \boldsymbol{R}$.
2. Нулі функції: $f(x)=0$.

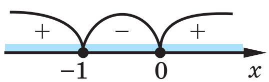
$$2^{2x+1}-5\cdot 6^x+3^{2x+1}=0,$$
$$2^{2x}\cdot 2-5\cdot 6^x+3^{2x}\cdot 3=0,$$
$$2\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x\cdot 3^x+3\cdot 3^{2x}=0\,\Big|:3^{2x}\neq 0,$$
$$2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x}+3=0.$$

Заміна $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$. Одержуємо

$2t^2-5t+3=0$, $t_1=1$, $t_2=\frac{3}{2}$. Обернена заміна дає: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=1$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=\frac{3}{2}$.

Звідси $x=0$ або $x=-1$.

3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з одержаних проміжків і записуємо розв'язки нерівності $f(x)>0$.



Відповідь: $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$. ◁

Коментар

Задану нерівність можна розв'язувати або зведенням до алгебраїчної нерівності, або методом інтервалів. Для розв'язування її методом інтервалів використаємо схему, наведену в таблиці 52.

При знаходженні нулів функції зведемо всі степені до двох основ (2 і 3), щоб одержати однорідне рівняння. Це рівняння розв'язується діленням обох частин на найвищий степінь одного з видів змінних — на 3^{2x}. Враховуючи, що $3^{2x}\neq 0$ при всіх значеннях x, в результаті ділення на 3^{2x} одержуємо рівняння, рівносильне попередньому.

Звичайно, для розв'язування заданої нерівності можна було врахувати, що $3^{2x}>0$ завжди, і після ділення заданої нерівності на 3^{2x} та заміни $\left(\frac{2}{3}\right)^{x}=t$ одержати алгебраїчну нерівність.

Приклад 4* Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0.$

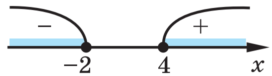
Коментар

Задану нестрогу нерівність зручно теж розв'язувати методом інтервалів. Записуючи відповідь, слід враховувати, що *у випадку, коли ми розв'язуємо нестрогу нерівність* $f(x) \leqslant 0$, *усі нулі функції* $f(x)$ *повинні ввійти до відповіді.*

Розв'язання

▶ Позначимо $f(x) = (3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8}.$

1. ОДЗ: $x^2 - 2x - 8 \geqslant 0$. Тоді $x \leqslant -2$ або $x \geqslant 4$ (див. рисунок).
2. Нулі функції: $f(x) = 0$.
   $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0.$ Тоді $3^x - 9 = 0$ або $\sqrt{x^2 - 2x - 8} = 0.$
   З першого рівняння: $x = 2$ — не входить до ОДЗ, а з другого: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.
3. Позначаємо нулі $f(x)$ на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) \leqslant 0$.



Відповідь: $x \in (-\infty; -2]$ або $x = 4$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, у яких випадках показникові нерівності $a^x > b$ та $a^x < b$ (де $a > 0$ і $a \neq 1$) мають розв'язки. У яких випадках дані нерівності не мають розв'язків? Наведіть приклади. Проілюструйте ці приклади графічно.
2. Якій нерівності рівносильна показникова нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$? При $0 < a < 1$? Наведіть приклади.

Вправи

1. Розв'яжіть нерівність **(1–4)**.

1°) $2^x > 1$; 2°) $2^x > \frac{1}{2}$; 3) $3^x > 0$; 4) $\left(\frac{1}{3}\right)^x < 0$; 5°) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geqslant 9$; 6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} \leqslant 4$;

7°) $5^x \geqslant 25\sqrt{5}$; 8) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} < 16$; 9*) $(0,3)^{\frac{x^2-7x+6}{x-3}} \leqslant 1$; 10*) $(1,3)^{\frac{x^2-9x+8}{x-4}} \geqslant 1$.

2. 1) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} > \frac{5}{2}$; 2°) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$; 3) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 \geqslant 0$;

4) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$; 5) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; 6) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 \leqslant 0$.

3. 1) $3^x > 5^x$; 2) $7^{x-1} \leqslant 2^{x-1}$; 3*) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} \geqslant 0$;
4*) $5 \cdot 3^{2x} + 15 \cdot 5^{2x-1} \leqslant 8 \cdot 15^x$.

4*. 1) $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$; 2) $(3^{x-2} - 1)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$;

3) $\sqrt{6 \cdot 3^x - 2} > 3^x + 1$; 4) $\sqrt{2 \cdot 5^{x+1} - 1} > 5^x + 2$.

§31 ЛОГАРИФМ ЧИСЛА. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

Таблиця 53

1. Логарифм числа	
Означення	**Приклади**
Логарифмом додатного числа b ***за основою*** a $(a > 0,\ a \neq 1)$ **називається показник степеня, до якого треба піднести** a**, щоб одержати** b**.** Позначення: $\log_a b$.	1) $\log_4 16 = 2$, оскільки $4^2 = 16$; 2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, оскільки $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; 3) $\lg 1000 = 3$, оскільки $10^3 = 1000$.
Десятковий логарифм — це логарифм за основою 10. Позначення: $\log_{10} b = \lg b$.	
Натуральний логарифм – це логарифм за основою e (e — ірраціональне число, наближене значення якого: $e \approx 2{,}7$). Позначення: $\log_e b = \ln b$.	4) $\ln \frac{1}{e^2} = -2$, оскільки $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$.
2. Основна логарифмічна тотожність	
$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$; 2) $10^{\lg 2} = 2$.

3. Властивості логарифмів і формули логарифмування $(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0,\ y > 0)$		
1)	$\boxed{\log_a 1 = 0}$	*Логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю.*
2)	$\boxed{\log_a a = 1}$	
3)	$\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$	*Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.*
4)	$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	*Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.*
5)	$\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}$	*Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.*

Продовж. табл. 53

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою	
$\boxed{\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}}$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$	
Наслідки	
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Пояснення й обґрунтування

1. Логарифм числа. Якщо розглянути рівність $2^3 = 8$, то, знаючи будь-які два числа з цієї рівності, ми можемо знайти третє:

Задана рівність	Що відомо	Що знаходимо	Запис	Назва
$2^3 = 8$	числа 2 і 3	**число 8**	$8 = 2^3$	**степінь**
	числа 8 і 3	**число 2**	$2 = \sqrt[3]{8}$	**корінь третього степеня**
	числа 8 і 2	**число 3**	$3 = \log_2 8$	**логарифм**

Перші дві операції, представлені в цій таблиці (піднесення до степеня і добування кореня n-го степеня), нам уже відомі, а з третьою — логарифмуванням, тобто знаходженням логарифму заданого числа — ми ознайомимося в цьому параграфі.

У загальному вигляді операція логарифмування дозволяє з рівності $a^x = b$ (де $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) знайти показник x. Результат виконання цієї операції позначається $\log_a b$. Отже,

логарифмом додатного числа b за основою a (a > 0, a ≠ 1) називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.

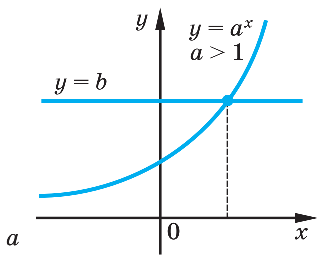
Наприклад: 1) $\log_2 8 = 3$, оскільки $2^3 = 8$; 2) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$, оскільки $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;

3) $\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$, оскільки $4^{-2} = \frac{1}{16}$.

Відзначимо, що при додатних a і b ($a \neq 1$) рівняння $a^x = b$ завжди має єдиний розв'язок, оскільки функція $y = a^x$ набуває всіх значень з проміжку $(0; +\infty)$ і при $a > 1$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною (рис. 126).

Отже, кожного свого значення $b > 0$ функція a^x набуває тільки при одному значенні x. Таким чином, *для будь-яких додатних чисел b і a ($a \neq 1$) рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь $x = \log_a b$.*

При $b \leqslant 0$ рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не має коренів, отже, *при $b \leqslant 0$ значення виразу $\log_a b$ не існує.*



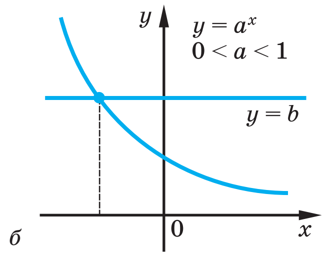


Рис. 126

Наприклад, не існують значення $\log_3(-9)$, $\log_{\frac{1}{2}}(-7)$, $\log_2 0$.

Зазначимо, що *логарифм за основою* 10 *називається десятковим логарифмом і позначається* lg.

Наприклад, $\log_{10} 7 = \lg 7$, $\lg 100 = \log_{10} 100 = 2$.

У недалекому минулому десятковим логарифмам віддавали перевагу і складали дуже детальні таблиці десяткових логарифмів, які використовувалися в різних обчисленнях. В епоху загальної комп'ютеризації десяткові логарифми втратили свою провідну роль. У сучасній науці і техніці широко використовуються логарифми, основою яких є особливе число e (таке ж знамените, як і число π). Число e, як і число π, — ірраціональне, $e = 2{,}718281828459045...$. *Логарифм за основою e називається натуральним логарифмом і позначається* ln.

Наприклад, $\log_e 7 = \ln 7$, $\ln\frac{1}{e} = \log_e\frac{1}{e} = -1$.

2. Основна логарифмічна тотожність. За означенням логарифма, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$ $(a > 0, a \neq 1, b > 0)$. Підставляючи в останню рівність замість x його значення, одержуємо рівність, яка називається *основною логарифмічною тотожністю*:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}, \quad \text{де } a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0.$$

Наприклад: 1) $5^{\log_5 9} = 9$; 2) $10^{\lg 7} = 7$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 2} = 2$.

3. Властивості логарифмів і формули логарифмування. У всіх наведених нижче формулах $a > 0$ і $a \neq 1$.

1) З означення логарифма одержуємо, що

$$\boxed{\log_a 1 = 0},$$

оскільки $a^0 = 1$ (при $a > 0$, $a \neq 1$). Отже, *логарифм одиниці за будь-якою основою дорівнює нулю*.

2) Оскільки $a^1 = a$, то

$$\boxed{\log_a a = 1}.$$

3) Щоб одержати формулу логарифма добутку xy ($x > 0$, $y > 0$), позначимо $\log_a x = u$ і $\log_a y = v$. Тоді за означенням логарифма

$$x = a^u \text{ і } y = a^v. \tag{1}$$

Перемноживши почленно дві останні рівності, маємо $xy = a^{u+v}$. За означенням логарифма і з урахуванням введених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a (xy) = u + v = \log_a x + \log_a y$.
Отже,

$$\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}\,. \tag{2}$$

Логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників.

4) Аналогічно, щоб одержати формулу логарифма частки $\frac{x}{y}$ ($x > 0$, $y > 0$), досить поділити почленно рівності (1). Тоді $\frac{x}{y} = a^{u-v}$. За означенням логарифма і з урахуванням введених позначень з останньої рівності одержуємо $\log_a \frac{x}{y} = u - v = \log_a x - \log_a y$.
Отже,

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}\,. \tag{3}$$

Логарифм частки додатних чисел дорівнює різниці логарифмів діленого і дільника.

5) Щоб одержати формулу логарифма степеня x^n (де $x > 0$), позначимо $\log_a x = u$. За означенням логарифма $x = a^u$. Тоді $x^n = a^{nu}$, і за означенням логарифма з урахуванням позначення для u маємо $\log_a x^n = nu = n \log_a x$.
Отже,

$$\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}\,. \tag{4}$$

Логарифм степеня додатного числа дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня.

Враховуючи, що при $x > 0$ $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, за формулою (4) маємо:

$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a x$. Тобто при $x > 0$ можна користуватися формулою

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x}$$

(можна не запам'ятовувати цю формулу, а кожного разу записувати корінь з додатного числа як відповідний степінь).

З а у в а ж е н н я. Інколи доводиться знаходити логарифм добутку xy і в тому випадку, коли числа x і y обидва від'ємні ($x < 0$, $y < 0$). Тоді $xy > 0$ і $\log_a (xy)$ існує, але формулою (2) скористатися не можна — вона обґрунтована тільки для додатних значень x і y. У випадку $xy > 0$ маємо $xy = |x| \cdot |y|$, і тепер $|x| > 0$ та $|y| > 0$, отже, для логарифма добутку $|x| \cdot |y|$ можна скористатися формулою (2). Тому, при $x < 0$ і $y < 0$ можемо записати:

$$\log_a (xy) = \log_a (|x| \cdot |y|) = \log_a |x| + \log_a |y|.$$

Зазначимо, що одержана формула справедлива і при $x > 0$ та $y > 0$, оскільки в цьому випадку $|x| = x$ і $|y| = y$. Отже,

при $xy > 0$ $$\boxed{\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y|}. \quad (2')$$

Аналогічно можна узагальнити і формули (3) та (4):

при $\frac{x}{y} > 0$, $$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a|x| - \log_a|y|}, \quad (3')$$

при $x \neq 0$ $$\boxed{\log_a x^{2k} = 2k \log_a|x|}. \quad (4')$$

4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою.

Нехай $\log_a x = u$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$). Тоді за означенням логарифма $a^u = x$. Прологарифмуємо обидві частини останньої рівності за основою b ($b > 0$, $b \neq 1$). Одержимо $\log_b a^u = \log_b x$.
Використовуючи в лівій частини цієї рівності формулу логарифма степеня, маємо $u \log_b a = \log_b x$. Тоді $u = \frac{\log_b x}{\log_b a}$. Враховуючи, що $u = \log_a x$, одержуємо

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$.

Отже, *логарифм додатного числа x за старою основою a дорівнює логарифму цього самого числа x за новою основою b, поділеному на логарифм старої основи a за новою основою b.*

За допомогою останньої формули можна одержати такі н а с л і д к и.

1) $\log_a b = \frac{\log_b b}{\log_b a}$. Враховуючи, що $\log_b b = 1$, маємо

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

2) Аналогічно, враховуючи формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої і формулу логарифма степеня, одержуємо (при $k \neq 0$)

$$\log_{a^k} b^k = \frac{\log_a b^k}{\log_a a^k} = \frac{k \log_a b}{k} = \log_a b.$$

Записавши одержану формулу справа наліво, маємо

$$\boxed{\log_a b = \log_{a^k} b^k},$$

де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $k \neq 0$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть: 1) $\log_5 125$; 2) $\log_{\frac{1}{27}} 3$.

Розв'язання

1) ▶ $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$; ◁

2) ▶ $\log_{\frac{1}{27}} 3 = -\frac{1}{3}$, оскільки

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{27}}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3. \text{ ◁}$$

Коментар

Враховуючи означення логарифма, потрібно підібрати такий показник степеня, щоб при піднесенні основи логарифма до цього степеня одержати число, яке стоїть під знаком логарифма.

Приклад 2 Запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $5^x = 3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 10$; 3) $10^x = \frac{1}{3}$.

Розв'язання

За означенням логарифма:

1) ▶ $x = \log_5 3$; ◁

2) ▶ $x = \log_{\frac{1}{3}} 10$; ◁

3) ▶ $x = \lg \frac{1}{3}$. ◁

Коментар

Для будь-яких додатних чисел b і a $(a \neq 1)$ рівняння $a^x = b$ має єдиний корінь. Показник степеня x, до якого потрібно піднести основу a, щоб одержати b, називається логарифмом b за основою a, тому $x = \log_a b$.

Приклад 3 Виразіть логарифм за основою 3 виразу $\frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}}$ (де $a > 0$ і $b > 0$) через логарифми за основою 3 чисел a і b. (Коротко кажуть: «*Прологарифмуйте заданий вираз за основою* 3».)

Розв'язання

▶ $\log_3 \frac{27a^2}{\sqrt[5]{b}} = \log_3 \frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}} =$

$= \log_3 (3^3 a^2) - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$

$= \log_3 (3^3) + \log_3 a^2 - \log_3 b^{\frac{1}{5}} =$

$= 3\log_3 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b =$

$= 3 + 2\log_3 a - \frac{1}{5}\log_3 b.$ ◁

Коментар

Спочатку запишемо вирази в чисельнику і знаменнику заданого виразу як степені чисел і букв.

Потім врахуємо, що логарифм частки $\frac{3^3 a^2}{b^{\frac{1}{5}}}$ додатних чисел дорівнює різниці логарифмів чисельника і знаменника, а потім те, що логарифм добутку (3^3a^2) дорівнює сумі логарифмів множників.

Після цього врахуємо, що кожен з логарифмів степенів (3^3; a^2; $b^{\frac{1}{5}}$) дорівнює добутку показника степеня на логарифм основи цього степеня, а також те, що $\log_3 3 = 1$.

Приклад 4 Відомо, що $\log_2 5 = a$, $\log_2 7 = b$. Виразіть $\log_2 700$ через a і b.

Розв'язання

▶ $\log_2 700 = \log_2 (7 \cdot 5^2 \cdot 2^2) =$
$= \log_2 7 + \log_2 5^2 + \log_2 2^2 =$
$= \log_2 7 + 2\log_2 5 + 2\log_2 2 =$
$= b + 2a + 2.$ ◁

Коментар

Спочатку подамо число 700 як добуток степенів заданих чисел 5 і 7 та основи логарифма 2, а потім використаємо властивості логарифмів та підставимо в одержаний вираз значення $\log_2 5$ та $\log_2 7$.

Приклад 5* Прологарифмуйте за основою 10 вираз $\frac{ab^3}{c^2}$.

Розв'язання

▶ Якщо $\frac{ab^3}{c^2} > 0$, то

$\lg \frac{ab^3}{c^2} = \lg |ab^3| - \lg |c^2| =$
$= \lg (|a| \cdot |b^3|) - \lg |c|^2 =$
$= \lg |a| + \lg |b^3| - 2\lg |c| =$
$= \lg |a| + 3\lg |b| - 2\lg |c|.$ ◁

Коментар

Оскільки логарифми існують тільки для додатних чисел, то ми можемо прологарифмувати заданий вираз тільки у випадку, коли $\frac{ab^3}{c^2} > 0$.

З умови не випливає, що в заданому виразі значення a, b, c додатні. Тому будемо користуватися узагальненими формулами логарифмування (2′–4′), а також врахуємо, що $|ab^3| = |a| \cdot |b^3|$, $|b^3| = |b|^3$, $|c^2| = |c|^2$.

Інколи доводиться шукати вираз, знаючи його логарифм. Таку операцію називають *потенціюванням*.

Приклад 6 Знайдіть x за даним його логарифмом:

1) $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$; 2) $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p$.

Розв'язання

1) ▶ $\lg x = \lg 5 - 2\lg 3 + 3\lg 2$,
$\lg x = \lg 5 - \lg 3^2 + \lg 2^3$,
$\lg x = \lg \frac{5 \cdot 2^3}{3^2}$, $x = \frac{5 \cdot 2^3}{3^2} = \frac{40}{9}$;

Коментар

Користуючись формулами логарифмування справа наліво, запишемо праві частини заданих рівностей у вигляді логарифма від якогось виразу.

2) ▶ $\log_a x = \frac{1}{2}\log_a b + 5\log_a c - \log_a p,$

$\log_a x = \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_a c^5 - \log_a p,$

$\log_a x = \log_a \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}, \qquad x = \frac{b^{\frac{1}{2}}c^5}{p}.$ ◁

З одержаної рівності

$$\log_a x = \log_a M$$

отримуємо

$$x = M$$

(як буде показано в § 32, значення x, що задовольняє рівності (1), — єдине).

Приклад 7* Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4}$.

Розв'язання

▶ Оскільки $\log_{\sqrt{3}} 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 \sqrt{3}} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}\log_5 3} = \frac{2}{\log_5 3}$, то

$$\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} = \frac{4}{\frac{2}{\log_5 3}} = 2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9.$$

Крім того,

$$\frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 4^{\frac{1}{2}} = \log_5 \sqrt{4} = \log_5 2.$$

Тоді $\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4 = \log_5 9 + \log_5 2 =$

$= \log_5 (9 \cdot 2) = \log_5 18.$

Отже, $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\log_5 18} = 18.$ ◁

Коментар

Спробуємо привести показник степеня заданого виразу до виду $\log_5 b$, щоб можна було скористатися основною логарифмічною тотожністю:

$$5^{\log_5 b} = b.$$

Для цього перейдемо в показнику степеня до однієї основи логарифма (до основи 5).

Запитання для контролю

1. Дайте означення логарифма додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$).
2. Який логарифм називають десятковим логарифмом і який натуральним логарифмом? Наведіть приклади запису і обчислення таких логарифмів.
3. 1) Запишіть основну логарифмічну тотожність. Наведіть приклади її використання.
   2*) Обґрунтуйте основну логарифмічну тотожність.
4. 1) Запишіть і сформулюйте формули логарифмування. Наведіть приклади їх використання.
   2*) Обґрунтуйте формули логарифмування.
5. 1) Запишіть формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої. Наведіть приклади її використання.
   2*) Обґрунтуйте формулу переходу від однієї основи логарифма до іншої.

6*. Чи можна в тому випадку, коли значення x і y обидва від'ємні, прологарифмувати вирази: xy, $\frac{x}{y}$, x^4? Як це зробити? Обґрунтуйте відповідні формули.

Вправи

1°. Перевірте правильність рівності:

1) $\log_2 16 = 4$; 2) $\log_3 27 = 3$; 3) $\log_2 \frac{1}{4} = -2$;

4) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$; 5) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$; 6) $\log_{0,2} 0,008 = 3$.

2. Обчисліть:

1°) $\log_5 25$; 2°) $\log_4 64$; 3°) $\log_3 \frac{1}{9}$; 4°) $\log_6 \sqrt{6}$; 5) $\log_9 \frac{1}{27}$; 6°) $\log_{\frac{1}{7}} 1$;

7*) $\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$; 8*) $\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$; 9*) $\log_{7+4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})$; 10*) $\log_{9-4\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5})$.

3°. Користуючись означенням логарифма, запишіть розв'язки найпростіших показникових рівнянь:

1) $4^x = 9$; 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 15$; 3) $10^x = 11$; 4) $5^x = 19$; 5) $0,2^x = 0,7$; 6) $e^x = 3$.

4. Користуючись основною логарифмічною тотожністю, спростіть вираз:

1) $5^{\log_5 7}$; 2) $3^{\log_3 4}$; 3) $\sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}}$; 4) $3,5^{\log_{3,5} 13}$; 5*) $7^{1+\log_7 2}$; 6*) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 6 - 2}$.

5. Прологарифмуйте даний вираз за заданою основою, знаючи, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$:

1°) $10a^3c^4$ за основою 10; 2) $\frac{0,1a^2b^5}{c^7}$ за основою 10;

3°) $a^2c\sqrt{b}$ за основою e; 4) $\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}}{c^2}$ за основою e;

5°) $9a^7\sqrt[3]{b}$ за основою 3; 6) $\frac{a^{\frac{2}{5}}b^4}{c^{\frac{1}{2}}}$ за основою 3.

6*. Прологарифмуйте даний вираз за основою 10, знаючи, що $ab > 0$ і $c \neq 0$:

1) $a^3b^5c^8$; 2) $\frac{\sqrt[3]{ab}}{c^2}$; 3) $\frac{c^4}{(ab)^{\frac{2}{5}}}$; 4) $100\sqrt[5]{abc^2}$.

7. Відомо, що $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$. Виразіть через a і b:

1) $\log_5 15$; 2) $\log_5 12$; 3) $\log_5 30$; 4) $\log_5 72$.

8. Знайдіть x, якщо:

1) $\log_6 x = 3\log_6 2 + 0,5\log_6 25 - 2\log_6 3$; 2) $\lg x = \frac{1}{3}\lg(5a) - 2\lg b + 5\lg c$;

3) $\lg x = 3\lg m + \frac{2}{7}\lg n - \frac{1}{5}\lg p$; 4) $\log_3 x = \frac{1}{3}\log_3 8 - 2\log_3 20 - 3\log_3 2$.

9. Замініть даний логарифм логарифмом за основою 3:

1) $\log_{\frac{1}{3}} a$; 2) $\log_9 a$; 3) $\log_{\frac{1}{9}} a$; 4) $\log_{\sqrt{3}} a$; 5) $\log_2 a$.

10*. Обчисліть значення виразу:

1) $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}}6}+\frac{1}{3}\log_6 27}$; 2) $3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{5}}3}+\frac{1}{4}\log_3 16}$;

3) $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32$; 4) $\log_9 10\cdot\lg 11\cdot\log_{11} 12\cdot\log_{12} 27$;

5) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$; 6) $15\log_{\frac{1}{7}}\left(\sqrt[5]{7}\cdot\frac{1}{49}\cdot 5^{\log_{\sqrt{5}}\sqrt[4]{49}}\right)$.

11*. 1) Знайдіть $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;

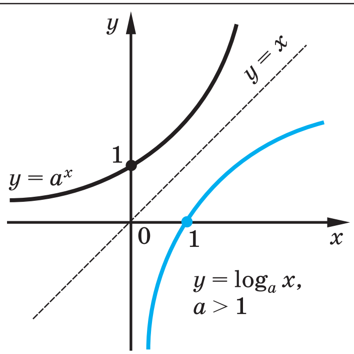
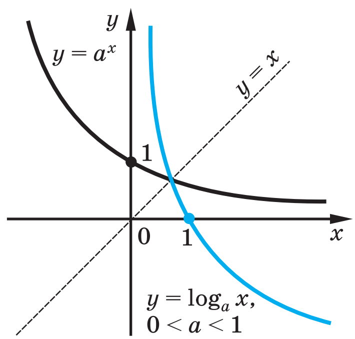
2) Знайдіть $\log_9 15$, якщо $\log_{45} 25 = a$;

3) Знайдіть $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$ і $\log_5 14 = b$;

4) Знайдіть $\log_{150} 200$, якщо $\log_{20} 50 = a$ і $\log_3 20 = b$.

§32 ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІК

Таблиця 54

Означення. ***Логарифмічною функцією*** **називається функція виду** $y = \log_a x$, **де** $a > 0$, $a \neq 1$.
1. Графік логарифмічної функції
Функції $y = a^x$ *та* $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) — *взаємно обернені функції, тому їх графіки симетричні відносно прямої* $y = x$.
 
2. Властивості логарифмічної функції
1. *Область визначення:* $x > 0$. $D(\log_a x) = (0; +\infty)$ 2. *Область значень:* $y \in \mathbf{R}$. $E(\log_a x) = \mathbf{R}$ 3. *Функція* ***ні парна, ні непарна.***

Продовж. табл. 54

4. *Точки перетину з осями координат:*

з віссю Oy **немає** з віссю Ox $\begin{cases} y=0, \\ x=1 \end{cases}$

5. *Проміжки зростання і спадання:*

$a>1$	$0<a<1$
функція $\log_a x$ *зростає при* $a>1$ *на всій області визначення*	*функція* $\log_a x$ *спадає при* $0<a<1$ *на всій області визначення*

6. *Проміжки знакосталості:*

$a>1$	$0<a<1$
$y=\log_a x>0$ при $x>1$, $y=\log_a x<0$ при $0<x<1$	$y=\log_a x>0$ при $0<x<1$, $y=\log_a x<0$ при $x>1$

7. *Найбільшого і найменшого значень функція не має.*

8.
$$\log_a a=1$$
$$\log_a (uv)=\log_a u+\log_a v \quad (u>0,\ v>0)$$
$$\log_a \frac{u}{v}=\log_a u-\log_a v \quad (u>0,\ v>0)$$
$$\log_a u^n=n\log_a u \quad (u>0)$$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття логарифмічної функції та її графік. *Логарифмічною функцією називається функція виду* $y=\log_a x$, де $a>0$, $a\neq 1$.

Покажемо, що ця функція є оберненою до функції $y=a^x$.

Дійсно, показникова функція $f(x)=a^x$ при $a>1$ зростає на множині $\boldsymbol{R}$, а при $0<a<1$ — спадає на множині $\boldsymbol{R}$. Область значень функції $f(x)=a^x$ — проміжок $(0;+\infty)$. Отже, функція $f(x)$ оборотна (с. 141) і має обернену функцію з областю визначення $(0;+\infty)$ і областю значень $\boldsymbol{R}$. Нагадаємо, що для запису формули оберненої функції досить з рівності $y=f(x)$ виразити x через y і в одержаній формулі $x=g(y)$ аргумент позначити через x, а функцію — через y.

Тоді з рівняння $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ за означенням логарифма одержуємо $x=\log_a y$ — формулу оберненої функції, у якій аргумент позначено через y, а функцію — через x. Змінюючи позначення на традиційні, маємо формулу $y=\log_a x$ — функції, оберненої до функції $y=a^x$.

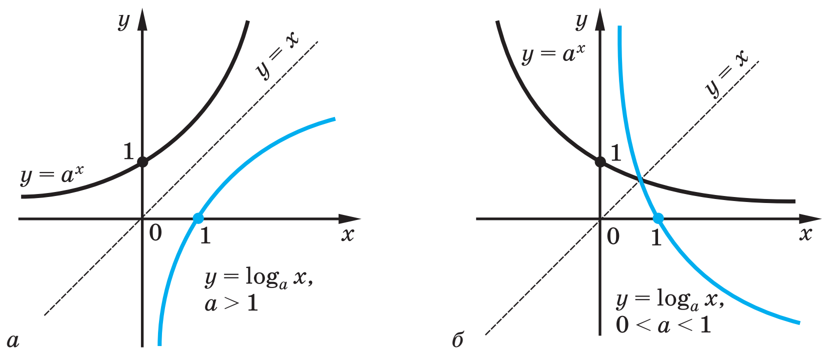


Рис. 127

Як відомо, графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Отже, графік функції $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) можна одержати із графіка функції $y = a^x$ симетричним відображенням відносно прямої $y = x$. На рисунку 127 наведено графіки логарифмічних функцій при $a > 1$ та при $0 < a < 1$. Графік логарифмічної функції називають *логарифмічною кривою*.

2. Властивості логарифмічної функції. Властивості логарифмічної функції, наведені в пункті 8 таблиці 54, було обґрунтовано в § 31. Інші властивості функції $y = \log_a x$ або прочитаємо з одержаного графіка цієї функції, або обґрунтуємо їх, спираючись на властивості функції $y = a^x$.

Оскільки область визначення прямої функції є областю значень оберненої, а область значень прямої функції — областю визначення оберненої, то, знаючи ці характеристики для функції $y = a^x$, одержуємо відповідні характеристики для функції $y = \log_a x$:

Характеристика	Функція	
	$y = a^x$	$y = \log_a x$
Область визначення	$\boldsymbol{R}$	$(0; \infty)$
Область значень	$(0; \infty)$	$\boldsymbol{R}$

1) ***Областю визначення* функції $y = \log_a x$ є множина R_+ всіх додатних чисел** ($x > 0$);

2) *Областю значень функції $y = \log_a x$ є множина $\boldsymbol{R}$ всіх дійсних чисел* (тоді функція $y = \log_a x$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень).

3) Функція $y = \log_a x$ не може бути *ні парною, ні непарною,* оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.

4) **Графік функції $y = \log_a x$ не перетинає вісь Oy**, оскільки на осі Oy $x = 0$, а це значення не входить до області визначення функції $y = \log_a x$.

Графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x = 1$, оскільки $\log_a 1 = 0$ при всіх значеннях a ($a > 0$, $a \neq 1$).

5) З графіків функції $y = \log_a x$, наведених на рисунку 127, видно, що

при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення, а при $0 < a < 1$ — спадає на всій області визначення.

Цю властивість можна обґрунтувати, не спираючись на вид графіка, а спираючись тільки на властивості функції $y = a^x$.
Наприклад, при $a > 1$ візьмемо $x_2 > x_1 > 0$. За основною логарифмічною тотожністю можна записати: $x_1 = a^{\log_a x_1}$, $x_2 = a^{\log_a x_2}$. Тоді, враховуючи, що $x_2 > x_1$, маємо $a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$. Оскільки при $a > 1$ функція $y = a^x$ є зростаючою, то з останньої нерівності одержуємо $\log_a x_2 > \log_a x_1$. А це й означає, що при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає на всій області визначення.
Аналогічно можна обґрунтувати, що при $0 < a < 1$ функція $y = \log_a x$ спадає на всій області визначення.

6) *Проміжки знакосталості.* Оскільки графік функції $y = \log_a x$ перетинає вісь Ox у точці $x = 1$, то, враховуючи зростання функції при $a > 1$ та спадання при $0 < a < 1$, маємо:

Значення функції	Значення аргументу	
	при $a > 1$	при $0 < a < 1$
$y > 0$	$x \in (1; +\infty)$	$x \in (0; 1)$
$y < 0$	$x \in (0; 1)$	$x \in (1; +\infty)$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \log_5 (3 - x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3)$; 3) $y = \log_7 (x^2 - x)$.

Розв'язання

1) $y = \log_5 (3 - x)$.
► Область визначення задається нерівністю $3 - x > 0$. Звідси $x < 3$. Тобто

$$D(y) = (-\infty; 3).$$ ◁

2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 3)$.

► Область визначення задається нерівністю $x^2 + 3 > 0$. Ця нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x. Отже, $D(y) = \boldsymbol{R}$. ◁

Коментар

Оскільки вираз, що стоїть під знаком логарифма, має бути додатним, то для знаходження області визначення заданої функції треба знайти ті значення аргументу x, при яких вираз, що стоїть під знаком логарифма, буде додатним.

3) $y = \log_7 (x^2 - x)$.

▶ Область визначення задається нерівністю $x^2 - x > 0$. Розв'язуючи цю квадратну нерівність одержуємо $x < 0$ або $x > 1$ (див. рисунок).

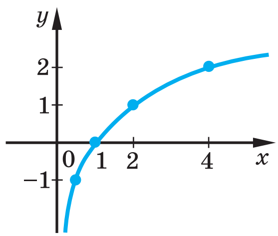
Тобто $D(y) = (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. ◁

Приклад 2 Зобразіть схематично графік функції:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Розв'язання

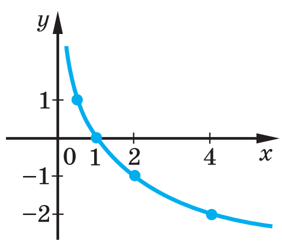
1) ▶ $y = \log_2 x$



x	1	$\frac{1}{2}$	2	4
y	0	–1	1	2

◁

2) ▶ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



x	1	$\frac{1}{2}$	2	4
y	0	1	–1	–2

◁

Коментар

Область визначення функції $y = \log_a x$ — значення $x > 0$, отже, графік цієї функції завжди розташований праворуч від осі Oy. Цей графік перетинає вісь Ox у точці $x = 1$ ($\log_a 1 = 0$).

При $a > 1$ логарифмічна функція зростає, отже, графіком функції $y = \log_2 x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргументу піднімаються вгору.

При $0 < a < 1$ логарифмічна функція спадає, отже, графіком функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ буде логарифмічна крива, точки якої при збільшенні аргументу опускаються вниз.

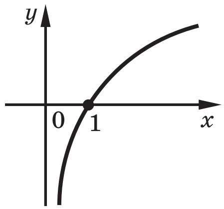
Щоб уточнити поведінку графіків заданих функцій, знайдемо координати кількох додаткових точок.

Приклад 3* Зобразіть схематично графік функції $y = \log_3 |x - 2|$.

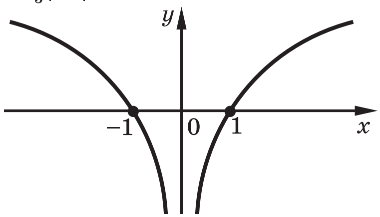
Розв'язання

▶ Послідовно будуємо графіки:

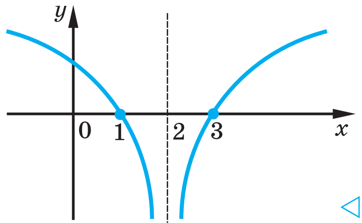
1. $y = \log_3 x$;



2. $y = \log_3 |x|$;



3. $y = \log_3 |x - 2|$.



◁

Коментар

Складемо план послідовної побудови графіка заданої функції за допомогою геометричних перетворень (див. таблицю 4, с. 28).

1. Ми можемо побудувати графік функції $y = f(x) = \log_3 x$ (основа логарифма $a = 3 > 1$ — логарифмічна функція зростає).
2. Потім можна побудувати графік функції
$$y = g(x) = \log_3 |x| = f(|x|)$$
(праворуч від осі Oy графік $f(x)$ залишається без зміни, і ця сама частина графіка симетрично відображується відносно осі Oy).
3. Після цього можна побудувати графік заданої функції
$$y = \log_3 |x - 2| = g(x - 2)$$
паралельним перенесенням графіка функції $g(x)$ уздовж осі Ox на 2 одиниці.

Приклад 4 Порівняйте додатні числа b і c, знаючи, що:
1) $\log_3 b > \log_3 c$; 2) $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$.

Розв'язання

1) ▶ Оскільки функція $y = \log_3 x$ є зростаючою, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_3 b > \log_3 c$ одержуємо $b > c$. ◁

2) ▶ Оскільки функція $y = \log_{0,3} x$ є спадною, то для додатних чисел b і c з нерівності $\log_{0,3} b > \log_{0,3} c$ одержуємо $b < c$. ◁

Коментар

У кожному завданні задані вирази — це значення логарифмічної функції $y = \log_a x$ у точках b і c.

Далі використовуємо зростання чи спадання відповідної функції:

1) при $a = 3 > 1$ функція $y = \log_3 x$ є зростаючою, і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу;
2) при $a = 0,3 < 1$ функція $y = \log_{0,3} x$ є спадною, і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу.

Приклад 5 Порівняйте з одиницею додатне число a, знаючи, що $\log_a 6 < 0$.

Розв'язання

▶ Оскільки $6 > 1$, а з умови одержуємо, що $\log_a 6 < 0 = \log_a 1$ (тобто $\log_a 6 < \log_a 1$), то функція $y = \log_a x$ є спадною, отже,

$0 < a < 1$. ◁

Коментар

Числа $\log_a 6$ і 0 — це два значення функції $\log_a x$. Враховуючи задану нерівність, з'ясовуємо, чи ця функція є зростаючою чи спадною, і згадуємо, що вона зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$.

Запитання для контролю

1. Дайте означення логарифмічної функції.
2. Як розташовані графіки функцій $y = a^x$ та $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ відносно прямої $y = x$? Відповідь поясніть. Побудуйте ці графіки при $a > 1$ і при $0 < a < 1$.
3. Користуючись графіком функції $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, охарактеризуйте її властивості.
4*. Обґрунтуйте властивості функції $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.
5. Враховуючи зростання або спадання відповідної логарифмічної функції, порівняйте значення: а) $\log_5 7$ і $\log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} 7$ і $\log_{\frac{1}{5}} 3$.

Вправи

1. Знайдіть область визначення функції:

1°) $y = \log_{11}(2x + 6)$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{6}}(x - 3)$; 3) $y = \log_{\sqrt{2}}(x^2 - 1)$;

4) $y = \log_{5,2}(3x - x^2)$; 5) $y = \log_{\frac{3}{8}}(2x^2 + 1)$; 6) $y = \log_{\pi}(x^2 + x + 1)$;

7*) $y = \log_{0,4}\dfrac{2x - 6}{x + 2}$; 8*) $y = \log_{\sqrt{7}}\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$; 9*) $y = \log_{3,1}\dfrac{|x| + 5}{|x| - 3}$;

10*) $y = \log_x(2x - x^2)$; 11*) $y = \log_{2x-3}(5x - x^2)$.

Зобразіть схематично графік функції **(2–3)**.

2. 1°) $y = \log_3 x$; 2°) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; 3°) $y = \log_{0,3} x$;

4) $y = \log_{\sqrt{5}} x$; 5) $y = \log_{\frac{1}{6}} x$; 6) $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

3. 1) $y = \log_2(-x)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x - 1)$; 3) $y = \log_4(x + 3)$;

4) $y = \log_4 x + 3$; 5) $y = -\log_6 x$; 6*) $y = |\log_3 |x||$;

7*) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}(2x - 4)\right|$; 8*) $y = \log_4\dfrac{x^2}{|x|}$; 9*) $y = \log_3 \log_3 x$.

4. Порівняйте числа:

1) $\log_2 3,5$ і $\log_2 4,5$; 2) $\log_{0,1} 1,3$ і $\log_{0,1} 1,1$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 2$ і $\log_{\frac{1}{5}} 5$;

4) $\log_{\sqrt{3}} 2{,}3$ і $\log_{\sqrt{3}} 0{,}2$; 5) $\log_{\pi} 5$ і $\log_{\pi} 7$; 6) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 10$ і $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 20$;

7) $\log_2 3$ і 0; 8) $\log_7 \frac{1}{3}$ і 0; 9) $\log_3 4$ і 1; 10) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{5}$ і 1.

5. Порівняйте додатні числа b і c, знаючи, що:

1) $\log_5 b > \log_5 c$; 2) $\log_{0,5} b > \log_{0,5} c$; 3) $\log_{\sqrt{7}} b > \log_{\sqrt{7}} c$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} b < \log_{\frac{1}{3}} c$.

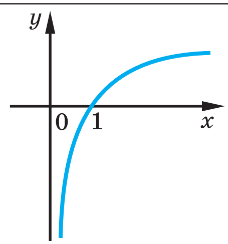
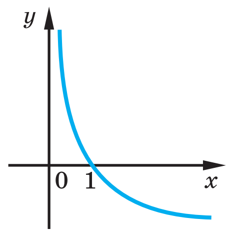
6. Порівняйте з одиницею додатне число a, знаючи, що:

1) $\log_a 5 > 0$; 2) $\log_a \frac{1}{3} > 0$; 3) $\log_a 2{,}3 < 0$; 4) $\log_a 0{,}2 < 0$.

§33 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

33.1. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ РІВНЯНЬ

Таблиця 55

<table>
<tr><td colspan="3">1. Основні означення та співвідношення</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Означення. Логарифмом додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \ne 1$) називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.
$\boxed{\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c}$</td><td colspan="2">Графік функції $y = \log_a x$
($a > 0$, $a \ne 1$)</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>зростає</td><td>спадає</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td colspan="2">Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо a — число ($a > 0$ і $a \ne 1$), то
$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}$
(використовуємо означення логарифма)</td><td colspan="2">▶ $\log_3(x-1) = 2$.
$x - 1 = 3^2$,
$x = 10$.
Відповідь: 10. ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 55

<table>
<tr><td colspan="2">3. Використання рівнянь-наслідків</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної, то гарантуємо, що одержуємо рівняння-наслідок. При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.</td><td>$\log_x(x+2)=2$.
► За означенням логарифма одержуємо
$x+2=x^2$,
$x^2-x-2=0$,
$x_1=-1$, $x_2=2$.
Перевірка. $x=-1$ — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число);
$x=2$ — корінь ($\log_2(2+2)=2$,
$\log_2 4=2$, $2=2$).
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь</td></tr>
<tr><td colspan="2">Заміна змінних</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).</td><td>$\lg^2 x-2\lg x-3=0$.
► Заміна: $\lg x=t$,
$t^2-2t-3=0$,
$t_1=-1$, $t_2=3$.
Отже, $\lg x=-1$ або $\lg x=3$.
Тоді $x=10^{-1}=0{,}1$ або $x=10^3=1000$.
Відповідь: 0,1; 1000. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівняння виду $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ($a>0$ і $a\neq 1$)</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$$\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Bigg|\ \text{ОДЗ}}$$
(враховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів)</td><td>$\log_3(x^2-2)=\log_3(4x-5)$.
► ОДЗ: $\begin{cases}x^2-2>0,\\ 4x-5>0.\end{cases}$
На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:
$x^2-2=4x-5$, $x^2-4x+3=0$,
$x_1=1$, $x_2=3$,
$x=1$ — сторонній корінь (не задовольняє умовам ОДЗ);
$x=3$ — корінь (задовольняє умовам ОДЗ).
Відповідь: 3. ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 55

Рівносильні перетворення рівнянь в інших випадках	
Орієнтир	Приклад
1. **Враховуємо ОДЗ** заданого рівняння (і *уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ*); 2. Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.**	$\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x+3)$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0. \end{cases}$ На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням: $\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$, $\log_2((x+1)(x+3))=3$, $(x+1)(x+3)=2^3$, $x^2+4x-5=0$, $x_1=1$, $x_2=-5$. $x=1$ — корінь (задовольняє умовам ОДЗ); $x=-5$ — сторонній корінь (не задовольняє умовам ОДЗ). *Відповідь:* 1. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь. *Найпростішим логарифмічним рівнянням* звичайно вважають рівняння $\log_a x = c$ ($a > 0$ і $a \neq 1$).

Логарифмічна функція зростає (або спадає) на всій своїй області визначення, тобто при $x > 0$ (див. графіки в пункті 1 таблиці 55), і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу. Враховуючи, що логарифмічна функція набуває всіх дійсних значень, рівняння

$$\log_a x = c \qquad (1)$$

завжди має єдиний корінь, який можна записати, скориставшися означенням логарифма: $x = a^c$.

Якщо розглянути рівняння

$$\log_a f(x) = c \qquad (2)$$

і виконати заміну змінної: $f(x) = t$, то одержимо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a t = c$, яке має єдиний корінь $t = a^c$. Виконуючи обернену заміну, одержуємо, що розв'язки рівняння (2) збігаються з розв'язками рівняння

$$f(x) = a^c. \qquad (3)$$

Отже, рівняння (2) і (3) — рівносильні. Таким чином, ми обґрунтували, що *для рівносильного перетворення найпростішого логарифмічного рівняння* (1) або рівняння (2) (яке ми теж будемо відносити до найпростіших за умови, що основа a — число) *досить використати означення логарифма.*

Якщо позначити рівносильність рівнянь значком $\Leftrightarrow$, то коротко цей результат можна записати так:

$$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}.$$

Нагадаємо, що всі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його області допустимих значень (ОДЗ). Для рівняння (2) ОДЗ задається умовою $f(x) > 0$. Але для всіх коренів рівняння (3) ця умова виконується автоматично (через те, що $a > 0$). Тому *в явному вигляді ОДЗ для найпростіших логарифмічних рівнянь можна не записувати* (оскільки вона враховується автоматично при переході від рівняння (2) до рівняння (3)).

Наприклад, рівняння $\log_5(2x-3) = 2$ рівносильне рівнянню $2x - 3 = 5^2$, корінь якого $x = 14$ і є коренем заданого рівняння.

Аналогічно записано і розв'язання найпростішого рівняння $\log_3(x-1) = 2$ у таблиці 55.

2. Використання рівнянь-наслідків при розв'язуванні логарифмічних рівнянь. При розв'язуванні рівняння головне — не загубити його корені, і тому важливо стежити за тим, щоб кожен корінь першого рівняння залишався коренем наступного — у цьому випадку одержуємо рівняння-наслідки. Нагадаємо, що кожен корінь заданого рівняння перетворює його на правильну числову рівність. Використовуючи це означення, можна обґрунтувати такий орієнтир: *якщо з припущення про правильність першої рівності випливає правильність кожної наступної, ми одержуємо рівняння-наслідки* (оскільки кожен корінь першого рівняння буде і коренем наступного рівняння). Нагадаємо, що хоча при використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому *перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування при використанні рівнянь-наслідків*.

Приклад розв'язування логарифмічного рівняння за допомогою рівнянь-наслідків та оформлення такого розв'язання наведено в пункті 3 таблиці 55.

3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь. Одним із часто використовуваних способів рівносильних перетворень рівнянь є **заміна змінної**.

Нагадаємо загальний орієнтир, якого ми дотримувалися при розв'язуванні рівнянь з інших розділів: *якщо до рівняння* (нерівності або тотожності) *змінна входить в одному і тому ж вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).*

Наприклад, до рівняння $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$ змінна входить тільки у вигляді $\lg x$, тому для його розв'язування доцільно використати заміну $\lg x = t$, одержати квадратне рівняння $t^2 - 2t - 3 = 0$, яке має корені $t_1 = -1$ і $t_2 = 3$, а потім виконати обернену заміну і одержати найпростіші логарифмічні рівняння: $\lg x = -1$ і $\lg x = 3$. Тоді, за означенням логарифма, коренями заданого рівняння є $x = 10^{-1} = 0{,}1$ та $x = 10^3 = 1000$.

Зважаючи на те, що заміна змінної (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням рівняння на будь-якій множині, для виконання заміни не обов'язково знаходити ОДЗ заданого рівняння. А після виконання оберненої заміни ми одержали найпростіші логарифмічні рівняння, для яких (як було показано вище) ОДЗ враховується автоматично, і її теж можна не записувати. Отже, у наведеному розв'язанні ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично, і тому в явному вигляді ОДЗ можна не записувати до розв'язання. Саме так і оформлено розв'язання цього рівняння в пункті 4 таблиці 55.

Розглянемо також **рівносильні перетворення рівняння виду**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0 \text{ і } a \neq 1). \qquad (4)$$

Як уже відзначалося, усі рівносильні перетворення рівняння виконуються на його області допустимих значень. Для рівняння (4) ОДЗ задається системою нерівностей $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Оскільки логарифмічна функція $\log_a t$ зростає (при $a > 1$) або спадає (при $0 < a < 1$) на всій своїй області визначення і кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу, то рівність (4) може виконуватися (на ОДЗ) тоді і тільки тоді, коли $f(x) = g(x)$. Враховуючи ОДЗ, одержуємо, що рівняння (4) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (6) \\ g(x) > 0. & (7) \end{cases}$$

Символічно одержаний результат зафіксовано в пункті 4 таблиці 55, а коротко його можна сформулювати так:

щоб розв'язати рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ за допомогою рівносильних перетворень, враховуємо ОДЗ цього рівняння і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів.

Приклад використання цього орієнтиру наведено в таблиці 55.

З а у в а ж е н н я 1. Одержану систему (5)–(7) можна дещо спростити. Якщо в цій системі виконується рівність (5), то значення $f(x)$ і $g(x)$ між собою рівні, тому, якщо одне з цих значень буде додатним, то друге теж буде додатним. Отже, рівняння (4) рівносильне системі, яка складається з рівняння (5) і однієї з нерівностей (6) або (7) (звичайно вибирають простішу з цих нерівностей).

Наприклад, рівняння $\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$, розглянуте в таблиці 55, рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 2 = 4x - 5, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$ Але, враховуючи, що обмеження ОДЗ цього рівняння: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0 \end{cases}$ ми не розв'язували, а тільки перевіряли, чи задовольняють знайдені корені цим обмеженням, то наведене спрощення не дає суттєвого виграшу при розв'язуванні цього рівняння.

Зауваження 2. Як було обґрунтовано вище, якщо виконується рівність (4), то обов'язково виконується і рівність (5). Отже, рівняння (5) є наслідком рівняння (4), і тому для знаходження коренів рівняння (4): $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ досить знайти корені рівняння-наслідку (5): $f(x) = g(x)$ і виконати перевірку знайдених коренів підстановкою в задане рівняння. (Тобто при такому способі розв'язування ОДЗ рівняння (4) буде враховано опосередковано, у момент перевірки одержаних коренів, і його не доведеться явно записувати.)

Виконуючи **рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь у більш складних випадках,** можна дотримуватися такого орієнтира (він випливає з означення рівносильних рівнянь і обґрунтований у § 17 розділу 2):

1) ***Враховуємо ОДЗ заданого рівняння.***
2) ***Слідкуємо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.***

Наприклад, розв'яжемо рівняння

$$\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x+3) \qquad (8)$$

за допомогою рівносильних перетворень.

Для цього досить врахувати ОДЗ рівняння $\begin{cases} x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases}$ а потім, виконуючи кожне перетворення рівняння, весь час стежити за тим, чи можна на ОДЗ виконати це перетворення і у зворотному напрямку. Якщо відповідь позитивна, то виконані перетворення рівносильні. Якщо ж якесь перетворення для всіх значень змінної з ОДЗ можна виконати тільки в одному напрямку (від початкового рівняння до наступного), а для його виконання у зворотному напрямку потрібні якісь додаткові обмеження, то ми одержимо тільки рівняння-наслідок, і отримані корені доведеться перевіряти підстановкою в початкове рівняння.

Застосуємо цей план до розв'язування рівняння (8).

Щоб звести це рівняння до найпростішого, перенесемо всі члени рівняння з логарифмами вліво. Одержимо рівносильне рівняння

$$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3. \qquad (9)$$

(Рівносильність рівнянь (8) і (9) випливає з відомої теореми: якщо з однієї частини рівняння перенести в іншу доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння, рівносильне заданому на будь-якій множині. Рівносильність цих рівнянь випливає також з того, що ми можемо перейти не тільки від рівності (8) до рівності (9), а й виконати зворотне перетворення, користуючись властивостями числових рівностей.)

Враховуючи, що сума логарифмів додатних (на ОДЗ) чисел дорівнює логарифму добутку, одержуємо рівняння

$$\log_2((x+1)(x+3))=3. \qquad (10)$$

На ОДЗ заданого рівняння можна виконати і зворотне перетворення: оскільки $x+1>0$ і $x+3>0$, то логарифм добутку додатних чисел дорівнює сумі логарифмів множників. Отже, від рівності (10) можна повернутися до рівності (9), тобто цей перехід теж приводить до рівносильного рівняння. Рівняння (10) — це найпростіше логарифмічне рівняння. Воно рівносильне рівнянню, яке отримуємо за означенням логарифма:

$$(x+1)(x+3)=2^3.$$

Виконуючи рівносильні перетворення одержаного рівняння, маємо:

$$x^2+4x-5=0,\ x_1=1,\ x_2=-5.$$

Оскільки всі рівносильні перетворення виконувалися на ОДЗ заданого рівняння, врахуємо її, підставляючи одержані корені в обмеження ОДЗ:

$x=1$ — корінь, бо задовольняє умовам ОДЗ;

$x=-5$ не є коренем (сторонній корінь), бо не задовольняє умовам ОДЗ. Отже, задане рівняння має тільки один корінь $x=1$.

З а у в а ж е н н я. Звичайно, розглянуте рівняння можна було розв'язати і з використанням рівнянь-наслідків, без явного врахування ОДЗ, але з перевіркою одержаних розв'язків підстановкою в початкове рівняння. Тому кожен, хто розв'язує рівняння, має право обирати шлях розв'язування: чи це буде використання рівнянь-наслідків, чи рівносильні перетворення заданого рівняння. Але для багатьох рівнянь перевірку одержаних коренів досить непросто виконати, а для нерівностей і зовсім не можна користуватися наслідками. Це пов'язано з тим, що для нерівностей не вдається перевірити всі розв'язки — їх кількість у нерівностей, як правило, нескінченна. Отже, для нерівностей доводиться виконувати тільки рівносильні перетворення (ці перетворення нерівностей можна виконувати за орієнтирами, повністю аналогічними наведеним вище).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння

$$\lg(x-2)-\frac{1}{2}\lg(3x-6)=\lg 2. \qquad (1)$$

Р о з в ' я з а н н я

▶ $2\lg(x-2)-\lg(3x-6)=2\lg 2,$ (2)

$\lg(x-2)^2-\lg(3x-6)=\lg 2^2,$ (3)

$\lg\frac{(x-2)^2}{3x-6}=\lg 4,$ (4)

К о м е н т а р

Розв'яжемо задане рівняння за допомогою наслідків. Нагадаємо, що *при використанні наслідків головне — гарантувати, що у випадку, коли перша рівність буде правильною, то й усі наступні теж будуть правильними*.

$$\frac{(x-2)^2}{3x-6}=4, \qquad (5)$$

$$(x-2)^2=4(3x-6), \qquad (6)$$

$$x^2-16x+28=0, \qquad (7)$$

$$x_1=2,\ x_2=14.$$

П е р е в і р к а. $x=2$ — сторонній корінь (під знаком логарифма отримуємо 0),

$x=14$ — корінь, оскільки маємо

$$\lg(14-2)-\frac{1}{2}\lg(3\cdot 14-6)=\lg 2,$$

$$\lg 12-\frac{1}{2}\lg 36=\lg 2,$$

$$\lg 12-\lg\sqrt{36}=\lg 2,$$

$$\lg\frac{12}{6}=\lg 2,$$

$$\lg 2=\lg 2.$$

Відповідь: 14. ◁

Щоб позбутися дробового коефіцієнта, помножимо обидві частини рівняння (1) на 2 (якщо рівність (1) правильна, то і рівність (2) теж правильна). Якщо рівності (1) чи (2) правильні (при тих значеннях x, що є коренями цих рівнянь), то при таких значеннях x існують всі записані логарифми, і тоді вирази $x-2$ та $3x-6$ — додатні. Але тоді для додатних a, b, c можна скористатися формулами: $2\lg a=\lg a^2$, $\lg b-\lg c=\lg\frac{b}{c}$, отже, рівності (3) і (4) теж будуть правильними. Враховуючи, що функція $y=\lg t$ є зростаючою, отже, кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу, з рівності логарифмів (4) одержуємо рівність відповідних аргументів (5).

Якщо рівність (5) правильна, то знаменник дробу не дорівнює нулю, і після множення обох її частин на $3x-6\neq 0$ одержуємо правильну рівність (6) (а, отже, і правильну рівність (7)). Оскільки ми користувалися рівняннями-наслідками, то в кінці необхідно виконати перевірку.

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x-5)^2-2=2\log_2(2x). \qquad (1)$$

Р о з в ' я з а н н я

▶ ОДЗ: $\begin{cases}(x-5)^2>0,\\ 2x>0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\neq 5,\\ x>0.\end{cases}$

На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\log_2(x-5)^2-\log_2 2^2=2\log_2(2x),$$

$$\log_2\frac{(x-5)^2}{2^2}=\log_2(2x)^2, \qquad (2)$$

$$\frac{(x-5)^2}{2^2}=(2x)^2, \qquad (3)$$

$$(x-5)^2=4\cdot 4x^2,$$

К о м е н т а р

Розв'яжемо задане рівняння за допомогою рівносильних перетворень. Нагадаємо, що для цього досить *враховувати ОДЗ заданого рівняння і слідкувати за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.*

Зауважимо, що на ОДЗ вираз $x-5$ може бути як додатним, так і від'ємним, і тому ми не маємо права застосовувати до виразу $\log_2(x-5)^2$ фор-

$$15x^2 + 10x - 25 = 0,$$
$$3x^2 + 2x - 5 = 0.$$
$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{5}{3}.$$

Враховуючи ОДЗ, одержуємо, що $x = 1$ входить до ОДЗ, отже, є коренем;

$x = -\frac{5}{3}$ не входить до ОДЗ, отже, не є коренем заданого рівняння.

Відповідь: 1. ◁

мулу: $\log_2 (x - 5)^2 = 2 \log_2 (x - 5)$ (це приведе до втрати кореня). Застосування узагальненої формули логарифмування приведе до рівняння з модулем. Використаємо інший шлях перетворень, врахувавши, що $2 = \log_2 2^2$. Оскільки на ОДЗ всі вирази, що стоять під знаками логарифмів, додатні, то всі перетворення від рівняння (1) до рівняння (2) будуть рівносильними. Виконувати рівносильні перетворення рівняння (2) можна з використанням орієнтира, наведеного на с. 377. Також рівносильність рівнянь (2) і (3) може бути обґрунтована через зростання функції $y = \log_2 t$, яка кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу.

Приклад 3* Розв'яжіть рівняння $\log_4 x + 6 \log_x 4 = 5.$

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянню

$$\log_4 x + 6 \cdot \frac{1}{\log_4 x} = 5.$$

Заміна: $\log_4 x = t$. Одержуємо:

$$t + \frac{6}{t} = 5, \qquad (1)$$
$$t^2 - 5t + 6 = 0, \qquad (2)$$
$$t_1 = 2,\ t_2 = 3;$$
$$\log_4 x = 2 \text{ або } \log_4 x = 3;$$
$$x = 4^2 = 16 \text{ або } x = 4^3 = 64$$

(обидва корені входять до ОДЗ).

Відповідь: 16; 64. ◁

Коментар

Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ ($x > 0$, $x \neq 1$). Оскільки до рівняння входять логарифми з різними основами, то зведемо їх до однієї основи (бажано числової, інакше можна загубити корені рівняння) — у даному випадку, до основи 4 — за формулою $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

Після зведення логарифмів до однієї основи змінна входить до рівняння тільки в одному вигляді $\log_4 x$. Виконаємо заміну $\log_4 x = t$. Оскільки за обмеженнями ОДЗ $x \neq 1$, то $t \neq 0$. Тоді одержане дробове рівняння (1) рівносильне квадратному рівнянню (2).

Оскільки заміна і обернена заміна є рівносильними перетвореннями на ОДЗ, то для одержаних розв'язків досить перевірити, чи входять вони до ОДЗ.

Приклад 4* Розв'яжіть рівняння

$$x^{\lg x - 2} = 1000. \qquad (1)$$

Розв'язання

► ОДЗ: $x > 0$.

На ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:

$$\lg (x^{\lg x - 2}) = \lg 1000, \qquad (2)$$

$$(\lg x - 2)\lg x = 3. \qquad (3)$$

Заміна: $\lg x = t$. Одержуємо:

$$(t - 2)t = 3,\ t^2 - 2t - 3 = 0,$$

$$t_1 = -1,\ t_2 = 3.$$

Обернена заміна дає

$$\lg x = -1 \text{ або } \lg x = 3.$$

Звідси $x = 10^{-1} = 0{,}1$ або

$$x = 10^3 = 1000.$$

Відповідь: 0,1; 1000. ◁

Коментар

Виконаємо рівносильні перетворення заданого рівняння. Для цього знайдемо його ОДЗ і використаємо орієнтир: *якщо змінна входить і до основи, і до показника степеня, то для розв'язування такого рівняння можна спробувати прологарифмувати обидві частини рівняння* (звичайно, тільки якщо вони додатні). До запису рівняння вже входить десятковий логарифм, тому прологарифмуємо обидві частини за основою 10 (на ОДЗ обидві частини заданого рівняння додатні).

Оскільки функція $y = \lg t$ є зростаючою, то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу. Отже, якщо виконується рівність (1), то виконується і рівність (2), і навпаки: якщо виконується рівність (2), то виконується і рівність (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні на ОДЗ. При $x > 0$ застосування формули $\lg x^\alpha = \alpha \lg x$ є рівносильним перетворенням, отже, рівняння (2) і (3) теж рівносильні.

Обґрунтування рівносильності подальших перетворень повністю збігається з аналогічним обґрунтуванням у попередньому прикладі.

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

Розв'язання

►

$$3^x - 8 = 3^{2 - x}, \qquad (1)$$

$$3^x - 8 = \frac{3^2}{3^x}.$$

Заміна: $3^x = t$. Одержуємо

$$t - 8 = \frac{9}{t}, \qquad (2)$$

Коментар

Якщо спочатку подивитися на задане рівняння як на найпростіше логарифмічне, то за означенням логарифма воно рівносильне рівнянню $3^x - 8 = 3^{2 - x}$. Як уже відзначалося (с. 376), ОДЗ заданого рівняння

$$t^2 - 8t - 9 = 0, \qquad (3)$$

$$t_1 = 9,\ t_2 = -1.$$

Обернена заміна дає

$3^x = 9$, $x = 2$ або $3^x = -1$ — коренів немає.

Відповідь: 2. ◁

$3^x - 8 > 0$ для всіх коренів рівняння (1) враховується автоматично, оскільки $3^{2-x} > 0$ завжди. Після цього рівняння (1) розв'язується за схемою розв'язування показникових рівнянь (табл. 51, с. 344).

Оскільки $t = 3^x > 0$, то $t \neq 0$, і тому рівняння (2) рівносильне рівнянню (3).

Приклад 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_3 (y - x) = 1. \end{cases}$

Розв'язання

▶ $\begin{cases} \log_2 (xy) = 2, \\ \log_3 (y - x) = 1. \end{cases}$

За означенням логарифма маємо

$$\begin{cases} xy = 2^2, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Із другого рівняння останньої системи одержуємо $y = x + 3$ і підставляємо в перше рівняння:

$$x(x + 3) = 4,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1,\ x_2 = -4.$$

Тоді $\quad y_1 = 4,\ y_2 = -1.$

П е р е в і р к а. $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4 \end{cases}$ — розв'язок заданої системи.

$$\left(\begin{cases} \log_2 1 + \log_2 4 = 2, \\ \log_3 (4 - 1) = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1 \end{cases} \right).$$

$\begin{cases} x = -4, \\ y = -1 \end{cases}$ — сторонній розв'язок (під знаком логарифма одержуємо від'ємні числа).

Відповідь: (1; 4). ◁

Коментар

Як і логарифмічні рівняння, системи логарифмічних рівнянь можна розв'язувати як за допомогою систем-наслідків (кожен розв'язок першої системи є розв'язком другої), так і за допомогою рівносильних перетворень систем (усі розв'язки кожної з них є розв'язками іншої).

Крім того, при розв'язуванні логарифмічних систем можна використовувати ті самі методи, що і при розв'язуванні інших видів систем (метод алгебраїчного додавання, підстановка деякого виразу з одного рівняння в інші, заміна змінних).

Наприклад, розв'яжемо задану систему за допомогою систем-наслідків. Для цього досить гарантувати, що у випадку, коли задана система складається з правильних рівностей, кожна наступна система також буде містити правильні рівності. Як і для рівнянь, *при використанні систем-наслідків обов'язково необхідно виконати перевірку одержаних розв'язків підстановкою в початкову систему*.

З а у в а ж е н н я. Звичайно, задану систему можна було розв'язувати і за допомогою рівносильних перетворень систем. При цьому довелося б урахувати ОДЗ заданої системи $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \\ y-x>0, \end{cases}$ стежити за рівносильністю виконаних перетворень (у нашому випадку всі записані перетворення є рівносильними на ОДЗ), а в кінці перевіряти, чи задовольняють одержані розв'язки умовам ОДЗ (пара чисел $\begin{cases} x=1, \\ y=4 \end{cases}$ задовольняє умовам ОДЗ, а пара $\begin{cases} x=-4, \\ y=-1 \end{cases}$ не задовольняє умовам ОДЗ).

Приклад 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=2, \\ x^2-y=20. \end{cases}$

Р о з в ' я з а н н я

► ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ y>0, \\ y\neq 1. \end{cases}$

Тоді з першого рівняння маємо

$$\frac{1}{\log_x y}+\log_x y=2.$$

Заміна $t=\log_x y$ дає рівняння

$\frac{1}{t}+t=2,\ \ t^2-2t+1=0,\ \ t=1.$

Обернена заміна дає

$$\log_x y=1,\ \text{тобто}\ y=x.$$

Тоді з другого рівняння системи маємо $x^2-x-20=0$,

$x_1=-4$ (не входить до ОДЗ),

$x_2=5$ (входить до ОДЗ).

Отже, розв'язок заданої системи

$$\begin{cases} x=5, \\ y=5. \end{cases}$$

Відповідь: (5; 5). ◁

К о м е н т а р

Розв'яжемо задану систему за допомогою рівносильних перетворень. Для цього досить врахувати її ОДЗ ($x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1$) і гарантувати, що на кожному кроці було виконано саме рівносильні перетворення рівняння чи всієї системи. У першому рівнянні системи всі логарифми зведемо до однієї основи x (на ОДЗ $x>0,\ x\neq 1$): $\log_y x=\frac{\log_x x}{\log_x y}=\frac{1}{\log_x y}$.

На ОДЗ $y\neq 1$, отже, $\log_x y\neq 0$. Тоді після заміни $t=\log_x y$ маємо $t\neq 0$, і тому перехід у розв'язанні від дробового рівняння до квадратного є рівносильним.

Оскільки заміна (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням, то, замінюючи перше рівняння системи рівносильним йому (на ОДЗ) рівнянням $y=x$, одержуємо систему, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння, користуючись означенням логарифма.

2*. Обґрунтуйте справедливість рівносильного переходу:
$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c \ (a > 0, a \neq 1).$$

3. Поясніть, як можна розв'язати рівняння $\log_5 (x - 2) = \log_5 (x^2 - 2)$:
а) за допомогою рівнянь-наслідків;
б*) за допомогою рівносильних перетворень.

4. Поясніть на прикладі використання заміни змінних при розв'язуванні логарифмічних рівнянь. У яких випадках доцільно використовувати заміну змінних?

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–5)**.

1°. 1) $\log_2 x = 4$; 2) $\log_{0,2} x = -1$; 3) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\lg x = 2$.

2. 1°) $\log_3 (2x - 1) = 2$; 2°) $\log_{\frac{1}{3}} (5x - 21) = -2$;
3) $\log_\pi (x^2 + 2x - 2) = 0$; 4) $\lg (3 - x) = -1$.

3. 1°) $\lg (x + 9) + \lg (2x + 8) = 2$; 2°) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x + 3) = 1$;
3) $2 \log_2 x - \log_2 (3x - 4) = 1$; 4) $\frac{1}{2}\log_5 (x - 4) + \frac{1}{2}\log_5 (2x - 1) = \log_5 3$.

4. 1°) $\log_3^2 x - 4\log_3 x + 3 = 0$; 2°) $\frac{1}{3 - \lg x} + \frac{1}{1 + \lg x} = 1$;
3) $\log_3^2 x + \log_3 x^2 = 8$; 4) $\lg^3 x^2 = 8 \lg x$.

5. 1) $\log_2 (10 - 2^x) = x + 2$; 2) $\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$;
3) $\log_7 (6 + 7^{-x}) = 1 + x$; 4) $\log_2 2 (4 \cdot 3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1$.

6. Розв'яжіть графічно рівняння:
1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_3 x = \log_{\frac{1}{2}} x$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 4) $\lg x = 11 - x$.
Перевірте підстановкою, що знайдене значення x дійсно є коренем рівняння.

7*. Доведіть, що рівняння, наведені в завданні 6, не мають інших коренів, крім знайдених графічно.

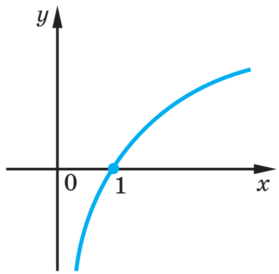
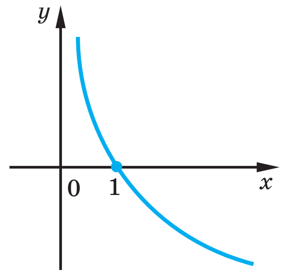
8. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \lg(xy) = 3, \\ \lg x \cdot \lg y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 (y - 1) = 3, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$

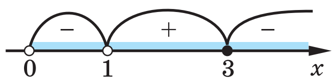
3) $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 2, \\ \log_2 (x + y - 3) = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$

33.2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 56

1. Графік функції $y=\log_a x\ (a>0;\ a\neq 1)$	
$a>1$	$0<a<1$
 зростає	 спадає
2. Рівносильні перетворення найпростіших логарифмічних нерівностей	
$a>1$	$0<a<1$
$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x),\\ g(x)>0.\end{cases}$ *Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ.*	$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>0,\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x),\\ f(x)>0.\end{cases}$ *Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ.*
Приклади	
$\log_2(x-5)>3$. ▶ ОДЗ: $x-5>0$, тобто $x>5$. $\log_2(x-5)>\log_2 2^3$. Функція $y=\log_2 t$ є зростаючою, отже, $x-5>2^3$, $x>13$. Враховуючи ОДЗ, маємо $x>13$. *Відповідь:* $(13;+\infty)$. ◁	$\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>3$. ▶ ОДЗ: $x-5>0$, тобто $x>5$. $\log_{\frac{1}{2}}(x-5)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$. Функція $y=\log_{\frac{1}{2}} t$ є спадною, отже, $x-5<\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x<5\frac{1}{8}$. Враховуючи ОДЗ, маємо $5<x<5\frac{1}{8}$. *Відповідь:* $\left(5;\ 5\frac{1}{8}\right)$. ◁

Продовж. табл. 56

3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей	
Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду. *Схема рівносильних перетворень нерівності:* 1. **Враховуємо ОДЗ** заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ). 2. Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.**	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x > 0$. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$. *Заміна* $\lg x = t$ дає нерівність $(1+t)^2 - t \geqslant 3$, тобто $t^2 + t - 2 \geqslant 0$, розв'язки якої $t \leqslant -2$ або $t \geqslant 1$ (див. рисунок).  Обернена заміна дає $\lg x \leqslant -2$ або $\lg x \geqslant 1$. Тоді $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ або $\lg x \geqslant \lg 10$. Враховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо: $x \leqslant 10^{-2}$ або $x \geqslant 10$. Після врахування ОДЗ маємо: $0 < x \leqslant 0{,}01$ або $x \geqslant 10$. *Відповідь:* $(0;\ 0{,}01] \cup [10; +\infty)$. ◁
II. Застосовується загальний метод інтервалів (задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) \gtrless 0$) і використовується схема: 1. **Знайти ОДЗ.** 2. **Знайти нулі $f(x)$.** 3. **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.** 4. **Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.**	$\log_x(2x+3) < 2.$ ▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Вона рівносильна нерівності $\log_x(2x+3) - 2 < 0.$ Позначимо $f(x) = \log_x(2x+3) - 2$. 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ Тобто $\begin{cases} x>0, \\ x \neq 1. \end{cases}$ 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $\log_x(2x+3) - 2 = 0$. Тоді $\log_x(2x+3) = 2$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню $2x + 3 = x^2$ (яке одержуємо за означенням логарифма). Тобто $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. До ОДЗ входить тільки $x = 3$, отже, $f(x)$ має тільки єдиний нуль функції $x = 3$. 3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) < 0$.  *Відповідь:* $x \in (0;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей. *Найпростішими логарифмічними нерівностями* звичайно вважають нерівності виду

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ (де } a > 0 \text{ і } a \neq 1). \qquad (1)$$

Для розв'язування такої нерівності можна використати рівносильні перетворення. Для цього необхідно врахувати її ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ і розглянути два випадки: основа логарифма більша за 1 чи основа менша за 1 (але більша за 0).

I. При $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ зростає на всій своїй області визначення (тобто при $t > 0$), і тому більшому значенню функції відповідає більше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргументу (у даному випадку переходячи до виразів, які стоять під знаком логарифма), ми повинні залишити той самий знак нерівності, тобто

$$f(x) > g(x). \qquad (2)$$

Враховуючи, що на ОДЗ вказаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (більшому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що на ОДЗ нерівність (1) рівносильна нерівності (2). Коротко це можна записати так:

$$\text{При } a > 1 \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), & (2) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$$

II. При $0 < a < 1$ логарифмічна функція $y = \log_a t$ спадає на всій своїй області визначення (тобто при $t > 0$), і тому більшому значенню функції відповідає менше значення аргументу. Отже, переходячи в нерівності (1) від значень функції до значень аргументу, ми повинні знак нерівності змінити на протилежний, тобто

$$f(x) < g(x). \qquad (5)$$

Враховуючи, що на ОДЗ вказаний перехід можна виконати й у зворотному напрямку (меншому додатному значенню аргументу відповідає більше значення функції), одержуємо, що при $0 < a < 1$ нерівність (1) на її ОДЗ рівносильна нерівності (5). Коротко це можна записати так:

$$\text{При } 0 < a < 1 \quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), & (5) \\ f(x) > 0, & (3) \\ g(x) > 0. & (4) \end{cases}$$

Підсумовуючи одержані результати, відзначимо, що

> ***для розв'язування нерівності*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ***за допомогою рівносильних перетворень необхідно враховувати її ОДЗ, а при переході від значень функції до значень аргументу (тобто до виразів, які стоять під знаком логарифма) враховувати значення*** a:
> ***при*** $a > 1$ ***знак нерівності не змінюється,***
> ***при*** $0 < a < 1$ ***знак нерівності змінюється на протилежний).*** ○

Приклади використання цих орієнтирів наведено в таблиці 56.

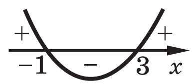
З а у в а ж е н н я. Системи нерівностей, які одержано для випадків (I) і (II), можна дещо спростити. Наприклад, якщо в системі з випадку I виконуються нерівність (2): $f(x) > g(x)$ і нерівність (4): $g(x) > 0$, то з цих нерівностей випливає, що $f(x) > 0$. Отже, нерівність (3) цієї системи автоматично виконується, коли виконуються нерівності (2) і (4), і її можна не записувати до цієї системи (див. пункт 2 табл. 56).

Аналогічно обґрунтовується, що в системі з випадку II нерівність (4) є наслідком нерівностей (3) і (5), і її теж можна не записувати до системи.

Наприклад, розв'яжемо нерівність $\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3$.

▶ $$\log_5(x^2 - 2x) > \log_5 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 3.$$

(ОДЗ заданої нерівності $x^2 - 2x > 0$ враховано автоматично, оскільки, якщо виконується нерівність $x^2 - 2x > 3$, то виконується і нерівність $x^2 - 2x > 0$.)



Розв'язуємо нерівність $x^2 - 2x > 3$. Тоді $x^2 - 2x - 3 > 0$, отже (див. рисунок), $x < -1$ або $x > 3$ — розв'язок заданої нерівності (звичайно, його можна записати і так: $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$). ◁

2. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей виконується або за допомогою рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або за допомогою методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

> **1)** ***враховуємо ОДЗ заданої нерівності;***
> **2)** ***стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.***

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде і розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).

Приклади розв'язування логарифмічних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень і методу інтервалів і оформлення такого розв'язування наведено в таблиці 56. Розглянемо ще кілька прикладів.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть нерівність $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$.

Коментар

Розв'яжемо задану нерівність за допомогою рівносильних перетворень. Як і для рівнянь, для цього досить *врахувати ОДЗ заданої нерівності і стежити за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.* Оскільки на ОДЗ вирази, що стоять під знаком логарифмів, є додатними, то формулу $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ для додатних b і c можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках. Отже, виконуючи перетворення нерівності за цією формулою, одержимо нерівність, рівносильну заданій (на її ОДЗ).

Щоб використати властивості логарифмічної функції, запишемо число (-1) як значення логарифмічної функції: $-1=\log_{0,2}(0,2)^{-1}$ (зрозуміло, що і цю формулу можна використовувати як у прямому, так і у зворотному напрямках) і врахуємо, що $(0,2)^{-1}=\left(\frac{2}{10}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=5$.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x-1>0,\\ x+3>0.\end{cases}$ Тоді $x>1$.

На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{0,2}((x-1)(x+3))\geqslant\log_{0,2}(0,2)^{-1}.$$

Функція $y=\log_{0,2}t$ є спадною, отже, $(x-1)(x+3)\leqslant(0,2)^{-1}$.

Одержуємо $x^2+2x-3\leqslant 5$, $x^2+2x-8\leqslant 0$.

Остання нерівність має розв'язки:

$-4\leqslant x\leqslant 2$ (див. рисунок).

Враховуючи ОДЗ, одержуємо $1<x\leqslant 2$.

Відповідь: (1; 2]. ◁

Приклад 2* Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>-1$.

Розв'язання

▶ $$\log_{\frac{1}{3}}\log_2\frac{x-1}{2-x}>\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

Враховуючи ОДЗ заданої нерівності і те, що функція $y=\log_{\frac{1}{3}}t$ спадає, одержуємо

Коментар

ОДЗ заданої нерівності задається системою

$$\begin{cases}\log_2\frac{x-1}{2-x}>0, & (6)\\ \frac{x-1}{2-x}>0. & (7)\end{cases}$$

$$0<\log_2\frac{x-1}{2-x}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, \qquad (2)$$

тобто $0<\log_2\frac{x-1}{2-x}<3.$

Тоді $\log_2 1<\log_2\frac{x-1}{2-x}<\log_2 2^3.$

Враховуючи, що функція $y=\log_2 t$ зростає, одержуємо

$$1<\frac{x-1}{2-x}<2^3. \qquad (3)$$

Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases}\frac{x-1}{2-x}>1,\\ \frac{x-1}{2-x}<8,\end{cases}$ яка рівносильна системі

$$\begin{cases}\frac{2x-3}{2-x}>0, & (4)\\ \frac{9x-17}{2-x}<0. & (5)\end{cases}$$

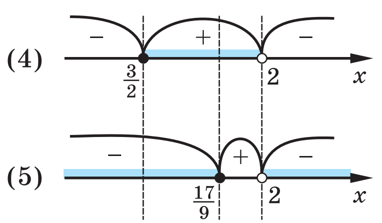
Розв'язуємо нерівності (4) і (5) методом інтервалів і знаходимо їх спільний розв'язок (див. рисунок).

Для нерівності (4) ОДЗ: $x\neq 2$,

нулі функції $f(x)=\frac{2x-3}{2-x}$: $x=\frac{3}{2}$.

Для нерівності (5) ОДЗ: $x\neq 2$,

нулі функції $g(x)=\frac{9x-17}{2-x}$: $x=\frac{17}{9}$.



Відповідь: $\left(\frac{3}{2};\ \frac{17}{9}\right)$. ◁

При виконанні рівносильних перетворень головне не записати ОДЗ, а врахувати її в процесі розв'язування. При переході від нерівності (1) до нерівності (2) у запису останньої нерівності залишається вираз $\log_2\frac{x-1}{2-x}$, для якого ОДЗ: $\frac{x-1}{2-x}>0$. Отже, при такому переході обмеження (7) буде неявно враховане і тому досить врахувати тільки обмеження (6) (що і зроблено в лівій частині нерівності (2)). Щоб використати властивості відповідних логарифмічних функцій, записуємо спочатку

$$-1=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

(і враховуємо, що $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=3$), а потім $0=\log_2 1$ і $3=\log_2 2^3$.

При переході від нерівності (2) до нерівності (3) одержуємо, що $\frac{x-1}{2-x}>1$, отже, і в цьому випадку нерівність (7) врахована автоматично. Для знаходження спільних розв'язків нерівностей (4) і (5) зручно їх розв'язання методом інтервалів розмістити одне над одним так, щоб однаково позначені точки знаходилися одна над одною. Тоді з наведеного рисунка зразу зчитується спільний розв'язок системи нерівностей.

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати найпростіші логарифмічні нерівності, користуючись властивостями логарифмічної функції.

2*. Обґрунтуйте справедливість рівносильних переходів:

1) при $a > 1$ $\qquad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0; \end{cases}$

2) при $0 < a < 1$ $\qquad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

3. Поясніть на прикладі використання методу інтервалів при розв'язуванні логарифмічних нерівностей.

Вправи

Розв'яжіть нерівність **(1–6)**.

1°. 1) $\log_3 x > 2$; 2) $\log_{0,2} x > -1$; 3) $\log_{0,5} x < 1$; 4) $\lg x < 2$.

2. 1) $\log_2(3x-2) > 2$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) > -2$; 3) $\log_5(3x-2) < 2$; 4) $\log_{\frac{1}{4}}(2x+1) > -1$.

3°. 1) $\lg(2x-1) > \lg(x+2)$; 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+1) > \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$; 3) $\log_{0,2} x < \log_{0,2}(3x-6)$; 4) $\log_4(2x-1) \leqslant \log_4(x+3)$.

4. 1) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 0$; 2) $\dfrac{1}{3-\lg x} + \dfrac{1}{1+\lg x} > 1$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 4 \leqslant 0$; 4) $\log_{\frac{1}{2}}^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \geqslant 0$.

5. 1) $\lg x + \lg(x-9) > 1$; 2) $\log_{0,1}(x+4) + \log_{0,1}(x-5) \leqslant -1$; 3) $\log_2(x^2 - x - 12) < 3$; 4) $\log_\pi(x+1) + \log_\pi x \geqslant \log_\pi 2$.

6*. 1) $\log_3 \log_2 \log_{0,5} x \geqslant 0$; 2) $\log_x \sqrt{x+12} > 1$; 3) $\log_2 x + \log_x 2 \leqslant 2,5$; 4) $\log_{\frac{2x-1}{x-3}} 3 < 0$.

§ 34 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВИХ РІВНЯНЬ ТА НЕРІВНОСТЕЙ

Таблиця 57

<table>
<tr><td colspan="2">Показниково-степеневі рівняння</td></tr>
<tr><td colspan="2">Показниково-степеневими рівняннями звичайно називають рівняння, що містять вирази виду $(f(x))^{g(x)}$, тобто рівняння виду $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}$ (основою степенів, які стоять у лівій і правій частинах показниково-степеневого рівняння є $f(x)$ — вираз із змінною).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Основні способи розв'язування рівняння $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{\varphi(x)}$</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td colspan="2">I. $f(x)>0$</td></tr>
<tr><td>Якщо можливо, використовуємо основну логарифмічну тотожність у вигляді $a^{\log_a N}=N$ $(a>0,\ a\neq 1,\ N>0)$</td><td>1. ▶ $x^{\log_x (x+1)}=x^2-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x+1=x^2-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\neq 1, \\ x_1=-1 \text{ або } x_2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
<tr><td>Якщо можливо, логарифмуємо обидві частини рівняння за числовою основою або подаємо всі степені як степені з однією і тією самою числовою основою за формулою
$U(x)=a^{\log_a U(x)}$,
де $(a>0,\ a\neq 1,\ U(x)>0)$</td><td>2. $x^{2\lg x+1}=100x.$
▶ На ОДЗ $(x>0)$ обидві частини рівняння додатні, тому після логарифмування за основою 10 одержуємо рівняння, рівносильне даному:
$\lg(x^{2\lg x+1})=\lg(100x).$
Звідси
$(2\lg x+1)\lg x=\lg 100+\lg x.$
Заміна: $\lg x=t$. $(2t+1)t=2+t$, $t^2=1$, $t_1=1$, $t_2=-1$. Тоді $\lg x=1$ або $\lg x=-1$, тобто $x_1=10$, $x_2=0{,}1$ (обидва корені входять до ОДЗ).
Відповідь: 10; 0,1. ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 57

II. $f(x)$ — довільний вираз	
Два степені з однаковими основами $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *можуть бути рівні в одному з чотирьох випадків:* 1) $f(x) = -1$ *і для коренів цього рівняння* $g(x)$ *та* $\varphi(x)$ *— цілі числа однакової парності;* 2) $f(x) = 0$ *і для коренів цього рівняння* $g(x) > 0$ *та* $\varphi(x) > 0$; 3) $f(x) = 1$ *і для коренів цього рівняння* $g(x)$ *та* $\varphi(x)$ *існують;* 4) $g(x) = \varphi(x)$ *і для коренів цього рівняння існують* $(f(x))^{g(x)}$ *та* $(f(x))^{\varphi(x)}$.	**3.** $x^{2x+4} = x^{20}$. ► Якщо вважати основу x числом, то *спочатку розглянемо три особливих випадки* (*основа степеня дорівнює* -1; 0; 1), *а потім прирівняємо показники степенів*: 1) при $x = -1$: $(-1)^2 = (-1)^{20}$ — правильна рівність; 2) при $x = 0$: $0^4 = 0^{20}$ — правильна рівність; 3) при $x = 1$: $1^6 = 1^{20}$ — правильна рівність; 4) при $2x + 4 = 20$, тобто $x = 8$: $8^{20} = 8^{20}$ — правильна рівність. *Відповідь:* -1; 0; 1; 8. Зауваження. Якщо вважати основу x змінною, то функція $f(x) = x^{2x+4}$ вважається означеною лише при $x > 0$. З цього погляду дане рівняння має тільки корені 1 і 8, і тоді одержуємо таку відповідь. *Відповідь:* 1; 8. ◁ Тобто відповідь до такого рівняння не можна записати однозначно.

Пояснення й обґрунтування

Показниково-степеневими рівняннями та нерівностями звичайно називають рівняння і нерівності, що містять вирази виду $f(x)^{g(x)}$ (тобто змінна входить і до основи, і до показника степеня).

Аналізуючи показниково-степеневі рівняння, представлені в таблиці 57, слід пам'ятати, що в шкільному курсі математики поняття рівняння на різних етапах вводилося по-різному. А саме: у 4–5 класах рівнянням називалася *числова рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою*. Значення невідомого, при якому рівняння перетворюється на правильну числову рівність, називалося *коренем* або *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, для рівняння $2x = 6$ коренем є значення $x = 3$.

З точки зору наведеного означення у рівнянні $2x = 6$ літерою x позначено хоча і невідоме нам, але конкретне число, тому x може набувати тільки єдиного значення ($x = 3$). Але таке означення утруднює в подальшому роботу з рівнянням. Коли x набуває тільки єдиного значення, ми не можемо використовувати, наприклад, графічне розв'язування рівняння (маючи тільки одне значення x, неможливо одержати графік $y = 2x$ як пряму лінію на площині). Тому, починаючи з 6–7 класу, *рівняння* означається як *рівність із змінною* (а коренем або розв'язком рівняння відповідно називається таке значення змінної, при якому це рівняння перетворюється на правильну числову рівність). Тепер x у тому самому рівнянні $2x = 6$ — це змінна, для якої немає жодного обмеження, і через те x може бути будь-яким числом (ОДЗ рівняння: $x \in \boldsymbol{R}$). При такому підході кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної $2x$. Отже, це рівняння можна розв'язати графічно, побудувавши графіки функцій $y = 2x$ і $y = 6$. Крім того, при такому підході можна записати рівняння в загальному вигляді як рівність $f(x) = \varphi(x)$ і обґрунтовано використовувати властивості функцій для розв'язування рівнянь.

Для всіх видів рівнянь, які розглядалися в курсі алгебри чи алгебри і початків аналізу, наведені два означення рівняння приводять до одного й того самого результату при розв'язуванні рівнянь. Але у випадку показниково-степеневого рівняння інколи можна отримати різні відповіді, використовуючи різні підходи до означення рівняння.

Наприклад, розглянемо рівняння $x^{2x+1} = x^5$.

▶ Якщо розглядати таке рівняння як числову рівність, то два степені з однаковою основою x можуть бути рівними тільки в одному з чотирьох випадків. А саме: якщо основою степеня є значення -1; 0; 1 ($x = -1$, $x = 0$, $x = 1$), то степені можуть бути рівними навіть тоді, коли їх показники будуть різними (звичайно, якщо ці степені існують). У всіх інших випадках степені з однаковою основою будуть рівними тільки тоді, коли показники цих степенів будуть рівними ($2x + 1 = 5$, тобто $x = 2$). Отже, для одержання всіх коренів заданого рівняння досить перевірити значення x, рівні -1; 0; 1; 2. Всі ці числа є коренями, бо при підстановці кожного з них у задане рівняння воно перетворюється на правильну числову рівність.
Якщо ж розглядати це рівняння як рівність із змінною і стати на функціональну точку зору, то функція $f(x) = x^{2x+1}$, як правило, вважається означеною тільки при $x > 0$, і тоді задане рівняння має тільки два корені: 1 і 2. ◁

Отже, до розглянутого рівняння відповідь не можна записати однозначно (оскільки кожен із указаних підходів до означення рівняння має право на існування і реально використовується в математиці). Тому в подібних ситуаціях доводиться наводити обидва варіанти відповіді.

Аналогічний приклад наведено в таблиці 57.

Узагальнюючи наведені вище міркування, зазначимо, що в тому випадку, коли при розв'язуванні рівняння виду $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ *з умови не випливає, що основа степеня* $f(x) > 0$, *доводиться розглядати три особливих випадки: основа* $f(x)$ *дорівнює* -1, 0, 1 (*зрозуміло, що в цих випадках степені* $(f(x))^{g(x)}$ *і* $(f(x))^{\varphi(x)}$ *можуть бути рівними навіть тоді, коли показники* $g(x)$ *і* $\varphi(x)$ *різні*), *а потім прирівняти показники* ($g(x) = \varphi(x)$). Якщо ж з умови випливає, що $f(x) > 0$, то розглядаємо тільки один особливий випадок — основа степеня дорівнює 1 ($f(x) = 1$) — і прирівнюємо показники степенів ($g(x) = \varphi(x)$).

Наприклад, розглянемо рівняння $(x^2 - 1)^{3x-7} = (x^2 - 1)^8$.

▶ З умови не випливає, що основа степеня $x^2 - 1 > 0$, отже, доводиться розглядати всі випадки.

1) Якщо $x^2 - 1 = -1$, то $x^2 = 0$, отже, $x = 0$.
Підставляючи це значення в задане рівняння, маємо $(-1)^{-7} = (-1)^8$, тобто $-1 = 1$ (неправильна рівність), отже, $x = 0$ не є коренем заданого рівняння.
2) Якщо $x^2 - 1 = 0$, тобто $x = \pm 1$, то при цих значеннях x задане рівняння перетворюється на неправильну числову рівність (оскільки значення виразів 0^{-4} та 0^{-10} не існують). Отже, числа 1 і –1 не є коренями даного рівняння.
3) Якщо $x^2 - 1 = 1$, тобто $x = \pm\sqrt{2}$, то задане рівняння перетворюється на правильну рівність ($1 = 1$), отже, $x = \pm\sqrt{2}$ — корені даного рівняння.
4) Прирівняємо показники степенів заданого рівняння (основи степенів у лівій і правій частинах рівняння однакові): $3x - 7 = 8$, тоді $x = 5$ (при підстановці отримуємо правильну рівність $24^8 = 24^8$).
Об'єднуючи одержані результати, отримуємо відповідь.

Відповідь: $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; 5. ◁

З а у в а ж е н н я. При $f(x) > 0$ для розв'язування рівняння $(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$ можна прологарифмувати обидві його частини за будь-якою числовою основою, одержати рівносильне рівняння, у якому вже не доведеться розглядати особливий випадок — він буде врахований автоматично. Це пов'язано з тим, що функція $y = a^x$ при $a > 0$ має особливий випадок, якщо $a = 1$ (див. графік функції $y = a^x$ при $a > 0$ на с. 338), а функція $y = \log_b x$ (де $b > 0$, $b \neq 1$) особливих випадків не має.

Також зауважимо, що *при розв'язуванні нерівностей виду* $(f(x))^{g(x)} > (f(x))^{\varphi(x)}$, як правило, використовують функціональний підхід і *вважають, що* $f(x) > 0$.

Відзначимо, що в тих випадках, *коли до показниково-степеневого рівняння входять вирази виду* $a^{\log_a N}$, *то для розв'язування такого рівняння може використовуватися основна логарифмічна тотожність*. У цьому випадку слід враховувати ОДЗ заданого рівняння (див. приклад 1 у табл. 57).

Досить часто для розв'язування показниково-степеневих рівнянь використовується логарифмування обох частин. Звичайно, це можна зробити тільки тоді, коли на ОДЗ заданого рівняння обидві частини рівняння додатні (див. приклад 2 у табл. 57).

Наведемо ще кілька прикладів розв'язування показниково-степеневих рівнянь і нерівностей.

Приклади розв’язання завдань

Приклад 1 Розв’яжіть рівняння $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1$.

Розв’язання

Оскільки $x = 3$ не є коренем заданого рівняння (0^0 не існує), то при $x \neq 3$ обидві його частини додатні. Після логарифмування (за основою 10) обох частин заданого рівняння одержуємо рівносильні йому рівняння:

$$\lg|x-3|^{3x^2-10x+3}=\lg 1,$$

$$(3x^2-10x+3)\lg|x-3|=0,$$

$$3x^2-10x+3=0 \text{ або } \lg|x-3|=0.$$

З першого одержаного рівняння маємо $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=3$ (не є коренем), а з другого $|x-3|=1$, тоді $x-3=1$ або $x-3=-1$. Тобто $x=4$ або $x=2$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$; 2; 4. ◁

Коментар

Оскільки $|x-3| \geqslant 0$, то з особливих випадків можна розглянути тільки один — основа дорівнює 0 ($|x-3|=0$, тобто $x=3$). Щоб не розглядати випадок, коли основа дорівнює 1, досить при $x \neq 3$ прологарифмувати обидві частини рівняння за числовою основою (наприклад, за основою 10).

При $x \neq 3$ обидві частини заданого рівняння додатні, тому після логарифмування одержуємо рівняння, рівносильне заданому. Оскільки всі подальші перетворення є рівносильними (при $x \neq 3$), то всі одержані розв’язки (які не дорівнюють 3) є коренями заданого рівняння.

Приклад 2 Розв’яжіть рівняння $5^{\log_2 x}+x^{\log_2 5}=10$.

Коментар

Прологарифмувати обидві частини заданого рівняння не вдається (у лівій частині стоїть сума), тому спробуємо всі степені подати як степені з однією і тією самою числовою основою. Враховуючи, що в заданому рівнянні є логарифм за основою 2, подамо всі задані степені як степені з основою 2 за формулою $u=a^{\log_a u}$, де $u>0$, $a>0$, $a\neq 1$. Тоді

$$5^{\log_2 x}=2^{\log_2\left(5^{\log_2 x}\right)}=2^{\log_2 x\log_2 5}, \qquad (1)$$

$$x^{\log_2 5}=2^{\log_2\left(x^{\log_2 5}\right)}=2^{\log_2 5\log_2 x}$$

(тобто доданки, які стоять у лівій частині заданого рівняння, однакові). Після одержання рівняння (2) (див. розв’язання) можна використати рівність (1) справа наліво. Можна також записати праву частину рівняння (2) як степінь числа 2 або прологарифмувати обидві його частини за основою 2.

Р о з в ' я з а н н я

► ОДЗ: $x > 0$. На цій ОДЗ задане рівняння, рівносильне рівнянням:

$$2^{\log_2 x \log_2 5} + 2^{\log_2 5 \log_2 x} = 10,$$

$$2 \cdot 2^{\log_2 x \log_2 5} = 10,$$

$$2^{\log_2 x \log_2 5} = 5, \qquad (2)$$

$$5^{\log_2 x} = 5,$$

$$\log_2 x = 1, \quad x = 2 \text{ (входить до ОДЗ).}$$

Відповідь: 2. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

К о м е н т а р

Використаємо рівносильні перетворення системи. Для цього врахуємо ОДЗ і простежимо за тим, щоб на цій ОДЗ всі перетворення рівнянь як у прямому, так і в зворотному напрямках зберігали правильні рівності.

У першому рівнянні заданої системи запишемо всі степені як степені з основою 3 (див. вище коментар до прикладу 2). Після рівносильних (на ОДЗ) перетворень першого рівняння одержуємо систему (1) (див. розв'язання), до якої змінні входять тільки у вигляді $\log_3 x$ і $\log_3 y$, тому зручно використати заміну змінних. Після оберненої заміни застосовуємо означення логарифма.

Р о з в ' я з а н н я

► ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$ На цій ОДЗ перше рівняння заданої системи рівносильне рівнянням: $3^{\log_3\left(x^{\log_3 y}\right)} + 3^{\log_3\left(y^{\log_3 x}\right)} = 18,\quad 3^{\log_3 y \log_3 x} + 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18,$

$$2 \cdot 3^{\log_3 x \log_3 y} = 18, \quad 3^{\log_3 x \log_3 y} = 9, \quad 3^{\log_3 x \log_3 y} = 3^2, \quad \log_3 x \log_3 y = 2.$$

Тоді задана система рівносильна системі

$$\begin{cases} \log_3 x \log_3 y = 2, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Заміна $\log_3 x = u$, $\log_3 y = v$ дає систему $\begin{cases} uv = 2, \\ u + v = 3. \end{cases}$

З другого рівняння останньої системи $v = 3 - u$, тоді з першого рівняння $u(3 - u) = 2$, тобто $u^2 - 3u + 2 = 0$. Звідси $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Тоді $v_1 = 2$, $v_2 = 1$.

Обернена заміна дає $\begin{cases} \log_3 x = 1, \\ \log_3 y = 2 \end{cases}$ або $\begin{cases} \log_3 x = 2, \\ \log_3 y = 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x = 3, \\ y = 9 \end{cases}$ або $\begin{cases} x = 9, \\ y = 3 \end{cases}$ (знайдені розв'язки входять до ОДЗ).

Відповідь: (3; 9), (9; 3). ◁

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $|x-4|^{\lg(x-2)} \geqslant |x-4|^{\lg(6-x)}$.

I спосіб

Коментар

Спробуємо виконати рівносильні перетворення заданої нерівності, використовуючи міркування, аналогічні тим, що застосовувалися при розв'язуванні показниково-степеневих рівнянь (див. пункт II таблиці 57). Оскільки $|x-4| \geqslant 0$, то з особливих випадків потрібно розглянути тільки два: основа дорівнює 0 (тобто $x = 4$) і основа дорівнює 1 (тобто $|x-4| = 1$). При інших значеннях x основа — додатне число, що не дорівнює 1. Розглянемо два випадки: 1) основа більша за 1 (при переході до показників у заданій нерівності знак нерівності не змінюється); 2) основа менша за 1, але більша за 0 (при переході від степенів до показників у заданій нерівності знак нерівності змінюється на протилежний). При таких перетвореннях одержуємо нерівності, рівносильні заданій (на її ОДЗ), оскільки можемо гарантувати правильність не тільки прямих, а й зворотних переходів.

При розв'язуванні одержаних найпростіших логарифмічних нерівностей враховуємо, що функція $y = \lg t$ є зростаючою.

До відповіді слід включити всі розв'язки одержаних систем нерівностей і всі особливі значення, які є розв'язками заданої нерівності.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ 6-x>0, \end{cases}$ тобто $2 < x < 6$.

При $x = 4$ задана нерівність виконується ($0^{\lg 2} \geqslant 0^{\lg 2}$, $0 \geqslant 0$ — правильна нерівність), отже, $x = 4$ — один із розв'язків цієї нерівності.

Якщо $|x-4| = 1$ (тобто $x - 4 = 1$ або $x - 4 = -1$, отже, $x = 5$ або $x = 3$ — ці значення входять до ОДЗ), то задана нерівність теж виконується. При $x = 5$ і $x = 3$ одержуємо правильну нерівність $1 \geqslant 1$. Отже, ці числа теж є розв'язками заданої нерівності.

При $x \neq 4$, $x \neq 5$ і $x \neq 3$ на ОДЗ задана нерівність рівносильна такій сукупності систем:

$$\begin{cases} |x-4|>1, \\ \lg(x-2) \geqslant \lg(6-x) \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 0<|x-4|<1, \\ \lg(x-2) \leqslant \lg(6-x). \end{cases}$$

Тобто $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ x-4<-1 \text{ або } x-4>1, \\ x-2 \geqslant 6-x \end{cases}$ або $\begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2<x<6, \\ -1<x-4<1, \\ x-2 \leqslant 6-x. \end{cases}$

$$\text{Тоді} \begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2 < x < 6, \\ x < 3 \text{ або } x > 5, \\ x \geqslant 4 \end{cases} \quad \text{або} \begin{cases} x \neq 4, \\ x \neq 5, \\ x \neq 3, \\ 2 < x < 6, \\ 3 < x < 5, \\ x \leqslant 4. \end{cases}$$

Отже, $5 < x < 6$ або $3 < x < 4$. Враховуючи особливі значення, які є розв'язками, одержуємо: $3 \leqslant x \leqslant 4$ або $5 \leqslant x < 6$.

Відповідь: $[3;\ 4] \cup [5;\ 6)$. ◁

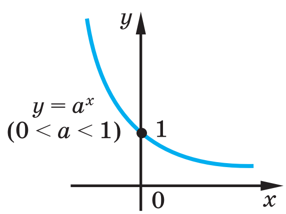
<u>II спосіб</u> розв'язування нерівності $|x-4|^{\lg(x-2)} \geqslant |x-4|^{\lg(6-x)}$.

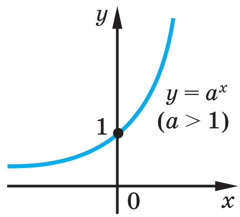
К о м е н т а р

Розв'яжемо задану нерівність методом інтервалів, для цього зведемо її до виду $f(x) \geqslant 0$.

Для знаходження нулів $f(x)$ потрібно розв'язати показниково-степеневе рівняння (2). Оскільки $|x-4| \geqslant 0$, то з особливих випадків потрібно розглянути тільки два — основа дорівнює 0 (тобто $x = 4$) або основа дорівнює 1 (тобто $|x-4| = 1$). При інших значеннях x з ОДЗ у рівнянні (3) основа — додатне число, що не дорівнює 1. Тоді можна прирівняти показники степенів (одержуємо рівняння, рівносильне заданому).

Для знаходження знаків $f(x)$ зручно використати графіки функції $y = a^x$ при $0 < a < 1$ і при $a > 1$.





Р о з в' я з а н н я

▶ 1. ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0; \\ 6-x>0, \end{cases}$ тобто $2 < x < 6$.

На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівності

$$|x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)} \geqslant 0. \qquad (1)$$

2. Нехай $f(x) = |x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)}$. Нулі $f(x)$:

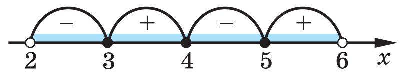
$$|x-4|^{\lg(x-2)} - |x-4|^{\lg(6-x)} = 0. \qquad (2)$$

На ОДЗ рівняння (2) рівносильне рівнянню

$$|x-4|^{\lg(x-2)} = |x-4|^{\lg(6-x)}. \qquad (3)$$

При $x = 4$ рівність (3) виконується ($0^{\lg 2} = 0^{\lg 2}$; $0 = 0$ — правильна рівність), отже, $x = 4$ — корінь рівняння (3).
Якщо $|x - 4| = 1$ (тобто $x - 4 = 1$ або $x - 4 = -1$, отже, $x = 5$ або $x = 3$), рівність (3) теж виконується. При $x = 5$ і $x = 3$ одержуємо правильну рівність $1 = 1$. Отже, ці числа теж є коренями рівняння (3).
При $x \neq 4$, $x \neq 5$ і $x \neq 3$ на ОДЗ рівняння (3) рівносильне рівнянню $\lg(x-2) = \lg(6-x)$. Тоді $x - 2 = 6 - x$, отже, $x = 4$ — не задовольняє умові $x \neq 4$. Тобто на останній множині рівняння (3) коренів не має.

3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ на кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (див. рисунок).



Відповідь: $[3;\ 4] \cup [5;\ 6)$. ◁

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $x^{\log_a x+1} > a^2 x$.

Коментар

На ОДЗ обидві частини нерівності є додатними, тому спробуємо прологарифмувати обидві частини нерівності. Оскільки до заданої нерівності вже входить $\log_a x$, то зручно прологарифмувати за основою a. Але при логарифмуванні за основою, більшою за 1, знак нерівності не змінюється, а при логарифмуванні за основою, меншою за 1, знак нерівності змінюється. Доводиться розглядати два випадки (у кожному з них одержуємо нерівність, рівносильну заданій на її ОДЗ).

Розв'язання

▶ ОДЗ: $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.
Прологарифмуємо обидві частини нерівності.

1) При $a > 1$ задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівностям:

$$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) > \log_a\left(a^2 x\right),\quad (\log_a x + 1)\log_a x > \log_a a^2 + \log_a x,$$

$$\log_a^2 x + \log_a x > 2 + \log_a x,\quad \log_a^2 x > 2.$$

$$\text{Отже, } \log_a x < -\sqrt{2} \text{ або } \log_a x > \sqrt{2}.$$

$$\text{Тобто } \log_a x < \log_a a^{-\sqrt{2}} \text{ або } \log_a x > \log_a a^{\sqrt{2}}.$$

Враховуючи ОДЗ ($x > 0$) і те, що $a > 1$, одержуємо $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$ або $x > a^{\sqrt{2}}$.

2) При $0 < a < 1$ задана нерівність на її ОДЗ рівносильна нерівностям:

$$\log_a\left(x^{\log_a x+1}\right) < \log_a\left(a^2 x\right),\quad (\log_a x + 1)\log_a x < \log_a a^2 + \log_a x,$$

$$\log_a^2 x + \log_a x < 2 + \log_a x,\quad \log_a^2 x < 2.$$

$$\text{Отже, } -\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}.$$

Тобто $\log_a a^{-\sqrt{2}} < \log_a x < \log_a a^{\sqrt{2}}$.

Враховуючи ОДЗ ($x > 0$) і те, що $0 < a < 1$, одержуємо $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

Відповідь: 1) при $a > 1$ $x \in \left(0; a^{-\sqrt{2}}\right) \cup \left(a^{\sqrt{2}}; +\infty\right)$; 2) при $0 < a < 1$ $x \in \left(a^{\sqrt{2}}; a^{-\sqrt{2}}\right)$. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна розв'язувати показниково-степеневі рівняння.
2. Поясніть, чому при переході від рівняння $x^{\lg x} = x^2$ до рівняння $\lg x = 2$ (основи рівні — прирівняли показники) губиться корінь заданого рівняння.

Вправи

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg x} = x^3$; 2) $x^{2\lg x} - 10x = 0$; 3) $x^{2\log_{16} x} = \frac{64}{\sqrt{x}}$; 4) $x^{\log_x (x^2-3)} = 2x$;

5) $x^{x+2} = x^6$: а) при $x > 0$; б) при $x \in \boldsymbol{R}$; 6) $|x-1|^{x^2-1} = 1$;

7) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 \sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\log_3 (x^2-1)} = \sqrt{2(x-1)}$; 8) $4^{\log_4^2 x} + x^{\log_4 x} = 8$;

9) $2x^{2\lg (x-1)} = 1 + (x-1)^3$.

2. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50, \\ \log_{25} x + \log_{25} y = 1{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2. \end{cases}$

3. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2 - x + 1)^{x^2 - 2{,}5x + 1} < 1$; 2) $|x+1|^{x^2-2x} \geqslant |x+1|^3$;

3) $|x-2|^{\log_3 (x-2)} \leqslant |x-2|^{\log_3 (8-x)}$; 4) $x^{\log_a x + 4} < a^4 x$;

5) $x^{3+\log_a x} > a^2 x^2$.

§ 35 ПОКАЗНИКОВІ ТА ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Деякі показникові та логарифмічні рівняння можна розв'язати, застосовуючи властивості відповідних функцій. Нагадаємо основні прийоми, які використовуються при розв'язуванні рівнянь за допомогою властивостей функцій, та наведемо приклади розв'язування рівнянь і нерівностей, що містять показникові, логарифмічні та інші функції.

Таблиця 58

Орієнтир	Приклад
1. Скінченна ОДЗ	
Якщо область допустимих значень (ОДЗ) рівняння (нерівності або системи) складається зі скінченного числа значень, то для розв'язування досить перевірити всі ці значення.	$2^{\sqrt{x-1}}+3^{x}=4^{1-\sqrt{2-2x}}$. ▶ ОДЗ: $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ 2-2x\geqslant 0.\end{cases}$ Тоді $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\leqslant 1.\end{cases}$ Отже, ОДЗ: $x=1$. Перевірка: $x=1$ — корінь $\left(2^{\sqrt{1-1}}+3^{1}=4^{1-\sqrt{2-2}},\ 4=4\right)$. Інших коренів немає, оскільки до ОДЗ входить тільки одне число. *Відповідь:* 1. ◁
2. Оцінка лівої та правої частин рівняння	
$\boxed{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)=a,\\ g(x)=a.\end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix}f(x)\geqslant a\\ g(x)\leqslant a\end{matrix}}$ **Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x)=g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x)\geqslant a$, $g(x)\leqslant a$, то рівність між лівою і правою частинами можлива тоді і тільки тоді, коли $f(x)$ і $g(x)$ одночасно дорівнюють a.**	$2^{x^2}=\cos\frac{x}{2}$. ▶ Оцінимо значення лівої і правої частин заданого рівняння: $f(x)=2^{x^2}\geqslant 1$ (оскільки $x^2\geqslant 0$); якщо $g(x)=\cos\frac{x}{2}$, то $-1\leqslant g(x)\leqslant 1$. Отже, $f(x)\geqslant 1$, $g(x)\leqslant 1$. Тоді задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}2^{x^2}=1,\\ \cos\frac{x}{2}=1.\end{cases}$ Із першого рівняння одержуємо $x^2=0$, тобто $x=0$, що задовольняє й другому рівнянню. *Відповідь:* 0. ◁

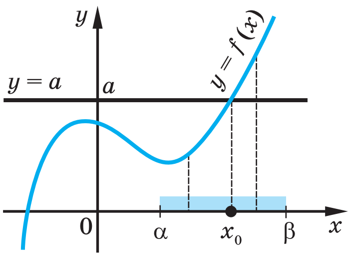
Продовж. табл. 58

3. Використання монотонності функцій

Схема розв'язування рівняння

1. *Підбираємо один або кілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння або оцінку значень лівої та правої частин рівняння).*

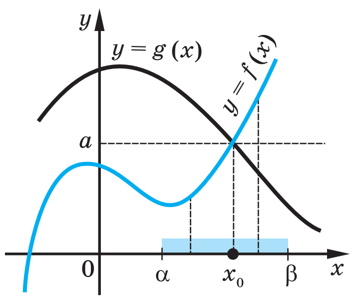
Теореми про корені рівняння



1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $2^x + 3^x = 5$ має єдиний корінь $x = 1$ ($2^1 + 3^1 = 5$, тобто $5 = 5$), оскільки функція $f(x) = 2^x + 3^x$ зростає (на всій області визначення $x \in \boldsymbol{R}$) як сума двох зростаючих функцій.



2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більш ніж один корінь на цьому проміжку.

Приклад

Рівняння $5^x = 27 - x$ має єдиний корінь $x = 2$ ($5^2 = 27 - 2$, тобто $25 = 25$), оскільки $f(x) = 5^x$ зростає, а $g(x) = 27 - x$ спадає (при всіх $x \in \boldsymbol{R}$).

Продовж. табл. 58

4. «Шукай квадратний тричлен»	
Орієнтир	Приклад
Спробуйте розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції).	$4^x-(7-x)\cdot 2^x+12-4x=0.$ ▶ Запишемо, що $4^x=2^{2x}$, і введемо заміну $2^x=t$. Одержуємо $t^2-(7-x)\cdot t+12-4x=0.$ Розглянемо це рівняння як квадратне відносно t. Його дискримінант $D=(7-x)^2-4(12-4x)=x^2+2x+1=(x+1)^2$. Тоді $t_{1,2}=\frac{7-x\pm(x+1)}{2}$, тобто $t_1=4$, $t_2=3-x$. Обернена заміна дає $2^x=4$ (звідси $x=2$) або $2^x=3-x$. Останнє рівняння має єдиний корінь $x=1$, оскільки $f(x)=2^x$ зростає, а $g(x)=3-x$ спадає (при всіх $x\in \boldsymbol{R}$). *Відповідь:* 1; 2. ◁

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4.$

Розв'язання

▶ Якщо $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=t$, то $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=\frac{1}{t}$. Одержуємо $t+\frac{1}{t}=4$. Отже, $t^2-4t+1=0$. Тоді

$$t_1=2-\sqrt{3},\ \ t_2=2+\sqrt{3}.$$

Обернена заміна дає

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}\ \ (\text{звідси } x=2)$$

або $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}$ (звідси $x=-2$).

Відповідь: – 2; 2. ◁

Коментар

Помічаємо, що

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=1.$$

Отже, якщо $\sqrt{2-\sqrt{3}}=a$, то $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{a}$. Тобто задане рівняння має вигляд $a^x+\frac{1}{a^x}=4$, і його можна розв'язати за допомогою заміни $a^x=t$. Але тепер цю заміну можна безпосередньо використати для заданого рівняння, не вводячи проміжні позначення. Після оберненої заміни враховуємо, що

$$2+\sqrt{3}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}=\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{-2}.$$

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}+2^x-\frac{1}{2^x}=4.$

Коментар

Якщо звести всі степені до однієї основи 2 і позначити $2^x=t$, то одержимо рівняння (1) (див. розв'язання), у якому можна ввести заміну $t-\frac{1}{t}=u$ (тоді $u^2=t^2-2+\frac{1}{t^2}$, отже, $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$). На ОДЗ заданого рівняння ($x \in \boldsymbol{R}$) всі заміни і обернені заміни є рівносильними перетвореннями цього рівняння. Отже, розв'язавши рівняння, одержані в результаті замін, і виконавши обернені заміни, ми отримаємо корені заданого рівняння.

Розв'язання

► $$2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}+2^x-\frac{1}{2^x}=4.$$

Заміна $2^x=t$ дає рівняння

$$t^2+\frac{1}{t^2}+t-\frac{1}{t}=4. \qquad (1)$$

Позначимо $t-\frac{1}{t}=u$, тоді $t^2+\frac{1}{t^2}=u^2+2$, отже, з рівняння (1) одержуємо рівняння $u^2+u-2=0$, яке має корені: $u_1=1$, $u_2=-2$.

Обернена заміна дає $t-\frac{1}{t}=1$ або $t-\frac{1}{t}=-2$. Тоді $t^2-t-1=0$ або $t^2+2t-1=0$.

Одержуємо $t_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ або $t_3=-1+\sqrt{2}$, $t_4=-1-\sqrt{2}$.

Тоді $2^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (звідси $x=\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$) або $2^x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (коренів немає, оскільки $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$), або $2^x=-1+\sqrt{2}$ (звідси $x=\log_2(\sqrt{2}-1)$), або $2^x=-1-\sqrt{2}$ (коренів немає, оскільки $-1-\sqrt{2}<0$).

Відповідь: $\log_2\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\log_2(\sqrt{2}-1)$. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть рівняння $4^x+\frac{1}{4^x}=2\cos 2x.$

<u>I спосіб</u>

Коментар

Враховуючи, що $4^x>0$, одержуємо, що в лівій частині рівняння стоїть *сума двох взаємно обернених додатних чисел, яка завжди більша або дорівнює* 2.

(Дійсно, якщо $a > 0$, то $a+\frac{1}{a}-2=\frac{a^2-2a+1}{a}=\frac{(a-1)^2}{a}\geqslant 0$, отже, при всіх $a > 0$ $a+\frac{1}{a}\geqslant 2.$)

Для оцінки значень правої частини досить згадати, що областю значень функції $\cos 2x$ є проміжок $[-1; 1]$, отже, $-2 \leqslant 2\cos 2x \leqslant 2$.

Розв'язання

▶ Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння. $f(x)=4^x+\frac{1}{4^x}\geqslant 2$ як сума двох взаємно обернених додатних чисел. Якщо $g(x)=2\cos 2x$, то $-2\leqslant g(x)\leqslant 2$.

Отже, $f(x)\geqslant 2$, $g(x)\leqslant 2$, тоді задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} 4^x+\frac{1}{4^x}=2, \\ 2\cos 2x=2. \end{cases}$$

З першого рівняння, використовуючи заміну $4^x=t$, одержуємо

$$t+\frac{1}{t}=2, \text{ тобто } t^2-2t+1=0. \text{ Звідси } t=1.$$

Тоді $4^x=1$, отже, $x=0$, що задовольняє й другому рівнянню.

Відповідь: 0. ◁

<u>II спосіб розв'язування рівняння</u> $4^x+\frac{1}{4^x}=2\cos 2x$

Коментар

Якщо позначити $4^x=t$, то задане рівняння зводиться до рівняння (2) (див. розв'язання), яке можна розглядати як квадратне відносно змінної t. Зауважимо, що $t=4^x\neq 0$, отже, при таких значеннях t рівняння (1) і (2) є рівносильними. Далі використовуємо умову існування коренів квадратного рівняння.

Розв'язання

▶ Після заміни $4^x=t$ $(t > 0)$ із заданого рівняння одержуємо рівносильне рівняння

$$t+\frac{1}{t}=2\cos 2x, \qquad (1)$$

яке, у свою чергу, рівносильне рівнянню

$$t^2-(2\cos 2x)\,t+1=0. \qquad (2)$$

Розглянемо рівняння (2) як квадратне відносно змінної t.

Тоді його дискримінант $D=4\cos^2 2x-4$.

Рівняння (2) може мати корені тільки тоді, коли $D\geqslant 0$, тобто коли

$$4\cos^2 2x-4\geqslant 0, \text{ тоді}$$

$$\cos^2 2x\geqslant 1. \qquad (3)$$

У цій нерівності знак «більше» не може виконуватися ($\cos^2 2x\leqslant 1$ завжди), отже, нерівність (3) рівносильна рівнянню $\cos^2 2x=1$. Тоді $\cos 2x=1$ або $\cos 2x=-1$. Підставляючи ці значення в рівняння (2), одержуємо дві системи:

$\begin{cases}\cos 2x = 1, \\ t^2 - 2t + 1 = 0\end{cases}$ або $\begin{cases}\cos 2x = -1, \\ t^2 + 2t + 1 = 0.\end{cases}$ У другій системі з другого рівняння маємо $t = -1$, що не задовольняє умові $t > 0$. Отже, задане рівняння рівносильне тільки першій системі. З другого рівняння першої системи маємо $t = 1$, тоді $4^x = 1$, тобто $x = 0$, що задовольняє і першому рівнянню цієї системи.

Відповідь: 0. ◁

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $2^{|x|} - |2^{x+1} - 2| = 2^{x+1}$.

К о м е н т а р

Для розв'язування рівняння з кількома модулями можемо використати загальну схему (с. 240):

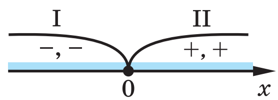
1) знайти ОДЗ;
2) знайти нулі всіх підмодульних функцій;
3) позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки;
4) знайти розв'язки рівняння в кожному з проміжків.

Р о з в ' я з а н н я

▶ ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.

Нулі підмодульних функцій: $x = 0$ і $2^{x+1} - 2 = 0$, $2^{x+1} = 2$, $x + 1 = 1$, $x = 0$.

Цей нуль ($x = 0$) розбиває ОДЗ на два проміжки, у кожному з яких кожна підмодульна функція має постійний знак (див. рисунок).



<u>Проміжок I.</u> При $x \in (-\infty; 0]$ маємо рівняння $2^{-x} + 2^{x+1} - 2 = 2^{x+1}$. Тоді

$$2^{-x} = 2, \text{ отже, } x = -1 \in (-\infty; 0].$$

<u>Проміжок II.</u> При $x \in [0; +\infty)$ маємо рівняння $2^x - (2^{x+1} - 2) = 2^{x+1}$. Тоді $2^x = \frac{2}{3}$, звідси $x = \log_2 \frac{2}{3}$. Але $\log_2 \frac{2}{3} < 0$, отже, у II проміжку задане рівняння коренів не має.

Відповідь: −1. ◁

Приклад 5 Розв'яжіть рівняння
$\lg^2 (x + 1) = \lg (x + 1) \lg (x - 1) + 2 \lg^2 (x - 1)$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ ОДЗ: $\begin{cases}x + 1 > 0, \\ x - 1 > 0.\end{cases}$ Тобто $x > 1$.

Оскільки $x = 2$ не є коренем заданого рівняння, то при діленні обох частин рівняння на $\lg^2 (x - 1) \neq 0$ одер-

К о м е н т а р

Якщо виконати заміну $\lg (x + 1) = u$, $\lg (x - 1) = v$, то одержимо *рівняння* $u^2 = uv + 2v^2$, *усі члени якого мають однаковий сумарний степінь* — два. Нагадаємо, що таке рівняння *називається однорідним і розв'язується* жуємо рівносильне рівняння (на ОДЗ)

$$\frac{\lg^2(x+1)}{\lg^2(x-1)}=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}+2.$$

Після заміни $t=\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}$ маємо рівняння $t^2-t-2=0$, корені якого:

$$t_1=-1,\ t_2=2.$$

Виконавши обернену заміну, одержуємо

$$\frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=-1 \text{ або } \frac{\lg(x+1)}{\lg(x-1)}=2.$$

Тоді на ОДЗ маємо рівносильні рівняння:

$\lg(x+1)=-\lg(x-1)$ або

$\lg(x+1)=2\lg(x-1)$,

$\lg(x+1)=\lg(x-1)^{-1}$ або

$\lg(x+1)=\lg(x-1)^2$,

$x+1=\frac{1}{x-1}$ або $x+1=(x-1)^2$,

$x^2-1=1$ або $x+1=x^2-2x+1$,

$x^2=2$ або $x^2-3x=0$,

$x=\pm\sqrt{2}$ або $x=0$ чи $x=3$.

Враховуючи ОДЗ, одержуємо

$$x=\sqrt{2} \text{ або } x=3.$$

Відповідь: $\sqrt{2}$; 3. ◁

діленням обох частин на найвищий степінь однієї із змінних. Розділимо, наприклад, обидві частини на v^2 (тобто на $\lg^2(x-1)$).

Щоб не загубити корені рівняння при діленні на вираз із змінною, потрібно ті значення змінної, при яких цей вираз дорівнює нулю, розглянути окремо. Значення x, при якому $\lg(x-1)=0$ (тоді $x-1=1$), тобто $x=2$, підставляємо в задане рівняння.

Для реалізації одержаного плану розв'язування не обов'язково вводити змінні u і v, досить помітити, що задане рівняння однорідне, розділити обидві частини на $\lg^2(x-1)$, а вже потім увести нову змінну t.

У кінці враховуємо, що всі перетворення були рівносильними на ОДЗ, отже, необхідно вибрати тільки ті із знайдених розв'язків, які входять до ОДЗ.

Приклад 6 Розв'яжіть рівняння $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.$

Коментар

Логарифмічні функції, які стоять у лівій частині заданого рівняння, набувають тільки невід'ємних значень.

Дійсно, на всій області визначення $1+\sqrt{x-2}\geqslant 1$, отже, $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$; аналогічно, оскільки $1-|x^2-4|\leqslant 1$, то на своїй області визначення $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$. *У цьому випадку сума двох невід'ємних функцій може дорівнювати нулю тоді і тільки тоді, коли кожна з цих функцій дорівнює нулю.*

Зауважимо, що при переході від заданого рівняння до системи рівнянь ОДЗ не змінюється, отже, її можна не записувати в явному вигляді. При розв'язуванні одержаних найпростіших логарифмічних рівнянь ОДЗ теж враховується автоматично, тому її можна взагалі не записувати до розв'язання.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Оскільки на всій області визначення $\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)\geqslant 0$ і $\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)\geqslant 0$, то задане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}\log_2\left(1+\sqrt{x-2}\right)=0,\\ \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\left|x^2-4\right|\right)=0.\end{cases}$$

З першого рівняння системи одержуємо $1+\sqrt{x-2}=2^0$. Тоді $\sqrt{x-2}=0$, тобто $x=2$, що задовольняє і другому рівнянню системи.

Відповідь: 2. ◁

Приклад 7 При яких значеннях параметра a нерівність

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x+a-5}{5}\right)>0$$

виконується для будь-яких значень x?

К о м е н т а р

Спочатку скористаємося формулою $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$: $\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Потім запишемо праву частину нерівності як значення логарифмічної функції і, переходячи до аргументів, врахуємо, що у випадку, коли основа цієї функції більша за 1, функція зростає, а коли менша за 1 (але більша за 0) — спадає.

При подальшому аналізі одержаних нерівностей враховуємо, що нерівність $\sin t>b$ виконується для будь-яких значень t тоді і тільки тоді, коли $b<-1$, а нерівність $\sin t<c$ — коли $c>1$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\log_{\frac{2a-15}{5}}\left(\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}\right)>\log_{\frac{2a-15}{5}}1.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності систем

$$\begin{cases}\frac{2a-15}{5}>1,\\ \frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}>1\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}0<\frac{2a-15}{5}<1,\\ 0<\frac{2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+a-5}{5}<1.\end{cases}$$

$$\text{Тоді}\quad\begin{cases}a>10,\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>5-\frac{a}{2}\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}7{,}5<a<10,\\ \frac{5-a}{2}<\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)<5-\frac{a}{2}.\end{cases}$$

Нерівності із змінною x в останній сукупності систем виконуватимуться для будь-яких значень x за умов:

$$\begin{cases} a>10, \\ 5-\frac{a}{2}<-1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ \frac{5-a}{2}<-1, \\ 5-\frac{a}{2}>1. \end{cases} \quad \text{Тобто } \begin{cases} a>10, \\ a>12 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 7{,}5<a<10, \\ a>7, \\ a<8. \end{cases}$$

Тоді $a > 12$ або $7{,}5 < a < 8$.

Відповідь: при $a \in (7{,}5;\, 8) \cup (12;\, +\infty)$. ◁

Приклад 8 При яких значеннях параметра a рівняння $\log_2(4^x - a) = x$ має єдиний корінь?

К о м е н т а р

Виконуючи рівносильні перетворення заданого рівняння, як завжди, враховуємо, що при використанні означення логарифма для розв'язування цього найпростішого логарифмічного рівняння його ОДЗ враховується автоматично.

При виконанні заміни змінної в завданні з параметром враховуємо, що після заміни вимога задачі може змінитися.

Досліджуючи розміщення коренів квадратного тричлена $f(t) = t^2 - t - a$, застосовуємо умови, наведені на с. 225 у таблиці 37 (для запису відповідних умов використаємо позначення: D — дискримінант, t_0 — абсциса вершини параболи). Як відомо, *для того щоб корені квадратного тричлена $f(t)$ (з додатним коефіцієнтом при t^2) були розміщені по різні боки від числа A, необхідно і достатньо виконання умови $f(A) < 0$.*

Р о з в' я з а н н я

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню

$$4^x - a = 2^x. \qquad (1)$$

Тобто $2^{2x} - a = 2^x$. *Заміна* $2^x = t$ $(t > 0)$ дає рівняння:

$$t^2 - t - a = 0. \qquad (2)$$

Вимога задачі буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли рівняння (2) матиме єдиний додатний корінь. Це буде в одному з двох випадків:

1) рівняння (2) має єдиний корінь, і він додатний;
2) рівняння (2) має два корені, з яких тільки один додатний, а другий — від'ємний або нуль.

Для першого випадку одержуємо $\begin{cases} D=0, \\ t_0>0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 1+4a=0, \\ t_0=\frac{1}{2}>0. \end{cases}$

Отже, $a = -\frac{1}{4}$.

Для другого випадку значення $t = 0$ дослідимо окремо.

При $t = 0$ з рівняння (2) одержуємо $a = 0$. При $a = 0$ рівняння (2) має корені $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Отже, умова задачі при $a = 0$ виконується.

Залишається ще один випадок — корені рівняння (2) мають різні знаки (розміщені по різні боки від нуля). Це буде тоді і тільки тоді, коли буде виконуватися умова $f(0) < 0$ (де $f(t) = t^2 - t - a$), тобто умова $-a < 0$, отже, $a > 0$. Об'єднуючи всі одержані результати, маємо відповідь.

Відповідь: при $a = -\frac{1}{4}$ або $a \geqslant 0$ задане рівняння має єдиний корінь. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах, як можна використати властивості функцій до розв'язування показникових та логарифмічних рівнянь.

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–5)**.

1. 1) $2^{2x} = 5 - x$; 2) $\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x = 1$; 3) $3^x + 4^x = 5^x$; 4) $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$;

5) $\log_3(x+5) = \log_{\frac{1}{2}} x + 4$; 6) $\log_2(3^x + 4) = 2 - 5^x$; 7) $\log_2|x| = 5 - x^2$;

8) $\log_2(1 + x^2) = \log_2 x + 2x - x^2$; 9) $\log_5 x = \sqrt{1 - x^2}$.

2. 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x = 8$; 2) $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 6$;

3) $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

3. 1) $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$; 2) $x^2 + (x - 3)\log_2 x = 4x - 3$;

3) $2\lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1)\cdot\lg(2x + 1)$.

4. 1) $2^{|x+2|} - |2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} + 1$; 2) $\left|2 + \log_{\frac{1}{5}} x\right| + 3 = \left|1 + \log_5 x\right|$.

5. 1) $25^x - (a - 1)\cdot 5^x + 2a + 3 = 0$; 2) $\sqrt{4^x - 6\cdot 2^x + 1} = 2^x - a$.

6. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + 2^x = y + 2^y, \\ x^2 + 3y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = y - x, \\ x^3 + y^3 = 54. \end{cases}$

7. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $4^x + a\cdot 2^{x+1} - a = 0$ не має коренів.

8. Знайдіть всі значення параметра a, при яких нерівність $a\cdot 9^x + 4(a - 1)\cdot 3^x + a > 1$ виконується при всіх x.

9. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $3^x + 3^{-x} = 2\cos x + a + 4$ має єдиний корінь.

10. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $\log_3 (9^x + a) = x$ має єдиний корінь.

11. Для кожного значення параметра a визначіть число коренів рівняння $|\lg x| = -(x-1)^2 + a$.

12. Скільки розв'язків має рівняння $\left(\log_2(x+1)-3\right)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

13. Знайдіть всі значення параметра a, при яких система рівнянь

$$\begin{cases}\lg(4+y)=\lg x,\\ a-y=\frac{1}{2}(x+a)^2\end{cases}$$ має розв'язки.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 4

Обчисліть **(1–4)**.

1. 1) $10\log_{\sqrt{2}}\log_{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$; 2) $9^{\log_{16}2+\log_3\sqrt{5}}$; 3) $81^{0,5\log_9 7}$; 4) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}$.

2. 1) $\sqrt[4]{25^{-3\log_{\sqrt{5}}0,1}}+64^{\log_4 5}$; 2) $\left(\frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[5]{25}}\right)^{-\frac{20}{3}}+\log_4 9\cdot\log_3 4-7^{\log_{\sqrt{7}}3}$;

3) $16(\log_9 45-1)\cdot\log_{11}9\cdot\log_5 121$; 4) $\left(15+3^{1+\log_3 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{3}\cdot\log_3 4$;

5) $\left(30-5^{1+\log_5 4}\right)\cdot\log_2\sqrt{5}\cdot\log_5 4$.

3. 1) $\frac{\log_2 66}{\log_6 66}-\log_2 3$; 2) $\log_{7,3}\sqrt[5]{8}:\log_{7,3}\sqrt[20]{8}$;

3) $\log_2 27-2\log_2 3+\log_2\frac{2}{3}$; 4) $\log_6 34-\log_6 17+\log_6 18$.

4. 1) $20^{\frac{1}{2\log_{81}5}}\cdot(0,25)^{\frac{1}{2\log_{81}5}}$; 2) $\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125}8}\right)\cdot 49^{\log_7 2}$;

3) $49^{0,5(\log_7 9-\log_7 6)}-16\cdot 5^{-\log_{\sqrt{5}}4}$.

5. 1) Знайдіть $\log_{b^{-\frac{1}{4}}}\left(\frac{a^4}{b^6}\right)$, якщо $\log_a b=-5$.

2) Знайдіть $\log_{b^5}\left(a^5b^5\right)$, якщо $\log_a b=5$.

3) Знайдіть $\log_{b^6}(a^6b^6)$, якщо $\log_a b = 6$.

4) Знайдіть lg 800, якщо lg 2 = 0,301.

6. 1) Знайдіть $\log_{15} 81$, якщо $\log_{75} \sqrt[3]{9} = a$.
2) Знайдіть $\log_4 20$, якщо $\lg 2 = a$.
3) Знайдіть $\log_{70} 32$, якщо $\log_{70} 5 = a$, $\log_{70} 7 = b$.
4) Знайдіть $\log_{30} 12$, якщо $\log_{24} 3 = a$, $\log_{24} 5 = b$.

Порівняйте значення заданих числових виразів **(7–8)**.

7. 1) $\log_{0,5}\frac{7}{4}$ і $\log_{0,125}\frac{7}{164}$; 2) $\log_{0,25}\frac{5}{256}$ і $\log_{0,5}\frac{5}{16}$;

3) $\sqrt{11}$ і $9^{\frac{1}{2}\log_3\left(1+\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{3}{2}\log_8 2}$; 4) $\sqrt{15}$ і $8^{\frac{1}{3}\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)\cdot 2\log_{27} 3}$; 5) $\sqrt{8}$ і $2^{2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9}$.

8. 1) $7^{\log_5 2}-0,1$ і $2^{\log_5 7}$; 2) $5^{\log_3 7}+0,1$ і $7^{\log_3 5}$; 3) $2^{\log_7 3}+0,1$ і $3^{\log_7 2}$.

Знайдіть область визначення функції **(9–10)**.

9. 1) $y=\sqrt{\log_2(x^2-2x-2)}$; 2) $y=\sqrt{\log_4(x^2-4x-4)}$;

3) $y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}$; 4) $y=\sqrt{1-\log_4(x^2-3x)}$.

10. 1) $f(x)=\sqrt{2\cdot 3^{1-x}+1-3^x}$; 2) $f(x)=\lg\left((1,25)^{1-x^2}-(0,4096)^{1+x}\right)$;

3) $f(x)=\sqrt{27^x-9^{x^2+0,5}}$; 4) $f(x)=\sqrt{(4-x)(3^x-9)}$.

11. Знайдіть множину значень функції:

1) $y=\log_{0,1}\left(\frac{300}{1+\lg(100+x^2)}\right)$; 2) $y=\log_{0,25}\left(\frac{30+\sqrt{4+\log_4^2 x}}{2}\right)$;

3) $y=\log_{0,5}\left(\frac{24}{11+\sqrt{1+|\ln x|}}\right)$; 4) $y=\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{10+\log_7(7+|x|)}{77}\right)$.

Розв'яжіть рівняння **(12–13)**.

12. 1) $2^{5x-1}\cdot 3^{4x+1}\cdot 7^{3x+3} = 504^{x-2}$; 2) $2^{9x+9}\cdot 3^{7x+3}\cdot 5^{6x} = 720^{x+3}$;
3) $2^{13-x}\cdot 3^{11-2x}\cdot 5^{9-3x} = 360^{x+2}$; 4) $32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2} = 600^{x+7}$.

13. 1) $3\log_6\left(3-\frac{3}{2x+3}\right)=4\log_6\left(2+\frac{1}{x+1}\right)+3$;

2) $2\log_{12}\left(x+\frac{6}{x-5}\right)=3\log_{12}\left(\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-3}\right)+5$;

3) $\sqrt{33+\frac{8}{\log_x 4}}=3\log_4\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)$; 4) $\sqrt{7-\frac{1}{\log_x 4}}=2\log_4\left(0,5\sqrt{x}\right)$.

14. При яких значеннях a вираз $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|}$ більший за вираз $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)}$ при всіх допустимих значеннях x?

15. При яких значеннях a сума $\log_a\left(\frac{4+3|x|}{1+|x|}\right)$ та $\log_a\left(\frac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$ буде більшою за одиницю при всіх x?

16. При яких значеннях a сума $\log_a(\sin x+2)$ та $\log_a(\sin x+3)$ буде дорівнювати одиниці хоча б при одному значенні x?

17. При яких значеннях a сума $\log_a(\cos^2 x+1)$ та $\log_a(\cos^2 x+5)$ буде дорівнювати одиниці хоча б при одному значенні x?

18. При яких значеннях a вираз $(\sin x)^{\lg(\sin x)-a^2}$ більший за вираз $10^{\log_{100}(1-\cos^2 x)+\log_7 a}$ при всіх допустимих значеннях x?

19. При яких значеннях a вираз $(\cos x)^{\log_3(\cos x)-|a|}$ більший за вираз $3^{\log_9(1-\sin^2 x)+a(a-2)}$ при всіх допустимих значеннях x?

20. При яких значеннях a вираз $(1-x^2)^{\log_4(1-x^2)-\sqrt{a}}$ більший за вираз $0{,}25^{1-|a|-\log_2\sqrt{1-x^2}}$ при всіх допустимих значеннях x?

21. При яких значеннях a вираз $(1-2^x)^{\log_2(1-2^x)-2^a}$ більший за вираз $0{,}5^{3-\sqrt{a}-\log_4(1+4^x-2^{x+1})}$ при всіх допустимих значеннях x?

22. Знайдіть усі додатні, не рівні 1, значення a, при яких область визначення функції $y=\left(a^{x+3}\cdot a^2+a^{4+5\log_a x}-x^{5+x\log_x a}-\left(\sqrt[3]{a}\right)^{27}\right)^{0{,}5}$ не містить двозначних натуральних чисел.

23. Знайдіть усі значення a, при яких область визначення функції $y=\lg\left(a^{x+2}\cdot x^{3\log_x a}+a^4\cdot x^5-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\left(\sqrt{a}\right)^{18}\right)$ містить тільки одне ціле число.

24. З області визначення функції $y=\log_3\left(a^a-a^{\frac{5x+2}{x+2}}\right)$ взяли всі цілі додатні числа і додали їх. Знайдіть усі додатні значення a, при яких така сума буде більшою за 9, але меншою за 13.

25. З області визначення функції $y=\log_7\left(a^a-a^{\frac{7x+4}{x+4}}\right)$ взяли всі цілі додатні числа і додали їх. Знайдіть усі додатні значення a, при яких така сума буде більшою за 7, але меншою за 11.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Розклад алгебраїчних виразів на множники

Таблиця 1

1. Формули скороченого множення	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
2. Основні прийоми розкладання многочлена на множники	
Винесення спільного множника за дужки	$8a^3 + 10a^2b^3 - 6ab = 2a(4a^2 + 5ab^3 - 3b)$
Спосіб групування	$xy + 3yz - x^2 - 3xz =$ $= y(x+3z) - x(x+3z) =$ $= (x+3z)(y-x)$
Використання формул скороченого множення	$a^4 - 64 = (a^2)^2 - 8^2 = (a^2-8)(a^2+8)$
3. Розклад на множники квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	
$ax^2 + bc + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена, тобто корені рівняння $ax^2 + bc + c = 0$	Оскільки $2x^2 + 3x - 5 = 0$ при $x_1 = 1$ і $x_2 = -\frac{5}{2}$, то $2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$
4. Узагальнення деяких формул скороченого множення	
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Приклади. $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ При $b=1$ $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1)$	
Для **непарних** натуральних n $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Приклади. $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ При $b = 1$ (и $n = 2k+1$) $a^{2k+1} + 1 = (a+1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \ldots + a^2 - a + 1)$	

Системи рівнянь

Таблиця 2

<table>
<tr><th colspan="2">1. Системи рівнянь</th></tr>
<tr><th>Поняття системи та її розв’язків</th><th>Приклади</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв’язки двох (або більше) рівнянь з однією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв’язати систему рівнянь. Записують систему рівнянь, об’єднуючи їх фігурною дужкою.

Розв’язком системи називається таке значення змінної або такий впорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всім рівнянням системи.

Роз’язати систему рівнянь — значить знайти всі її розв’язки або довести, що розв’язків немає.

Якщо система не має розв’язку, то її називають несумісною.</td>
<td>$\begin{cases} x-y=4, \\ 2x+y=11 \end{cases}$ — система двох рівнянь з двома змінними.
Пара чисел (5; 1), тобто
$\begin{cases} x=5, \\ y=1 \end{cases}$ — розв’язок системи.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ — система трьох рівнянь з трьома змінними.
Трійка чисел (1; 4; 3), тобто $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3 \end{cases}$ — один з розв’язків системи.</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">2. Рівносильність систем рівнянь</th></tr>
<tr>
<td>Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають однакові розв’язки (тобто кожний розв’язок першої системи на цій множині є розв’язком другої і, навпаки, кожний розв’язок другої системи є розв’язком першої).

Якщо змінити порядок запису рівнянь заданої системи, то одержимо систему, рівносильну заданій.

Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то одержимо систему, рівносильну заданій.</td>
<td>Областю допустимих значень (ОДЗ) системи називається спільна область визначення всіх функцій, що входять до запису цієї системи.

Всі рівносильні перетворення систем виконуються на ОДЗ початкової системи.</td>
</tr>
</table>

3. Основні способи розв'язування систем рівнянь
Спосіб підстановки
Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (чи через інші) і підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної у всі інші рівняння системи (потім розв'язуємо одержане рівняння чи систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної).
Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Р о з в'я з а н н я. З першого рівняння системи $y = 2x - 3$. Підставляємо в друге рівняння системи і одержуємо $x + 2x - 3 = 3$. Звідси $x = 2$. Тоді $y = 2x - 3 = 1$. *Відповідь:* (2; 1).
Спосіб додавання
Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого рівняння, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій.
Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{vmatrix}$ Р о з в'я з а н н я. Помножимо обидві частини першого рівняння системи на 2, а другого — на 3 (щоб одержати як коефіцієнти при змінній y протилежні числа) і почленно додамо одержані рівняння. З одержаного рівняння знаходимо значення x, підставляємо результат у будь-яке рівняння системи і знаходимо значення y. $\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \vert +$ $19x = 57,$ $x = 3.$ Тоді $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$. *Відповідь:* (3; 2).

Графічне розв'язування систем рівнянь з двома змінними

Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній — ці координати і є розв'язками системи.

Приклади

1. Розв'язати графічно систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна системі $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Графіком кожного з рівнянь системи є пряма.

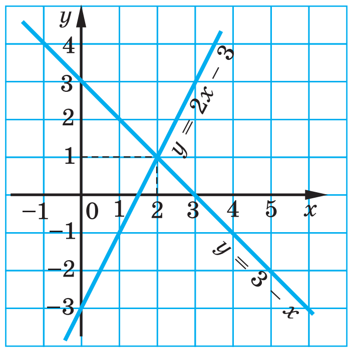
Для побудови прямої досить побудувати дві її точки. Наприклад, для

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	−3	−1

$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2



Графіки перетинаються в єдиній точці $M\ (2;\ 1)$. Отже, пара чисел $(2;\ 1)$ — єдиний розв'язок заданої системи.

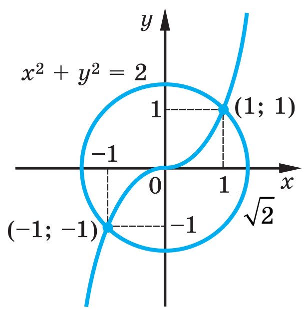
Відповідь: $(2;\ 1)$.

2. Розв'язати графічно систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна системі $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$

Графік першого рівняння — коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола $y = x^3$.

Ці два графіки перетинаються в двох точках з координатами $(-1;\ -1)$ і $(1;\ 1)$.

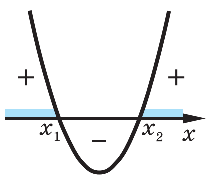
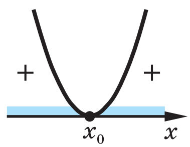
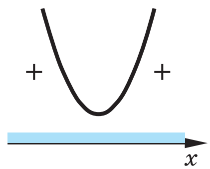
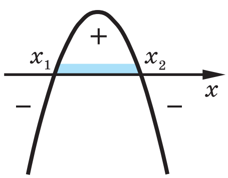
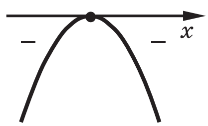
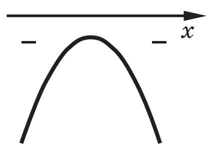


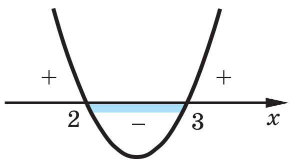
Відповідь: $(-1;\ -1)$, $(1;\ 1)$ — розв'язок системи.

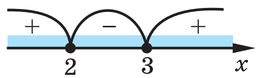
Розв’язування квадратних нерівностей

Таблиця 3

1. Квадратні нерівності
Квадратною нерівністю називається нерівність виду $\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ $(<0,\ \geqslant 0,\ \leqslant 0)$, якщо $a\neq 0$
Орієнтир
Для розв’язування квадратної нерівності досить знайти корені квадратного тричлена ax^2+bx+c і побудувати ескіз його графіка (параболу). Як відповідь записують проміжки осі Ox, для яких точки параболи розміщені вище від осі Ox (для випадку $ax^2+bx+c>0$) і нижче від осі Ox (для випадку $ax^2+bx+c<0$). Якщо квадратний тричлен має два різних корені x_1 і x_2, то для розв’язування нерівності можна також використати метод інтервалів або рівносильні перетворення нерівності.
2. Різні випадки розв’язування нерівності $\boldsymbol{ax^2+bx+c>0}$ $(a\neq 0,\ D=b^2-4ac)$

$a>0$ $D>0$  $x\in(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$	$a>0$ $D=0$  $x\in(-\infty;\ x_0)\cup(x_0;\ +\infty)$	$a>0$ $D<0$  $x\in R$ $(x\in(-\infty;\ +\infty))$
$a<0$ $D>0$  $x\in(x_1;\ x_2)$	$a<0$ $D=0$  **Розв’язків немає**	$a<0$ $D<0$  **Розв’язків немає**

<table>
<tr><td colspan="2">3. Приклад</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розв’яжіть нерівність $x^2 - 5x + 6 < 0$</td></tr>
<tr><td>I спосіб</td><td>II спосіб (метод інтервалів)</td></tr>
<tr><td>
1. $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
2. Будуємо ескіз графіка функції
$y = x^2 - 5x + 6$.


Відповідь: (2 ; 3)
</td><td>
Позначимо $f(x) = x^2 - 5x + 6$.
1. Область визначення: $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нулі функції: $x^2 - 5x + 6 = 0$,
$x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
3. Відмічаємо нулі на області визначення (на всій числовій прямій) і знаходимо знак в кожному проміжку, на які розбивається область визначення (див. рисунок).


Для знаходження знаків функції $f(x)$ зручно розкласти квадратний тричлен на множники і записати задану нерівність так:
$(x - 2)(x - 3) < 0$.
Відповідь: (2; 3).
</td></tr>
<tr><td colspan="2">III спосіб (рівносильні перетворення)</td></tr>
<tr><td colspan="2">
Оскільки $x^2 - 5x + 6 = 0$ при $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, то задана нерівність рівносильна нерівності $(x - 2)(x - 3) < 0$, яка рівносильна сукупності систем:
$\begin{cases} x-2>0, \\ x-3<0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x-2<0, \\ x-3>0. \end{cases}$
Тоді $\begin{cases} x>2, \\ x<3 \end{cases}$ або $\begin{cases} x<2, \\ x>3. \end{cases}$
З першої системи одержуємо $2 < x < 3$, а друга система не має розв’язку.
Відповідь: (2; 3).
</td></tr>
</table>

Знаходження області визначення функції

Таблиця 4

	Вид функції	Обмеження, які враховують при знаходженні області визначення функції*	
1	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	*Знаменник дробу не дорівнює нулю*
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$ $(k \in N)$	$f(x) \geqslant 0$	*Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз*
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	*Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз*
4	$y = \log_{f(x)} a$ $(a > 0)$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	*В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці*
5	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,$ $(k \in Z)$	*Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ (k — *ціле*)
6	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k,$ $k \in Z$	*Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* πk (k — *ціле*)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$\lvert f(x) \rvert \leqslant 1,$ тобто $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$	*Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці*
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^{\alpha}$		
	а) α — *натуральне*	x — будь-яке число	
	б) α — *ціле від'ємне або нуль*	$x \neq 0$	
	в) α — *додатне неціле число*	$x \geqslant 0$	
	г) α — *від'ємне неціле число*	$x > 0$	

* При записуванні цих обмежень вважаємо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ означені на розглядуваній множині.

Основні властивості числових рівностей і нерівностей

Таблиця 5

Властивості числових рівностей	Властивості числових нерівностей
1. Якщо $a = b$, то $b = a$	1. Якщо $a > b$, то $b < a$
2. Якщо $a = b$ і $b = c$, то $a = c$ (*транзитивність рівності*)	2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$ (*транзитивність нерівності*)
3. Якщо $a = b$, то $a + c = b + c$	3. Якщо $a > b$, то $a + c > b + c$
4. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $a + c = b + d$	4. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $a + c > b + d$
5. Якщо $a = b$ і $c \neq 0$, то $ac = bc$	5. а) Якщо $a > b$ і $c > 0$, то $ac > bc$ б) Якщо $a > b$ і $c < 0$, то $ac < bc$
6. Якщо $a = b$ і $c = d$, то $ac = bd$	6. Якщо $a > b$ $(a > 0, b > 0)$ і $c > d$ $(c > 0, d > 0)$, то $ac > bd$
7. Якщо $a = b$, то $a^n = b^n$	7. а) Якщо $a > b$ $(a > 0, b \geqslant 0)$, то $a^{2k} > b^{2k}$ б) Якщо $a > b$, то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$
8. а) Якщо $a = b$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$, то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Якщо $a = b$, то $\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$	8. а) Якщо $a > b$ $(a > 0, b > 0)$, то $\sqrt[2k]{a} > \sqrt[2k]{b}$ б) Якщо $a > b$, то $\sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$
9. Якщо $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Якщо $a > b$ $(a > 0, b > 0)$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. $ab = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ або $b = 0$	10. а) $ab > 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b > 0$ або $a < 0$ і $b < 0$ б) $ab < 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b < 0$ або $a < 0$ і $b > 0$
11. $\frac{a}{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$ і $b \neq 0$	11. а) $\frac{a}{b} > 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b > 0$ або $a < 0$ і $b < 0$ б) $\frac{a}{b} < 0$ тоді і тільки тоді, коли $a > 0$ і $b < 0$ або $a < 0$ і $b > 0$

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. **Пункт 1.1.** **1.** 1) 2,5; −2; $3\frac{1}{3}$; $a+\frac{1}{a}$; 2) −3; −2; 1; b^2-3; 3) 1; 2; 0; $\sqrt{m+1}$. **2.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3;\ +\infty)$; 3) $x\neq-1$; 4) $\boldsymbol{R}$; 5) $(-\infty;\ -1]\cup[1;\ +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $[1;\ 5]$; 8) $[-3;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 9) $[-3;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; 10) $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$; 11) $[0;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$; 12) $\boldsymbol{R}$. **3.** 1) $\{5\}$; 2) $\boldsymbol{R}$; 3) $[0;\ +\infty)$; 4) $[0;\ +\infty)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $[-5;\ +\infty)$; 7) $[3;\ +\infty)$. **4.** а) $D(f)=[-3;\ 5]$; $E(f)=[-3;\ 2]$; зростає: $[-2;\ 3]$; спадає: $[-3;\ -2]$ і $[3;\ 5]$; $f(1)=0$; б) $D(f)=[0;\ 6]$; $E(f)=[0;\ 4]$; зростає: $[0;\ 2]$ і $[5;\ 6]$; спадає: $[2;\ 5]$; $f(1)=2$. **10.** 1) Зростаюча; 2) спадна; 3) зростаюча; 4) спадна. **11.** 2) 4. **Пункт 1.2.** **1.** 3) парна; 4) непарна; 5) парна і непарна; 6) непарна. **2.** 1) $k>0,\ b>0$; 2) $k<0,\ b<0$; 3) $k>0,\ b<0$. **6.** 1) $a<0,\ b>0,\ c>0$; 2) $a>0,\ b<0,\ c<0$; 3) $a<0,\ b>0,\ c<0$; 4) $a>0,\ b<0,\ c>0$.

§ 2. **3.** 1) $\frac{5\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{5}$; 3) $\frac{5\pi}{9}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{6}$. **4.** 1) 540°; 2) 135°; 3) -72°; 4) 210°; 5) -10°; 6) 330°; 7) $-22{,}5^\circ$; 8) $\frac{540^\circ}{\pi}$.

§ 3. **1.** 3) III; 4) III; 5) III; 6) IV.

§ 4. **1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 1; 5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) −1; 8) $\sqrt{3}$. **2.** 2) $T=\pi$; 4) $T=\frac{\pi}{3}$; 5) T — будь-яке дійсне число, крім 0. Найменшого додатного числа не існує. **3.** 1) π ($\pi k,\ k\neq0,\ k\in\boldsymbol{Z}$); 2) $\frac{\pi}{5}$ $\left(\frac{\pi k}{5},\ k\neq0,\ k\in\boldsymbol{Z}\right)$; 3) 6π ($6\pi k,\ k\neq0,\ k\in\boldsymbol{Z}$); 4) $\frac{\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi k}{3},\ k\neq0,\ k\in\boldsymbol{Z}\right)$; 5) 5π ($5\pi k,\ k\neq0,\ k\in\boldsymbol{Z}$).

§ 5. **5.** 1) sin 3,9, sin 3,3, sin 1,2; 2) cos 1,9, cos 1,2, cos 0,3; 3) tg (−1,3), tg 0,7, tg 1,5; 4) ctg 2,9, ctg 1,1, ctg 0,5.

§ 6. **1.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) так; 6) так. **2.** 1) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$; 2) $\sin\alpha=0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha=-0{,}75$, $\operatorname{ctg}\alpha=-1\frac{1}{3}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2}{3}$; 4) $\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{26}}$, $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-5$. **3.** 1) 0; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 1; 4) $-\cos^2\alpha$; 5) 1; 6) 0; 7) $\sin\alpha$; 8) 1; 9) $\frac{2}{3}$; 10) $-2\operatorname{tg}\alpha$. **5.** 1) $-\frac{3}{8}$; 2) а) 2; б) 2.

§ 7. **Пункт 7.1.** **1.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 9) 1; 10) $\sqrt{3}$; 11) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.** 1) $\sin2\alpha$; 2) $\cos2\alpha$; 3) $\sin\alpha$; 4) $\cos\beta$; 5) $\operatorname{ctg}3\alpha$; 6) $\operatorname{tg}6\alpha$;

7) tg 7α; 8) tg 5α; 9) tg α ctg β; 10) tg (α − β). **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; 5) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; 6) $-2-\sqrt{3}$. **Пункт 7.2.** **1.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $1\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 6) $\frac{1}{2}$. **4.** 1) sin α; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2sin α; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$. **5.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $-\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **6.** 1) $\frac{120}{169}$; 2) $-\frac{119}{169}$; 3) $-1\frac{1}{119}$; 4) $-\frac{119}{120}$. **7.** 1) $\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $3\frac{3}{7}$; 4) $\frac{7}{24}$. **8.** 1) $-\frac{24}{25}$; 2) $\frac{7}{25}$; 3) $-3\frac{3}{7}$; 4) $-\frac{7}{24}$. **9.** −0,8. **10.** −1,125; 0. **Пункт 7.3.** **1.** 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\sqrt{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) −1; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 8) 1. **2.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\cos^2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}\text{ctg}^2\,\alpha$; 5) 1. **Пункт 7.4.** **1.** 1) 0; 2) −sin 18°; 3) $\sqrt{2}\sin 25°$; 4) tg 20° ctg 5°; 5) sin (α − β) sin (α + β); 6) $4\sin\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 7) $4\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$. **3.** 1) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$; 3) $\frac{1}{2}\left(\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 4) $\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{3\pi}{10}\right)$. **4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$.

§ 10. **Пункт 10.1.** **1.** 1) $a = 4$, $b = 5$, $c = 0$, $d = 1$; 2) $a = 2$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 2$. **2.** $a = 0$, $b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{2}$. **5.** $a = 1$, $b = 2$. **6.** $a=\frac{6}{11}$, $b=-\frac{10}{11}$. **Пункт 10.2.** **1.** 1) $3x^2+x+4$; 2) $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$; 3) $x^3 - 2x^2 + 4x - 2$. **2.** 1) $Q(x) = 4x^2 - 6x - 1$, $R(x) = 12x + 3$; 2) $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 10$, $R(x) = 20x + 21$. **3.** 1) $a = -18$, $b = -35$; 2) $a = -8$, $b = 20$; 3) $a = -1$, $b = -2$. **4** .1) $Q(x) = x + 6$, $R(x) = 12x + 12$; 2) $Q(x) = x$, $R(x) = -20x - 30$. **Пункт 10.3.** **1.** −101. **2.** $a = -3$. **3.** $x + 3$. **4.** $a = -1$, $b = 1$. **5.** 8; $5\frac{2}{3}$. **7.** $-2x^3 + 8x^2 + 14x - 20$. **8.** $a = -2$. **9.** 3. **10.** $2x^3 - 10x^2 + 6x + 18$. **11.** $a = 3$, $b = 9$. **12.** $x^2 + 5x + 1 = 0$. **13.** $x^2 - 5x + 2 = 0$. **14.** $x^2 - 30x + 9 = 0$. **Пункт 10.4.** **1.** 1) $Q(x) = x^2 + 2x + 1$, $R(x) = 0$; 2) $Q(x) = 5x^2 - x + 20$, $R(x) = 96$; 3) $Q(x) = x^2 - 18x + 64$, $R(x) = -168$. **2.** 1) Так; 2) так. **3.** 1) $2x^2 - 5x - 3$; 2) $2x^2 - 11x + 5$. **Пункт 10.5.** **1.** 1) 1; 2) −3; 2; 3) −4; 4) −2; 1. **2.** 1) 1; 2) −0,5; 3) ±1; $-\frac{2}{3}$; 4) −1; $\frac{2}{3}$. **3.** 1) $(2x + 1)(x + 1)(x - 2)$; 2) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$; 3) $(x - 1)^3(x + 1)$; 4) $(x - 1)^2(x + 5)(x - 5)$. **4.** 1) 1; $-1\pm\sqrt{3}$; 2) −2; −1; 3; 3) −0,5; 1; 4) 0,5; $1\pm\sqrt{2}$. Вказівка. Спочатку знайти раціональний корінь ($x = \alpha$) многочлена і розділити многочлен на $x - \alpha$. **5.** 1) $(x^2 + 3x - 2)\times(x^2 - 2x + 3)$; 2) $(x^2 + 3x - 1)(x^2 - 7x + 2)$. **6.** 1) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$; 2) $\left(\left(1+\sqrt{2}\right)x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(\left(\sqrt{2}-1\right)x^2\right)-\sqrt{2}-1)$; 3) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)$.

§ 11. **<u>Пункт 11.1.</u>** **1.** 1) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; 3) $\sqrt{2}-1$. **2.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=-2$; 2) $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}=-\frac{2}{3}$. **3.** $3+2\sqrt{2}$. **4.** $-\frac{2}{\sqrt{13}}$. **5.** 0,6. **6.** $-\frac{1}{3}$. **7.** 2. **8.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. В к а з і в к а. Якщо $\alpha=18^\circ$, то $36^\circ=2\alpha$ і $54^\circ=3\alpha$ (де $\sin\alpha>0$).

Додаткові вправи. **1.** 1) 0; 2) $|\sin\beta+\cos\beta|$; 3) 13; 4) $\sin\beta$. **2.** 1) $2\mathrm{tg}\,\alpha$; 2) -1; 3) 1; 4) 1. **7.** 1) $\frac{7}{9}$; 2) $\frac{1}{(m+1)^2}$; 3) $\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$. В к а з і в к а. З умови випливає, що $\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2}$, где $|\cos\alpha|\leqslant 1$; 4) $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Розділ 2

§ 12. **1.** 1) $y=\frac{1}{3}x+2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 2) $y=-\frac{1}{3}x-2$, $D=\boldsymbol{R}$, $E=\boldsymbol{R}$; 3) $y=\frac{2}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 4) $y=-\frac{1}{x}$, D: $x\neq 0$, E: $y\neq 0$; 5) $y=x^2$, $D=[0;+\infty)$, $E=[0;+\infty)$. **3.** 1) $y=2\sqrt{x}$; 2) $y=-2\sqrt{x}$; 3) $y=\sqrt{x}+2$; 4) $y=-\sqrt{x+2}$.

§ 13. **1.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 5) $-\frac{\pi}{2}$; 6) $-\frac{\pi}{4}$. **2.** 1) 0; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{3}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) 0; 3) $\frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) π; 6) $\frac{3\pi}{4}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$. **5.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$; 4) $\frac{3}{4}$. **6.** 1) 7; 2) 3; 3) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **7.** 1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$. **8.** 1) $\sqrt{7}$; 2) 1,5; 3) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; 4) $\frac{3}{5}$. **9.** 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $7-2\pi$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 4) $8-2\pi$; 5) $\frac{\pi}{5}$; 6) $4-\pi$; 7) $\frac{\pi}{9}$; 8) $10-3\pi$.

§ 14. **1.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) коренів немає; 3) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) коренів немає. **3.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin 0{,}6+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\arccos 0{,}3+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $-\mathrm{arctg}\,3{,}5+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\mathrm{arcctg}\,2{,}5+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{1}{4}\mathrm{arctg}\,3+\frac{\pi n}{4}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $(-1)^n\pi+4\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$;

2) $\pm\frac{15\pi}{4}+10\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{7\pi}{4}+7\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $(-1)^n\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm 2\pi+6\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

9. 1) $(-1)^{n+1}\frac{3\pi}{4}+3\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{3}+4\pi n;\ 4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+3\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **11.** 1) $-\frac{5\pi}{12}-\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi-2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-8\pi n;\ -\frac{4\pi}{3}-8\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2\pi n}{3};\ \frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{11\pi}{12};\ \frac{17\pi}{12};\ \frac{19\pi}{12}$; 2) $\pm\frac{\pi}{18};\ \pm\frac{11\pi}{18}$; $\pm\frac{13\pi}{18}$; 3) $-\frac{5\pi}{3};\ \frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{16};\ \frac{7\pi}{16};\ \frac{11\pi}{16};\ \frac{15\pi}{16}$. **13.** 1) $-\frac{17\pi}{18};\ -\frac{13\pi}{18};\ -\frac{5\pi}{18};\ -\frac{\pi}{18};\ \frac{7\pi}{18}$; $\frac{11\pi}{18};\ \frac{19\pi}{18}$; 2) $0;\ \pm 2\pi;\ 4\pi$; 3) $0;\ 2\pi;\ 4\pi$; 4) $\frac{5\pi}{12};\ \frac{11\pi}{12};\ \frac{13\pi}{12};\ \frac{19\pi}{12};\ \frac{7\pi}{4}$.

§ 15. **1.** 1) $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{(-1)^{n+1}}{2}\arcsin\frac{1}{3}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi+4\pi n,\ (-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$; $\pm\arccos\frac{1}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\pi+6\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

3. 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ (-1)^n\arcsin\frac{1}{5}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}5+\frac{\pi n}{2}$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ 2\operatorname{arcctg}\frac{5}{7}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

5. 1) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\left(\pi-\arccos\frac{1}{4}\right)+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $\pi+2\pi n,\ \pm\frac{2\pi}{3}+4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{5}{13}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ (-1)^n\arcsin\frac{3}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $2\pi n$, $\pi+4\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $4\pi n,\ \pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

9. 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$;

4) $\operatorname{arctg}\frac{-7\pm\sqrt{53}}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **10.** 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n}\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **11.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) πn; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **13.** 1) $(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}2+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **14.** 1) $\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **15.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **16.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **17.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **18.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}3+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$; $-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $-2\operatorname{arctg}2+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $-2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) πn; $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. **20.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\pi+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

§ 16. **1.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}-2\pi n\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}-2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$; $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{3}+2\pi(1-n)\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\left(\pi n;\frac{\pi}{4}-\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;-\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi+2\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n;\pi+2\pi k\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\left((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right)$, $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n;\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\pi n\right)$, $\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}-\pi n\right)$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(k-n)\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi(n+k);\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi(n+k);\ -\frac{\pi}{6}+\pi(n-k)\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$.
6. 1) $\left(\frac{5\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, $\left(\frac{\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{5\pi}{12}+\pi(k-n)\right)$, k, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\Big(\frac{\pi}{12}+$

$+\pi(n+k); -\frac{\pi}{12}+\pi(n-k)\Big)$, $\Big(\frac{5\pi}{12}+\pi(n+k); -\frac{5\pi}{12}+\pi(n-k)\Big)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $\Big(\frac{\pi}{4}+2\pi n+$ $+\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\Big(\frac{\pi}{4}+2\pi n-\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $\Big(2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\Big(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi k\Big)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 17. **2.** 1) а) Так; б) так; 2) а) так; б) ні. **6.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні. **7.** 1) $3\frac{2}{3}$; 2) -4; 3) -4; 4) -3; $\frac{2}{3}$. **8.** 1) Коренів немає; 2) 2; 3) $-\sqrt{2}$; 4) коренів немає. **9.** 1) $x \neq 1{,}5$ (умова для коренів); 2) $x \geqslant 0$. **11.** 1) 7; 2) 0; 4,5; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{1}{3}$.

§ 18. **1.** 1) 2; 2) 3; 3) (1; 0). **2.** 1) 0; 2) 0; 3) -1; 4) 0,5. **3.** 1) 3; 2) $(-2; 5)$; 3) (3; 1); 4) коренів немає; 5) (2; 1); 6) $(-1; 2; -3)$. **4.** 1) 6; 2) 1; 3) 0; 4) 6; 5) 2; 6) 1. **5.** 1) $(-5; -5)$; $(2; 2)$; 2) $(-2; -2)$; 3) $\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$; $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$; 4) $(-2; -2)$.

§ 19. **1.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) коренів немає; 3) $3 + 4n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) 1; 5) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{11}+\pi n$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $(0{,}5; \pi + 4\pi n)$, $(-0{,}5; \pi - 4\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) 1; 2) $-0{,}25$; 3) 1; 4) 1; 5) 0,125; 6) 0; ± 1. **6.** 1) $\Big(-\frac{\pi}{3}+\pi(2k-n); \frac{\pi}{6}-\pi n\Big)$, $\Big(\frac{\pi}{3}+\pi(2k+n); -\frac{\pi}{6}+\pi n\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\Big(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}(4k+n); \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\Big((-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\Big)$; $\Big((-1)^{n}\frac{\pi}{6}+\pi n;$ $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}; \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Big)$, k, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\Big(\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\Big)$, $\Big(\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi k\Big)$, $\Big(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; -\frac{2\pi}{3}+2\pi k\Big)$, $\Big(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{3}+2\pi k\Big)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(\pi n;$ $\pi k)$, $(-0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi n; -0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi k)$, $(0{,}5 \arccos(-0{,}75) +$ $+ \pi n; 0{,}5 \arccos(-0{,}75) + \pi k)$, $(-0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi n; -0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi k)$, $(0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi n; 0{,}5 \arccos 0{,}25 + \pi k)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$. В к а з і в к а. Подати систему у вигляді $\begin{cases} 4\sin(3x+2y) = -\sin x, \\ \sin y = -4\sin(2x+3y) \end{cases}$ і перемножити відповідно праві і ліві частини одержаних рівнянь. Врахувати, що при таких перетвореннях можлива поява сторонніх розв'язків системи. Розв'язуючи проміжне рівняння $4 \sin 5x + \sin x = 0$, зручно скористатися тим, що $\sin 5x = \sin(x + 4x)$.

§ 20. **1.** 1) При $-1 < a < 1$ коренів немає; при $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 1$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{a} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) при $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}5$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a < -0{,}5$ або $a > 0{,}5$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2a} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $a = 0$ або $a < -1$, або $a > 1$ $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1 \leqslant a < 0$ або $0 < a \leqslant 1$ $x = \pi n$, $x = \pm\arccos a + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $-1 < a < 1$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 1$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{a} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) При $a < -0{,}5$ або $a > 4$ коренів немає; при $a = -0{,}5$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-0{,}5 < a \leqslant 0$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1 \pm \sqrt{2a+1}}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $0 < a \leqslant 4$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1 - \sqrt{2a+1}}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) при $a < -1{,}25$ або $a \geqslant 5$ $x = \pi n$, $n \in Z$; при $a = -1{,}25$ $x = \pm\arccos 0{,}25 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1{,}25 < a < 1$ $x = \pi n$, $x = \pm\arccos\frac{1 \pm \sqrt{4a+5}}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $1 \leqslant a < 5$ $x = \pi n$, $x = \pm\arccos\frac{1 - \sqrt{4a+5}}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $b = 0$ рівняння не визначене; при $b \neq 0$ и $a = 0$ $x \neq \frac{\pi k}{b}$, $x \in \boldsymbol{R}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; при $b \neq 0$ и $a \neq 0$ $x = \frac{\pi n}{a}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \neq \frac{ak}{b}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $a = -1$ або $2 - 2\sqrt{2} < a < 2 + 2\sqrt{2}$ $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a < -1$ або $-1 < a \leqslant 2 - 2\sqrt{2}$, або $a \geqslant 2 + 2\sqrt{2}$ $x = 2\pi n$, $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} \arcsin\frac{2+a}{a\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $-2\sqrt{5} \leqslant a \leqslant 2\sqrt{5}$; 2) $-5 \leqslant b \leqslant 5$; 3) $a \in \boldsymbol{R}$; 4) $a \in \boldsymbol{R}$; 5) $\frac{4-\pi}{2} \leqslant a \leqslant \frac{4+\pi}{2}$. **4.** $3 - \frac{1}{\sqrt{2}} < a < 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.** (0; 1); (1; 1). **7.** 1) При $a < -2$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $-2 \leqslant a < 2$ $x \in \left(\arcsin\frac{a}{2} + 2\pi n;\ \pi - \arcsin\frac{a}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 2$ коренів немає; 2) при $a \leqslant \frac{1}{3}$ $x \in \left(-\arccos\frac{a+5}{5a-7} + 2\pi n;\ \arccos\frac{a+5}{5a-7} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $\frac{1}{3} < a < 3$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $a \geqslant 3$ $x \in \left(\arccos\frac{a+5}{5a-7} + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos\frac{a+5}{5a-7} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) при $a < -1$ $x \in \boldsymbol{R}$; при $a = -1$ $x \in (-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-1 < a < 0$ или $0 < a < 3$ $x \in \left(-\arccos\frac{1 - \sqrt{a+1}}{a} + 2\pi n;\ \arccos\frac{1 - \sqrt{a+1}}{a} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = 0$ $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a \geqslant 3$ $x \in \left(-\arccos\frac{1 - \sqrt{a+1}}{a} + 2\pi n;\ -\arccos\frac{1 + \sqrt{a+1}}{a} + 2\pi n\right) \cup \left(\arccos\frac{1 + \sqrt{a+1}}{a} + 2\pi n;\ \arccos\frac{1 - \sqrt{a+1}}{a} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $-0{,}5 \leqslant a \leqslant 0{,}5$; 2) $-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{3}$. **9.** 1) $a < -2$, $a = 1$, $a > 2$; 2) $a < 0$, $a = 1$, $a > 4$; 3) $a = 2$.

10. 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi(k+n);\ \frac{\pi}{2}+\pi(k-n)\right)$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$; 4) при $a<-2$ $x \in \left[\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\right] \cup \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-2 \leqslant a \leqslant 2$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, при $a>2$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n\right] \cup \left[\arccos\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 21. **Пункт 21.1.** **1.** 1) $(-\infty; -2] \cup (1; 2] \cup (4; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2) \cup (3; 8)$; 3) $(4; 5]$; 4) $[-10; -2) \cup (4; +\infty)$. **2.** 1) $[-2; -1] \cup [1; 2]$; 2) $(-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) \cup (1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3] \cup (0; 3]$; 4) $(-6; 2)$. **3.** 1) $(-2; 2) \cup [4; +\infty)$; 2) $(-2; -1)$ або 1; 3) $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$; 4) $(-\infty; -1) \cup [4; +\infty)$. **Пункт 21.2.** **1.** 1) $-\frac{2}{3}$; 4; 2) 0,5; 3,5; 3) -1; 2; 3; 6. **2.** 1) $(-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$; 2) $(-0{,}8; 2)$; 3) $(-3; -1) \cup \left(-1; -\frac{1}{3}\right)$; 4) $\left(-2; 2\frac{2}{3}\right)$. **3.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) -1; -3. **4.** 1) $[1; 3]$; 2) -8; 12; 3) $[-5; 8]$. **5.** 1) Розв'язків немає; 2) $[2; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup (8; +\infty)$. **6.** 1) $[1; 2]$; 2) $-2\frac{1}{3}$; 3. **7.** 1) -3; 5; 2) $[-1; 4]$. **8.** 1) $-\frac{2}{3}$; 0,5; 2; 2) $-2-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$. **9.** 1) 0; ± 2; 4; 2) -2; 1; 3; 6. **10.** 1) $(-1; 5)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1-\sqrt{41}}{2}\right) \cup (-1; 2) \cup \left(\frac{1+\sqrt{41}}{2}; +\infty\right)$. **11.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 2) $[1; 3]$. **12.** 1) $(-5; -2) \cup (-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; -5) \cup (-3; 3) \cup (5; +\infty)$. **13.** 1) $[-6; -2] \cup [4; 8]$; 2) $(-\infty; -8) \cup (2; +\infty)$. **14.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; -5] \cup [4; +\infty)$. **15.** 1) $\left[-3-\sqrt{5}; -4\right) \cup (-2; 0]$ 2) $\left[-1-2\sqrt{2}; -3\right) \cup (1; 3]$.

§ 22. **1.** 1) $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) розв'язків немає; 4) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **3.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** 1) $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.** 1) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{2}+6\pi n; \frac{11\pi}{2}+6\pi n\right]$,

$n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{5}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **6.** 1) $\left[\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\frac{9\pi}{2}+6\pi n; 6\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{48}+\right.$ $\left.+\frac{\pi n}{2}; \frac{5\pi}{48}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **7.** 1) $\left(-\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi n}{3}; -\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[-\frac{7\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{60}+\frac{\pi n}{5}\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{3\pi}{2}+2\pi n; 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\right.$ $\left.-\frac{\pi}{4}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **9.** 1) $\left(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **10.** 1) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n; \pi-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n;\right.$ $\left.\frac{\pi}{8}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **11.** 1) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **12.** 1) $\left(\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{3\pi}{8}+\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{8}+\pi n; \pi+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **13.** 1) $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **14.** 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; -\frac{2\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(-\frac{2\pi}{7}+2\pi n;\right.$ $\left.2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{4\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{4\pi}{7}+2\pi n; \frac{6\pi}{7}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{6\pi}{7}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **15.** $\left(-\frac{7\pi}{12}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup$ $\cup \left[0; \frac{\pi}{12}\right)$. **16.** $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$. **17.** 1) При $a \leqslant -2$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup$ $\cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \pi+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-2 < a < -\sqrt{2}$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; 2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+\right.$ $\left.+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = -\sqrt{2}$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n;\right.$ $\left.\frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\arccos\frac{a}{2}+2\pi n;\right.$ $\left.\frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(2\pi-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $a = \sqrt{2}$ $x \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\pi+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; при $\sqrt{2} < a < 2$

$x\in\left(2\pi n;\ \arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi-\right.$ $\left.-\arccos\frac{a}{2}+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$; при $a\geqslant 2$ $x\in\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right)$, $n\in\mathbf{Z}$.

Додаткові вправи. **1.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **2.** 1) πn, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) πn, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** 1) $\pi+2\pi n$, $4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $2\pi n$, $\pi+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arcctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **5.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **6.** 1) $2\pi n$, $(-1)^n\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{5\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; **7.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **8.** 1) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) πn, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **9.** 1) $-\frac{3\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$, π; 3) $67{,}5^\circ$; 4) 240°. **10.** 1) $\frac{5\pi}{6}$; 2) 2π; 3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{5}$. **11.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **12.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}3+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}15+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arcctg}13+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **13.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; **14.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbf{Z}$. **15.** 1) $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbf{Z}$;

4) $\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **16.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **17.** 1) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^n\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **18.** 1) $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pi + 2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{1}{5\sqrt{2}}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **19.** 1) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{8}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^n\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **20.** 1) πn, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{2\pi n}{3}$, $\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}+(-1)^n\arcsin\frac{4}{\sqrt{34}}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **21.** 1) $2\pi n$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{2}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\sqrt{5}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **22.** 1) -2; 2) 7; 3) 0; 4) $\pm 0{,}5$; 1. **23.** 1) 0; $\pm\frac{4\pi}{3}$; $\pm\frac{8\pi}{5}$; 2) $-\frac{10\pi}{3}$; -2π; $-\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{6+\sqrt{2}}{4}$; 4) 1,75. **24.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) коренів немає. **25.** 1) 0; 2) 1; 3) $\pm\sqrt{2}$; 4) 0. **26.** 1) πn, $-\frac{7\pi}{12}+2\pi n$, $-\frac{11\pi}{12}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **27.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{12}{13}+2\pi n;\ 2\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\arccos\frac{3}{5}+2\pi n;\ 1\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(2\pi n;\ 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **28.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **29.** 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ 2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **30.** 1) $\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2};\ \frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **31.** 1) $\left(-\operatorname{arctg} 2+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]\cup$

$\left[\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **32.** 1) $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\right.$ $\left.+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)\cup$ $\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left[-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \operatorname{arctg}2+\right.$ $\left.+\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **33.** 1) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left(\pi+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left[\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{7\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **34.** 1) $\left(-\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}-\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{8}+\pi n;\ \frac{\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{2\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{8}+\pi n;\ \frac{3\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{4\pi}{7}+\right.$ $\left.+\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{8}+\pi n;\ \frac{5\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \frac{6\pi}{7}+\pi n\right)\cup\left(\frac{7\pi}{8}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{7}+\right.$ $\left.+2\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{5\pi}{7}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{9\pi}{7}+2\pi n;\ \frac{4\pi}{3}+\right.$ $\left.+2\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{11\pi}{7}+2\pi n\right]\cup\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{13\pi}{7}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **35.** 1) $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $(0{,}5;\ 1]$; 3) $[-1;\ \sin 0{,}5)\cup(\sin 1;\ 1]$; 4) $[-1;\ \cos 2)$. **36.** 1) $\left(\frac{17\pi}{36}+2\pi n;\right.$ $\left.\pi+2\pi n\right)\cup\left(\frac{53\pi}{36}+2\pi n;\ \frac{35\pi}{18}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ \infty)$; 4) $(0;\ 1)$. **37.** 1) $0\leqslant a\leqslant 3$; 2) $-4{,}5\leqslant a\leqslant 4{,}5$. **38.** 1) $[0{,}6;\ 1]$; 2) $[0{,}6;\ 1]$; 3) $[0{,}5;\ 1]$; 4) $\left[0{,}5;\ \frac{120}{169}\right]$. **39.** 1) πn, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **40.** 1) $a\leqslant -2\sqrt{6}$ або $a\geqslant 2\sqrt{6}$; 2) $a\leqslant -4\sqrt{6}$ або $a\geqslant 4\sqrt{6}$.

Розділ 3

§ 23. **2.** 1) -2; 2) 0,5; 3) -1; 4) 2; 5) 5; 6) 3. **3.** 1) 20; 2) 10; 3) 6; 4) $3\sqrt[5]{16}$. **4.** 1) 3; 2) 10; 3) -2; 4) 5. **5.** 1) -2; 2) 3; 3) -5; 4) 2. **6.** 1) 77; 2) 6; 3) 15; 4) 5. **7.** 1) 108; 2) 200; 3) 0,9; 4) $1\frac{1}{3}$. **9.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[3; +\infty)$; 3) $[-2; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$. **10.** 1) $\frac{3\sqrt[7]{64}}{2}$; 2) $\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}$; 3) $\frac{1}{6}$ при $a = 9$; $\frac{\sqrt{a}-3}{a-9}$ при $0 \leqslant a < 9$ або $a > 9$; вираз невизначений при $a < 0$; 4) $\frac{1}{3}$ при $x = 1$; $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ при $x \neq 1$. **11.** 1) $a^2b\sqrt[5]{ab^2}$; 2) $ab^3\sqrt[4]{a^3b}$; 3) $-3ab^4\sqrt[3]{a^2b^2}$; 4) $2ab^2\sqrt[6]{2a^3b^5}$. **12.** 1) $|ab^3|\sqrt{|b|}$; 2) $ab\sqrt[7]{a^2b}$; 3) $2a^2b\sqrt[6]{b}$; 4) $a^2|b|\sqrt[8]{ab}$. **13.** 1) $\sqrt[3]{7a^3}$; 2) $-\sqrt[4]{ab^5}$; 3) $\sqrt[7]{5a^7b^7}$; 4) $\sqrt[6]{a^7b}$. **14.** 1) $\sqrt[4]{7a^4}$ при $a \geqslant 0$; $-\sqrt[4]{7a^4}$ при $a < 0$; 2) $\sqrt[7]{a^{22}b}$; 3) $\sqrt[6]{2ab^7}$; 4) $\sqrt[8]{-3b^{11}}$. **15.** 1) $-a$; 2) a; 3) 0; 4) 0. **16.** 1) $2|a|b^2\sqrt[4]{2}$; 2) ab^2c; 3) $\sqrt[20]{|a|^{17}}$; 4) $\sqrt[60]{2}\cdot\sqrt[12]{3}\cdot\sqrt[30]{|a|^{11}}$. **17.** 1) $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$; 2) $\sqrt[4]{y}$; 3) $\frac{\sqrt[3]{b}\left(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}\right)}{\sqrt{a}}$; 4) $-\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ при $x \geqslant 0$, $y > 0$; $\sqrt[6]{\frac{x}{y}}$ при $x \leqslant 0$, $y < 0$. **18.** 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\pm\sqrt[6]{3}$; 3) $-\sqrt[5]{5}$; 4) коренів немає; 5) ± 2; 6) -4.

§ 24. **1.** 1) 3; 2) коренів немає; 3) -26; 4) 0; 5) 45. **2.** 1) 8; 2) 2. **3.** 1) 2; 2) 10; 3) 4; 4) 7. **4.** 1) 3; 2) -5; 3) -11; 4) -8; 5. **5.** 1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) $\pm\sqrt{2}$. **6.** 1) 1; 2; 10; 2) -1. **7.** 1) (8; 0); 2) (4; 1); 3) (4; 1); 4) (16; 1). **8.** 1) (27; 1), (1; 27); 2) розв'язків немає; 3) $\left(-\frac{5}{7}; -\frac{3}{7}\right)$; 4) (0,5; 1,5).

§ 25. <u>**Пункт 25.1.**</u> **1.** 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{\frac{1}{9}}$; 3) $\sqrt[4]{5}$; 4) $\sqrt[7]{\frac{1}{64}}$; 5) $\sqrt{8}$; 6) $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$. **2.** 1) $3^{\frac{5}{6}}$; 2) $4^{\frac{1}{5}}$; 3) $7^{-\frac{9}{2}}$; 4) $a^{-\frac{2}{9}}$; 5) $(2b)^{\frac{1}{4}}$; 6) $|c|^{\frac{4}{11}}$. **3.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **4.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$. **5.** 1) 9; 2) $\frac{3}{8}$; 3) 32; 4) $\frac{9}{625}$; 5) 8,2; 6) 6,75; 7) 3,25. **7.** 1) $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}}+5}$; 3) $\frac{1}{c^{\frac{1}{2}}-d^{\frac{1}{2}}}$; 4) $m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}$. **8.** 1) $1+c$; 2) $x+y$; 3) $x-1$; 4) $k^{\frac{1}{2}}-l^{\frac{1}{2}}$. **9.** 1) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+4}$; 2) $a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$; 3) $z^{\frac{1}{3}}-2$; 4) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. **10.** 1) 1; 2) 128; 3) $4\sqrt{2}$; 4) $\pm 4\sqrt{2}$.
<u>**Пункт 25.2.**</u> **1.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 3) $[1; +\infty)$; 4) $(0; +\infty)$; 5) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$; 6) $\boldsymbol{R}$.

§ 26. <u>**Пункт 26.1.**</u> **1.** 1) -1; 2) 3. **2.** 1) 0; 2) 0; 3) коренів немає; 4) 3. **3.** 1) 1; 2) (4; 25). **4.** 1) 8; 2) 4; 3) 2; 4) 1, -1. **5.** 1) (16; 16); 2) (4; 4). <u>**Пункт 26.2.**</u> **1.** 1) $\frac{13-\sqrt{61}}{2}$; 2) -3; 1; 3) 4; 4) 4. **2.** 1) 1; 2) [5; 8]. **3.** 1) $1\frac{2}{7}$; 2) $2-2\sqrt{2}$; $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **4.** 1) $\frac{15+3\sqrt{5}}{10}$; 2) -1. **5.** 1) 32; 2) 64.

§ 27. **1.** 1) $(-\infty; -3]$; 2) $(-\infty; 0]\cup\left[3; 3\frac{4}{7}\right)$. **2.** 1) $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right]\cup[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0]\cup$ $\cup[1; +\infty)$. **3.** 1) -2; $[-1; 3]$; 2) -3; $(-0,5; 1]$. **4.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $[10; +\infty)$. **5.** 1) $\left[3-2\sqrt{2}; 9\right)$; 2) $[0; 4)\cup(9; +\infty)$. **6.** 1) $(-\infty; -3]\cup(0; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2)\cup$ $\cup(0; 1)\cup(1; +\infty)$. **7.** 1) $[2; 5,2]$; 2) $[1; 5)\cup(10; +\infty)$. **8.** 1) Розв'язків немає; 2) 2; 3. В к а з і в к а. Знайти ОДЗ нерівності і врахувати, що вона містить тільки два числа.

§ 28. **1.** 1) При $a\in \boldsymbol{R}$ $x=a+4$; 2) при $a\geqslant 0$ $x=a^2-2a$; при $a<0$ коренів немає; 3) при $m\leqslant 0$ або $m>3$ коренів немає; при $0<m\leqslant 3$ $x=\frac{m^4-6m^2+81}{4m^2}$; 4) при $a=0$ $x=0$; при $a\geqslant 1$ $x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$; при $a<0$ або $0<a<1$ коренів немає. **2.** 1) При $a\leqslant 1$ $x=a$; при $1<a<2$ $x\in[1; a]$; при $a=2$ $x\in[1; 2)$; при $a>2$ $x=a$ або $x\in[1; 2)$; 2) при $a<0$ розв'язків немає; при $a=0$ $x\in(0; +\infty)$; при $a>0$ $x\in\left[-\frac{4}{3}a; -a\right)\cup(0; +\infty)$; 3) при $a\leqslant -4$ розв'язків немає; при $-4<a\leqslant 0$ $x\in\left(2-\sqrt{4+a}; 2+\sqrt{4+a}\right)$; при $a>0$ $x\in\left[-\frac{a}{4}; 2+\sqrt{4+a}\right)$; 4) при $a\leqslant -\frac{1}{2}$ $x\in\left[a; \frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $-\frac{1}{2}<a<-\frac{7}{16}$ $x\in\left[\frac{-3-\sqrt{-7-16a}}{8}; \frac{-3+\sqrt{-7-16a}}{8}\right]$; при $a=-\frac{7}{16}$ $x=-\frac{3}{8}$; при $a>-\frac{7}{16}$ розв'язків немає; 5) при $a<-2$ або $a>2$ $x\in\left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2}; |a|\right)$; при $-2\leqslant a<-\sqrt{2}$ або $\sqrt{2}<a\leqslant 2$ $x\in\left(\frac{2-\sqrt{2a^2-4}}{2}; \frac{2+\sqrt{2a^2-4}}{2}\right)$; при $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ розв'язків немає. **3.** $a\leqslant 5,125$. **4.** $a<0$, $a=\sqrt{2}$. **5.** $a\leqslant 1$. **6.** При $a\leqslant 1$ один розв'язок; при $a>1$ розв'язків немає.

Додаткові вправи. **1.** 1) $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3}$; 3) $\frac{2\sqrt{15}}{15}$; 4) $\frac{3\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{5}$. **2.** 1) 0; 2) 1; 3) $\sqrt{2}-0,75$; 4) 1. **3.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}$; 2) 1; 3) $x-1$; 4) $\frac{1-c}{\sqrt{c}}$. **4.** 2) $\frac{1}{8b}$; 3) $-2\sqrt[4]{x}$. **5.** 1) $x+1$; 2) $ab^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\right)$; 3) $3y^{\frac{1}{2}}$. **6.** 1) коренів немає; 3) -2; 3; 4) 3. **7.** 1) 2; 3) 2; 4) 7. **8.** 1) $-\frac{1}{11}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) [5; 10]; 4) [7; 14]. **9.** 1) 8; 2) коренів немає; 3) −3; 6; 13; 4) 1; 2; 10. **10.** 1) 8; $\frac{56\pm12\sqrt{21}}{7}$; 2) 1; 1,5; 2; 4) 64. **11.** 1) $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4};\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)$; 2) (0; 1); 3) розв'язків немає; 4) розв'язків немає. **12.** 1) $(t+1;$ $t)$, $t\in \boldsymbol{Z}$; 2) (5; 4); (−0,5; −0,4); 3) $\left(1+\sqrt{5};\ \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$; 4) (2; 3); $\left(4\frac{1}{3};-1\frac{2}{3}\right)$. **13.** 1) [−2; +∞); 2) [0; +∞); 3) [0; 3]; 4) (−2; −1]. **14.** 1) $(-\infty;-2]\cup\left[-1;\ \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right)$; 2) $(-2;-1]\cup\left[-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$; 3) (−∞; 0,75] ∪ (4; 7); 4) (−3; 1). **15.** 1) [1; 2]; 2) [4; 20]; 3) $\left[2;\ 2\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$; 4) $\left[2;\ \frac{\sqrt{146}-7}{2}\right)$. **16.** 1) [−2; 0) ∪ (0; 1,6); 2) $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$; 3) −1; [2; +∞); 4) −2; 1; [3; +∞). **17.** 1) (−1; +∞); 2) $\left(-\infty;\ -1\frac{1}{3}\right]\cup[3;\ +\infty)$; 3) [−1; 3]; 2; 4) −3; [−2; 4]. **18.** 1) $\left[-1-2\sqrt{13};\ -5\right)\cup\left(1;\ -1+2\sqrt{13}\right]$; 2) (−∞; 0) ∪ ∪ [1; 2]; 3) $\left[-5;\ -4+2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$; 4) $\left(6-2\sqrt{\sqrt{5}-2};\ 7\right]$. **19.** 1) [2,5; 3); 2) [1; 1,5); 3) $\left(5\frac{2}{3};\ +\infty\right)$. **20.** 1) $\left(-1;\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{5}};\ 1\right)$; 2) (0; 0,5); 3) (−0,75; 1); 4) [−1; 0). **21.** 1) $(0;\ 4)\cup\left[\frac{8+4a^2+8\sqrt{a^2+1}}{a^2};\ +\infty\right)$; 2) при $a<2$ $x\in\left(0;\ \frac{a}{a-2}\right]\cup(1;+\infty)$; при $a=2$ $x\in(1;+\infty)$; при $a>2$ $x\in\left(1;\ \frac{a}{a-2}\right]$. **22.** $-1{,}25<a\leqslant1$ або $a\geqslant1{,}25$. **23.** $a<-3$ або $a>1$. **24.** $a<-1$.

Розділ 4

§ 29. **4.** 1) (1; +∞); 2) (−∞; 0); 3) (−2; +∞); 4) (−∞; 0). **10.** 1) «−»; 2) «−»; 3) «+»; 4) «+».

§ 30. **Пункт 30.1.** **1.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 2; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $2\pm\sqrt{6}$; 7) −3; 2; 8) 0; 9) 2; 10) 4; 11) коренів немає; 12) 5; 13) коренів немає; 14) 0; 15) 1; 16) 2; 17) 1; 18) 2; 3; 19) 1; 20) 1; 21) 2; 22) 2. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 3. **3.** 1) −4; 2; 2) −2; 3; 3) −2; 4; 4) −1; 3; 5) $\pm\sqrt{3}$. **4.** 1) 1; 2) 1; 3) 3; 4) −1; 5) 2; 6) 0; 7) −2; 8) 2. **5.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) при $a=0$ $\boldsymbol{R}$; при $a\neq0$ $x=1$; 3) при $a=0$ $x\in\boldsymbol{R}$, $x\neq0$; при $a>0$ $x=0{,}5$ (при $a<0$ рівняння не визначене). **Пункт 30.2.** **1.** 1) 0; 2) 1; 3) 1; 4) 1; 5) 1. **2.** 1) 1; 2) 1; 3) 0; 2; 4) 0; 2; 5) 3; 6) 0,5; 7) ±1; 8) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** 1) 0; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 0; 6) 1,5. **4.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 1; 5) 0; 1. **5.** 1) 2; 2) ±1; 3) 0; 4) 0; 1,5. **8.** 1) (3; −1); 2) (−2; −3); 3) (1; 2); (2; 1); 4) (3; 1); 5) (4; 2); 6) (4; 2).

Пункт 30.3. **1.** 1) $(0; +\infty)$; 2) $(-1; +\infty)$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) розв'язків немає; 5) $(-\infty; -2]$; 6) $(-\infty; 5]$; 7) $[2,5; +\infty)$; 8) $(0; +\infty)$; 9) $[1; 3) \cup [6; +\infty)$; 10) $[1; 4) \cup [8; +\infty)$. **2.** 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[-1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1]$; 5) $(2; +\infty)$; 6) $[1; 2]$. **3.** 1) $(-\infty; 0)$; 2) $(-\infty; 1]$; 3) $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$; 4) $[0; 1]$. **4.** 1) -2; $[3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]$, 4; 3) $(0; 1)$; 4) $(0; 1)$.

§ 31. **2.** 1) 2; 2) 3; 3) -2; 4) 0,5; 5) $-1,5$; 6) 0; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{1}{4}$; 9) -1; 10) -1. **3.** 1) $\log_4 9$; 6) $\ln 3$. **4.** 5) 14; 6) 54. **5.** 2) $2\lg a + 5\lg b - 7\lg c - 1$; 5) $2+7\log_3 a+\frac{1}{3}\log_3 b$. **6.** 1) $3\lg|a| + 5\lg|b| + 8\lg|c|$; 2) $\frac{1}{3}\lg|a|+\frac{1}{3}\lg|b|-$ $-2\lg|c|$; 3) $4\lg|c|-\frac{2}{5}\lg|a|-\frac{2}{5}\lg|b|$; 4) $2+\frac{1}{5}\lg|a|+\frac{1}{5}\lg|b|+\frac{2}{5}\lg|c|$. **7.** 1) $b + 1$; 2) $2a + b$; 3) $a + b + 1$; 4) $3a + 2b$. **8.** 1) $\frac{40}{9}$; 2) $\frac{\sqrt[3]{5a}\cdot c^5}{b^2}$; 3) $\frac{m^3\cdot\sqrt[7]{n^2}}{\sqrt[5]{p}}$; 4) $\frac{1}{1600}$. **9.** 1) $-\log_3 a$; 2) $0,5\log_3 a$; 3) $-0,5\log_3 a$; 4) $2\log_3 a$; 5) $\frac{\log_3 a}{\log_3 2}$. **10.** 1) 24; 2) 10; 3) 2,5; 4) 1,5; 5) 19; 6) 12. **11.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{2+a}{2(2-a)}$; 3) $\frac{b(3-2a)}{ab+2}$; 4) $\frac{b(a+4)}{3(1+ab)}$.

§ 32. **1.** 1) $(-3; +\infty)$; 2) $(3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(0; 3)$; 5) $\boldsymbol{R}$; 6) $\boldsymbol{R}$; 7) $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$; 8) $(2; 3) \cup (3; +\infty)$; 9) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; 10) $(0; 1) \cup$ $\cup (1; 2)$; 11) $(1,5; 2) \cup (2; 5)$.

§ 33. **Пункт 33.1.** **1.** 1) 16; 2) 5; 3) 2; 4) 100. **2.** 1) 5; 2) 6; 3) -3; 1; 4) 2,9. **3.** 1) 1; 2) 0; 3) 2; 4; 4) 5. **4.** 1) 3; 27; 2) 10; 3) $\frac{1}{81}$; 9; 4) 0,1; 1; 10. **5.** 1) 1; 2) 2; 4; 3) 0; 4) $\log_3 4$. **8.** 1) (100; 10); (10; 100); 2) $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \sqrt{17}\right)$; 3) (4; 1); (1; 4); 4) (0,25; 64); (8; 2). **Пункт 33.2.** **1.** 1) $(9; +\infty)$; 2) $(0; 5)$; 3) $(0,5; +\infty)$; 4) $(0; 100)$. **2.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(0,2; 2)$; 3) $\left(\frac{2}{3}; 9\right)$; 4) $(-0,5; 1,5)$. **3.** 1) $(3; +\infty)$; 2) $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$; 3) $(2; 3)$; 4) $(0,5; 4]$. **4.** 1) $(0; 3) \cup (9; +\infty)$; 2) $(0,1; 10) \cup (10; 1000)$; 3) $\left[\frac{1}{9}; 9\right]$; 4) $(0; 0,5] \cup [4; +\infty)$. **5.** 1) $(10; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-4; -3) \cup$ $\cup (4; 5)$; 4) $[1; +\infty)$. **6.** 1) $(0; 0,25]$; 2) $(1; 4)$; 3) $(0;1)\cup\left[\sqrt{2}; 4\right]$; 4) $(-2; 0,5)$.

§ 34. **1.** 1) 1; 1000; 2) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; 10; 3) $\frac{1}{16}$; 8; 4) 3; 5) а) 1; 4; б) 0; 1; 4; 6) -1; 0; 2; 7) 3; 8) 0,25; 4; 9) 2. **2.** 1) (25; 5); (5; 25); 2) (0,5; 0,125); (8; 2). **3.** 1) $(0; 0,5) \cup$ $\cup (1; 2)$; 2) $(-\infty; -2] \cup [-1; 0] \cup [3; +\infty)$; 3) $[3; 5]$; 4) при $0 < a < 1$ $x \in (0; a) \cup$ $\cup (a^{-4}; +\infty)$; при $a > 1$ $x \in (a^{-4}; a)$; при $a \leqslant 0$ або $a = 1$ нерівність не визначена;

5) при $0 < a < 1$ $x \in (a;\ a^{-2})$; при $a > 1$ $x \in (0;\ a^{-2}) \cup (a;\ +\infty)$; при $a \leqslant 0$ або $a = 1$ нерівність не визначена.

§ 35. **1.** 1) 1; 2) 1; 3) 2; 4) 0; 5) 4; 6) коренів немає; 7) ± 2; 8) 1. Вказівка. Записати рівняння у вигляді $\log_2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 2x - x^2$ і врахувати, що при $x > 0$ $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$; 9) 1. **2.** 1) ± 2; 2) ± 2; 3) 2. Вказівка. Поділити обидві частини рівняння на 2^x і врахувати, що функція, одержана у лівій частині, спадна. **3.** 1) 0,25; 2; 2) 1; 3; 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 1,5. **4.** 1) -3; $[-1;\ +\infty)$; 2) $[25;\ +\infty)$. **5.** 1) При $a \geqslant 11$ $x = \log_5 \frac{a - 1 \pm \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$; при $a < -1{,}5$ $x = \log_5 \frac{a - 1 + \sqrt{a^2 - 10a - 11}}{2}$; при $-1{,}5 \leqslant a < 11$ коренів немає; 2) при $-1 < a \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ або $3 < a \leqslant 3 + 2\sqrt{2}$ $x = \log_2 \frac{a^2 - 1}{2(a - 3)}$; при $a \leqslant -1$ або $3 - 2\sqrt{2} < a \leqslant 3$, або $a > 3 + 2\sqrt{2}$ коренів немає. **6.** 1) $(-5;\ -5)$; $(2;\ 2)$; 2) $(3;\ 3)$. **7.** $-1 < a \leqslant 0$. **8.** $a \geqslant 1$. **9.** $a = -4$. Вказівка. Звести рівняння до виду $f(x) = 0$ і врахувати, що функція $f(x)$ парна. **10.** $a \leqslant 0$, $a = 0{,}25$. **11.** При $a < 0$ коренів немає; при $a = 0$ один корінь; при $a > 0$ два корені. **12.** При $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 7$ один корінь; при $-1 < a < 7$ два корені. **13.** $a \geqslant -2{,}25$.

Додаткові вправи. **1.** 1) -40; 2) $5\sqrt{3}$; 3) 7; 4) 20. **2.** 1) 1000; 2) -2; 3) 32; 4) 27; 5) 10. **3.** 1) 1; 2) 4; 3) 1; 4) 2. **4.** 1) 9; 2) 19; 3) 0,5. **5.** 1) $-27{,}2$; 2) $-0{,}8$; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 2,903. **6.** 1) $\frac{24a}{2 + 3a}$; 2) $\frac{a + 1}{2a}$; 3) $5(1 - a - b)$. **9.** 1) $(-\infty;\ -1] \cup [3;\ +\infty]$; 2) $(-\infty;\ -1] \cup [5;\ +\infty]$; 3) $\left[-\frac{1}{3};\ 0\right) \cup \left(\frac{2}{3};\ 1\right]$; 4) $[-1;\ 0) \cup (3;\ 4]$. **10.** 1) $(-\infty;\ 1]$; 3) $[0{,}5;\ 1]$; 4) $[2;\ 4]$. **11.** 1) $[-2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -8]$; 3) $[-1;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ 1]$. **12.** 1) $-2{,}5$; 2) 0,6; 3) 1,75; 4) 3. **13.** 1) -2; 2) 6; 11; 3) 16; 4) 64. **11.** 1) $[-2;\ +\infty)$. **14.** $-2 < a < 2$. Вказівка. Записати задані вирази як степені з однаковою основою 5.

Предметний покажчик

Т

Ф

Зміст

Розділ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

Розділ 3. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

Розділ 4. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Дворівневий підручник
для 10 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Відповідальний за випуск *К. В. Новак*; художній редактор *С. Е. Кулинич*;
комп'ютерна верстка *І. В. Чернуха*; коректор *Н. С. Дорохіна*

Свідоцтво ДК № 457 від 22.05.2001
Підписано до друку 07.06.06. Формат 66×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 30,8.

НМЦ «Світ дитинства» ТОВ
Україна, 61050, м. Харків, вул. Руставелі, 4/20

Відгуки і пропозиції щодо вдосконалення підручника
прохання надсилати на адресу:
61050, м. Харків, вул. Руставелі, 4/20.
НМЦ «Світ дитинства»