

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

НОВИЙ МАЙСТЕР-КЛАС

Т. Л. Корнієнко, В. І. Фігоміна

МАТЕМАТИКА

11

РОЗРОБКИ УРОКІВ

Рівень стандарту

- ◀ Плани-конспекти всіх уроків
- ◀ Дидактичні матеріали
- ◀ Завдання для індивідуальної роботи
- ◀ Розробки нестандартних уроків

НОВА 11-річна
ШКОЛА

До посібника **БЕЗКОШТОВНО** додається
календарно-тематичний план (www.ranok.com.ua)

www.e-ranok.com.ua

Т. Л. Корнієнко, В. І. Фіготіна

МАТЕМАТИКА

11

РОЗРОБКИ УРОКІВ

Рівень стандарту

- ◆ Плани-конспекти всіх уроків
- ◆ Дидактичні матеріали
- ◆ Завдання для індивідуальної роботи
- ◆ Розробки нестандартних уроків

УДК 371.321.1:512
ББК 74.262.21
К67

Серія «Новий майстер-клас»

Корнієнко Т. Л.

К67 Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Розробки уроків / Т. Л. Корнієнко, В. І. Фіготіна. — Х.: Видавництво «Ранок», 2012. — 368 с. — (Новий майстер-клас). + Дод. (16 с.).

ISBN 978-617-540-549-9

Посібник складено відповідно до чинної програми з математики для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів (рівень стандарту). Видання містить плани-конспекти, у яких розкрито зміст навчального матеріалу кожного уроку, описано його основні структурні елементи, зазначено дидактичну мету. У посібнику наведено численні дидактичні матеріали, запропоновано різні форми й методи роботи з класом.

Зміст посібника дозволяє використовувати видання в комплекті з будь-яким чинним підручником, призначеним для організації навчання математики на рівні стандарту.

До посібника безкоштовно додається календарно-тематичний план, який ви також можете знайти на сайті видавництва www.ranok.com.ua.

Призначено для вчителів математики, студентів педагогічних вузів.

УДК 371.321.1:512

ББК 74.262.21

Навчальне видання
КОРНІЄНКО Тетяна Леонідівна,
ФІГОТІНА Віра Іллівна

T15065У. Підписано до друку 27.01.2012.
Формат 60×90/16. Папір друкарський.
Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 23.

Серія «Новий майстер-клас»
Математика. 11 клас.
Рівень стандарту:
Розробки уроків

ТОВ Видавництво «Ранок».
Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008.
61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.
Для листів: 61045 Харків, а/с 3355.

Редактор *О. В. Костіна*
Технічний редактор *О. В. Сміян*

E-mail: office@ranok.com.ua
Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
З питань реалізації: (057) 712-91-44, 712-90-87.
E-mail: commerce@ranok.com.ua

www.ranok.com.ua



**Разом дбаємо
про екологію та здоров'я**


ISBN 978-617-540-549-9

© Т. Л. Корнієнко, В. І. Фіготіна, 2012

© ТОВ Видавництво «Ранок», 2012

ПЕРЕДМОВА

Посібник складено відповідно до чинної програми з математики для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів (11-річна школа) і призначено для організації навчання математики на рівні стандарту. Видання містить поурочні розробки, у яких розкрито зміст навчального матеріалу кожного уроку, описано його основні структурні елементи, зазначено дидактичну мету. У посібнику передбачено різні форми й методи роботи з класом.

До всіх тем курсу розроблено нестандартні уроки (вони позначені символом *), а також додаткові матеріали, які можна використати для підготовки коротких повідомлень. Вказівки та зауваження, на які слід звернути увагу учнів, мають позначку .

Зміст посібника дозволяє використовувати видання в комплекті з будь-яким чинним підручником з математики для 11 класу (рівень стандарту). Домашнє завдання, наведене в поурочних розробках, складено на базі підручників [2] і [3]. Завдання для індивідуальної роботи відповідають високому рівню навчальних досягнень.

У посібнику передбачено два варіанти проведення поточного й підсумкового контролю. Учитель може використати самостійні й контрольні роботи, запропоновані авторами, або скористатися посібниками [4] і [5]. В обох випадках запропоновано систему диференційованих за рівнем складності завдань, а відповіді або розв'язання до них наведено в конспектах уроків і додатку відповідно.

Численні дидактичні матеріали не завжди можуть бути використані повністю. Учитель на свій розсуд може вибрати те, що найбільш відповідає навчальним можливостям класу, що вважає потрібним для оптимізації навчально-виховного процесу, і «надбудувати власну конструкцію» уроку відповідно до творчих ідей і методичних прийомів.

КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН

№ з/п	Тема уроку	Дата	Д/з	Примітка
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ (РІВЕНЬ СТАНДАРТУ)				
(усього 54 год, I семестр — 16 год, 1 год на тиждень; II семестр — 38 год, 2 год на тиждень; резервний час — 8 год)				
ТЕМА 3. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ (12 год)				
1	Повторення відомостей про функцію			
2	Степінь із довільним дійсним показником			
3	Властивості та графіки показникової функції			
4	Логарифми та їхні властивості			
5	Основні властивості логарифмів			
6	Логарифмічна функція. Її графік і властивості			
7	Показникові рівняння і нерівності			
8	Показникові рівняння і нерівності			
9	Логарифмічні рівняння і нерівності			
10	Логарифмічні рівняння і нерівності			
11	Показникова і логарифмічна функції			
12	<i>Контрольна робота № 1</i>			
11*	Показникова і логарифмічна функції			
ТЕМА 4. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ (14 год)				
13	Границя функції в точці			
14	Похідна функції			
15	Похідна функції. Її геометричний і фізичний зміст			
16	Правила диференціювання			
17	Похідна складеної функції			
18	Правила диференціювання			
19	Ознаки сталості, зростання і спадання функції			
20	Екстремуми функції			
21	Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків			
22	Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків			
23	Найбільше і найменше значення функції на проміжку			
24	Найбільше і найменше значення функції на проміжку			
25	Похідна та її застосування			

Продовження таблиці

№ з/п	Тема уроку	Дата	Д/з	Примітка
26	Контрольна робота № 2			
25*	Похідна та її застосування			
ТЕМА 5. ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ (10 год)				
27	Первісна та її властивості			
28	Правила знаходження первісних			
29	Визначений інтеграл, його геометричний зміст			
30	Визначений інтеграл, його геометричний зміст			
31	Визначений інтеграл, його геометричний зміст			
32	Обчислення площ плоских фігур			
33	Обчислення площ плоских фігур			
34	Застосування інтеграла в фізиці й техніці			
35	Інтеграл та його застосування			
36	Контрольна робота № 3			
35*	Інтеграл та його застосування			
ТЕМА 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ (10 год)				
37	Випадкова подія. Відносна частота подій. Ймовірність події			
38	Випадкова подія. Ймовірність події			
39	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми й добутку			
40	Перестановки, розміщення, комбінації			
41	Застосування елементів комбінаторики для обчислення ймовірності подій			
42	Початкові відомості про статистику			
43	Графічне подання інформації про вибірку			
44	Характеристики вибірки: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення			
45	Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики			
46	Контрольна робота № 4			
45*	Елементи математичної статистики			
РЕЗЕРВНИЙ ЧАС І ПОВТОРЕННЯ (8 год)				
47				
48				
49				
50				

№ з/п	Тема уроку	Дата	Д/з	Примітка
51				
52				
53				
54				
ГЕОМЕТРІЯ (РІВЕНЬ СТАНДАРТУ) (усього 51 год, I семестр — 32 год, 2 год на тиждень; II семестр — 19 год, 1 год на тиждень; резервний час — 4 год)				
ТЕМА 3. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ (10 год)				
1	Прямокутні координати у просторі			
2	Відстань між точками в просторі. Координати середини відрізка			
3	Вектори в просторі			
4	Вектори в просторі. Дії над векторами			
5	Координати вектора в просторі. Формула для обчислення довжини вектора			
6	Додавання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори			
7	Скалярний добуток векторів. Кут між векторами			
8	Дії над векторами, заданими координатами			
9	Декартові координати і вектори у просторі			
10	Контрольна робота № 1			
9*	Декартові координати і вектори у просторі			
ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА. ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ (37 год)				
11	Циліндри і призми			
12	Циліндри і призми			
13	Циліндри і призми			
14	Конуси і піраміди			
15	Деякі види пірамід			
16	Піраміди і конуси			
17	Зрізана піраміда і зрізаний конус			
18	Правильні многогранники			
19	Контрольна робота № 2			
20	Куля, сфера. Площина, дотична до сфери			
21	Куля і сфера			

Закінчення таблиці

№ з/п	Тема уроку	Дата	Д/з	Примітка
22	Куля і сфера. Тіла обертання			
23	Комбінації геометричних тіл			
24	Комбінації геометричних тіл			
25	Комбінації геометричних тіл			
26	Контрольна робота № 3			
27	Площа поверхні призми			
28	Площа поверхні призми			
29	Площа поверхні піраміди			
30	Площа поверхні піраміди			
31	Площі поверхонь многогранників			
32	Площа поверхні циліндра			
33	Площа поверхні конуса			
34	Площа поверхні сфери			
35	Контрольна робота № 4			
36	Об'єм призми і циліндра			
37	Об'єми призми і паралелепіпеда			
38	Об'єм циліндра			
39	Об'єм призми і циліндра			
40	Об'єм конуса і піраміди			
41	Об'єм піраміди			
42	Об'єм конуса			
43	Об'єм конуса і піраміди			
44	Об'єм кулі			
45	Об'єми тіл обертання			
46	Об'єми тіл			
47	Контрольна робота № 5			
46*(1)	Об'єми геометричних тіл і площі їхніх поверхонь			
46*(2)	Розв'язування задач прикладного характеру із застосуванням формул об'ємів геометричних тіл			
РЕЗЕРВНИЙ ЧАС І ПОВТОРЕННЯ (4 год)				
48				
49				
50				
51				

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ (РІВЕНЬ СТАНДАРТУ)

ТЕМА 3. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

УРОК № 1

ТЕМА. ПОВТОРЕННЯ ВІДОМОСТЕЙ ПРО ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання учнів про функції та їхні властивості; розвивати пізнавальну активність, логічне мислення; виховувати почуття відповідальності, уміння спілкуватися.

Очікувані результати: учні повинні оперувати поняттями функції, області визначення функції, області значень функції; встановлювати за графіком функції її основні властивості; знаходити область визначення функції, значення функції при заданих значеннях аргументу та значення аргументу, за якого функція набуває цього значення; використовувати різні способи задання функцій; досліджувати властивості функцій, вивчених раніше.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель знайомить учнів з особливостями курсу алгебри і початків аналізу в 11 класі, змістом і структурою підручника.

II. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Як сказав відомий математик Е. Вігнер, уся глибина думки, закладеної у формулювання математичних понять, згодом розкривається тим умінням, з яким це поняття використовується.

За допомогою тієї самої функції можна досліджувати будь-які за своєю природою процеси. Здавалося б, що спільного між збільшенням потоку інформації та зменшенням атмосферного тиску при збільшенні висоти над рівнем моря? Відповідь проста: ці явища можна вивчити й описати за допомогою тієї самої функції. Сьогодні ми повторимо все, що ви знаєте про функцію, адже без цього неможливий подальший рух уперед.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Робота в парах

Користуючись рис. 1, підготовленим заздалегідь на дошці, учні обговорюють відповіді на запитання, роздані на кожному парту.

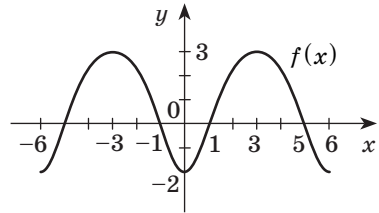


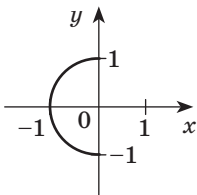
Рис. 1

1. Якою є область визначення функції $f(x)$?
2. Знайдіть область значень функції $f(x)$.
3. Визначте нулі функції та проміжки її знакосталості.
4. Назвіть проміжки зростання і спадання функції.
5. Функція є парною чи непарною?
6. Які найбільше і найменше значення функції? При яких значеннях аргументу функція набуває свого найбільшого (найменшого) значення?

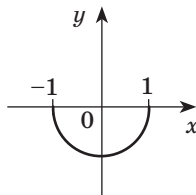
IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Фронтальна бесіда за технологією «Мікрофон»

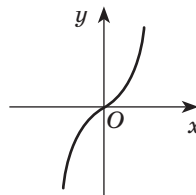
1. Дайте визначення функції.
2. Що називають областю визначення функції; областю значень функції?
3. Що таке графік функції?
4. Як можна задати функцію?
5. У яких випадках лінії, зображені на рис. 2, a – $г$, є графіком функції? Відповідь обґрунтуйте.



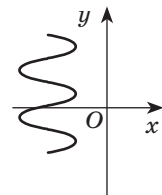
а



б



в



г

Рис. 2

6. Що називають нулями функції? Як знайти нулі функції?
7. Які функції називають непарними; парними?
8. Дайте визначення зростаючої (спадної) функції на множині M .

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в малих групах

Учні працюють у групах по 4 особи (ті, хто сидить за першою партою, повертаються до тих, хто сидить за другою, і т. д.), спільно обговорюють виконання завдання і роблять записи в зошиті, які потім коментують біля дошки.

Завдання для роботи групи

Побудуйте графік функції $y = f(x)$ за заданими умовами.

1. Область визначення функції $D(f) = [-3; 2; 2]$.
2. Область значень функції $E(f) = [-1; 4]$.
3. Функція не є ані парною, ані непарною.
4. Нулі функції: $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$.
5. Функція зростає при $x \in (-3; -2)$ і $x \in (0; 2)$.
6. Функція спадає при $x \in (-2; 0)$.
7. Найменшого значення -1 функція набуває при $x = 0$, найбільшого значення 4 — при $x = -2$.

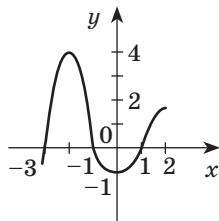


Рис. 3

Побудова: рис. 3.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель підкреслює, що поняття функції є однією із змістових ліній шкільного курсу алгебри і початків аналізу, а властивості функції необхідно знати для побудови графіка.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 1	[3]: § 1
С	№ 16	№ 9
Д	№ 25	№ 13
В	№ 31	№ 12

Індивідуально

1. Побудувати графік функції $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 3}$.
2. Підготувати коротке повідомлення про історію виникнення та розвитку поняття степеня.

ТЕМА. СТЕПІНЬ ІЗ ДОВІЛЬНИМ ДІЙСНИМ ПОКАЗНИКОМ.

Мета уроку: повторити поняття степеня з раціональним показником, властивості степеня з раціональним показником; сформувати поняття степеня з ірраціональним показником; розвивати в учнів уміння проводити аналогії, аналізувати й узагальнювати отримані раніше знання, грамотно й логічно висловлювати думки; виховувати увагу, інтерес до нових знань, самостійність.

Очікувані результати: учні повинні знати зміст поняття степеня з ірраціональним показником; обчислювати, оцінювати й порівнювати значення виразів, які містять степені з дійсним показником.

Основні поняття: степінь з ірраціональним показником.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні, працюючи в парах, здійснюють взаємоперевірку за відповідями, заздалегідь підготовленими на дошці. Потім кілька учнів роблять коротке повідомлення (див. додатковий матеріал).

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

- Що називається n -м степенем числа a при $n \in \mathbb{N}$?
- Дайте визначення степеня із цілим від'ємним показником; з нульовим показником.
- Обчисліть: 3^{-2} ; $0,2^0$; $(-5)^{-3}$; $(-1)^{-2011}$.
- При яких значеннях a існують значення виразів a^{-n} , a^0 , де $n \in \mathbb{N}$?
- Дайте визначення степеня з раціональним показником.
- Якою є область допустимих значень виразів $a^{\frac{4}{5}}$, $a^{-\frac{4}{5}}$?
- Запишіть у вигляді степеня вираз: а) $x^{0,4} \cdot x^{-2} \cdot x^{3,5}$; б) $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{7}}$;
в) $\frac{a^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{3}}}$; г) $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a}$. Обґрунтуйте виконане перетворення.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Людська природа є такою, що, дізнавшись і отримавши мале, хочеться отримати більше. Так, нам не можна обмежуватися знаннями про степінь із раціональним показником, бо мимоволі замислюєшся, а чи може показник бути нерациональним числом. І якщо так, то як це слід розуміти?

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Розглянемо степінь $2^{\sqrt{3}}$ з ірраціональним показником $\sqrt{3}$. Подамо ірраціональне значення $\sqrt{3}$ у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу: $\sqrt{3} = 1,7320508075\dots$

Розглянемо послідовність (γ_n) десяткових наближень числа $\sqrt{3}$. (γ_n) : 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; ...

Чим далі знаходиться число у послідовності наближень, тим менше воно відрізнятиметься від числа $\sqrt{3}$, тобто зі збільшенням n значення $|\sqrt{3} - \gamma_n|$ наближається до нуля. У цьому випадку послідовність γ_n наближається до числа $\sqrt{3}$.

Розглянемо послідовність степенів числа 2 з показниками 1; 1,7; 1,73; 1,732; 1,7320; 1,73205; ... : 2^1 ; $2^{1,7}$; $2^{1,73}$; $2^{1,732}$; $2^{1,7320}$; $2^{1,73205}$, ... Ця послідовність прямує до деякого числа, яке і вважають степенем числа 2 з показником $\sqrt{3}$.

Якщо γ — деяке ірраціональне число й a — додатне число, відмінне від одиниці, то a^γ визначається аналогічно.

Прийнято вважати, що $1^\gamma = 1$ для будь-якого дійсного показника γ і $0^\gamma = 0$, якщо $\gamma > 0$.



Степінь від'ємного числа з будь-яким від'ємним ірраціональним показником не визначений. Також не визначений степінь нуля з від'ємним ірраціональним показником.

Отже, якщо $a > 0$, то степінь a^γ визначений для раціонального й ірраціонального показників, тобто для будь-якого дійсного показника.

Степені з дійсними показниками мають ті самі властивості, що й степені з раціональними показниками.

Властивості степенів із дійсним показником

Якщо $a > 0$, $b > 0$ і α і β — дійсні числа, то:

- 1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$; 3) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.
 2) $a^\alpha : a^\beta = a^{\alpha-\beta}$; 4) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Обчисліть:

а) $5^{1-\sqrt{3}} \cdot 5^{1+\sqrt{3}}$; б) $16^{0,25+\sqrt{2}} : 16^{\sqrt{2}}$; в) $(6^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$.

2. Спростіть вираз:

а) $(x^{\sqrt{3}})^3 : x^{3\sqrt{3}+1}$; б) $(2+b^{\sqrt{3}})^2 - 4b^{\sqrt{3}}$; в) $\frac{b^{2\sqrt{5}} - x^{2\sqrt{5}}}{x^{\sqrt{5}} + b^{\sqrt{5}}}$; г) $\frac{y^{3\sqrt{7}} + y^{\sqrt{7}}}{y^{2\sqrt{7}} + 1}$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- З якими поняттями ви ознайомилися на уроці?
- При якому значенні a має зміст вираз $a^{-\sqrt{7}}$?
- Чому дорівнює значення виразу $1^{\sqrt{5}} + 0^{\sqrt{2}}$?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 2	[3]: § 1, п. 1
С	№ 48, 52	№ 1
Д	№ 69	№ 2 (5, 6)
В		№ 2 (9)

Індивідуально

Спростити вираз: $\frac{x^{\sqrt{3}} - 1}{x^{3\sqrt{3}} - x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}}} \cdot (x^{4\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}}) - x^{2\sqrt{3}}$.

Додатковий матеріал

Поняття степеня виникло за стародавніх часів через необхідність обчислювати об'єми і площі. Ще в 1700 р. до н. е. у Стародавньому Вавилоні склалися таблиці квадратів і кубів чисел. Рівність $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) застосовував у своїх працях самаркандський учений аль-Каші (початок XV ст.). Тоді ж, незалежно від аль-Каші, нульовий показник був запроваджений французьким математиком Н. Шюке (він же ввів і від'ємні показники степеня). Ідею дробових показників можна знайти в працях французького математика Н. Орема (XIV ст.). Дробові та від'ємні показники зустрічаються в працях німецького математика М. Штіфеля. Систематично дробові показники став використовувати І. Ньютон, після чого вони ввійшли в ужиток.

ТЕМА. ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ ПОКАЗНИКОВОЇ ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: сформувати в учнів поняття показникової функції, ознайомити з властивостями цієї функції; формувати вміння розпізнавати та будувати графіки показникової функції; формувати початкові вміння моделювати реальні процеси за допомогою показникових функцій; розвивати логічне мислення, вміння лаконічно й грамотно висловлювати свою думку; виховувати наполегливість, працьовитість, активність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати й будувати графіки показникових функцій та ілюструвати на них властивості функцій; застосовувати показникові функції до опису найпростіших реальних процесів.

Основні поняття: показникова функція.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

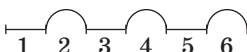
II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Графічний диктант

Відповідаючи на запитання, учні пишуть у зошитах «так» або «ні», використовуючи відповідні символи: так \cap , ні — , а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, наданим учителем.

Чи є правильним твердження, що:

- 1) областю допустимих значень виразу $(x+5)^{\sqrt{5}}$ є всі значення x , крім $x = -5$;
- 2) значення виразу $(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}$ дорівнює 27;
- 3) $0^\alpha = 0$ для всіх $\alpha \geq 0$;
- 4) областю допустимих значень виразів $(x-3)^{-\sqrt{2}}$ є $x > 3$;
- 5) $\left(\left(\left(\frac{3}{5} \right)^{-\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = \frac{25}{9}$;
- 6) $a^{-\sqrt{2}} \cdot a^{\sqrt{2}+1} = a$?

Ключ-відповідь: 

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Чому дорівнює значення виразів 2^3 ; 2^5 ?
2. Обчисліть: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; 2^{-1} .
3. Порівняйте значення виразів: а) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ і $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$; б) 3^2 і 3^{-2} .
4. Чому дорівнює значення виразів 2^0 ; 3^0 ; $\left(\frac{1}{3}\right)^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Серед вас напевно є любителі природи, які розуміють зв'язок екології та математики. Математика дозволяє обчислити, наприклад, приріст деревини для будь-якого дерева. Для цього потрібно знати, що кількість деревини збільшується за законом $M = M_0 a^{kt}$, де M — кількість деревини в даний момент (у м^3), M_0 — початкова кількість деревини (у м^3), t — час (у роках) з того моменту, коли об'єм деревини дорівнював M_0 , k — стала величина. Функція, яка в цьому випадку описує приріст деревини, називається показниковою, й сьогодні ми беремося до її вивчення.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

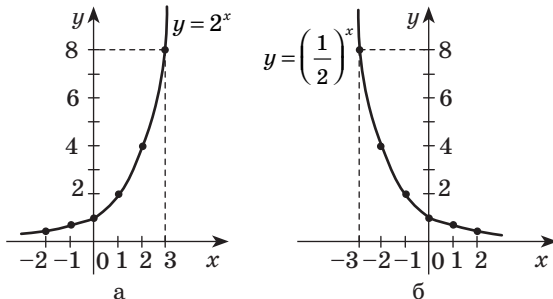
1. Показникова функція.

Функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається показниковою.

Число a називається основою показникової функції.

2. Графік показникової функції.

Побудуємо графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (див. рисунок).




Тепер заповнимо таблицю (у ній від початку заповнений перший стовпчик) на дошці й у зошитах.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 2^x$							
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$							

3. Властивості показникової функції.

Користуючись побудованими графіками (див. рисунок), опишемо властивості функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ та заповнимо таблицю (у ній від початку заповнено другий стовпчик) на дошці й у зошитах.

№ з/п	Властивість функції	Функція	
		$y = 2^x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
1	Область визначення	\mathbf{R}	\mathbf{R}
2	Область значень	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
3	Нулі функції	—	—
4	Перетин з Oy	$(0; 1)$	$(0; 1)$
5	Парність (непарність)	<i>Ані парна, ані непарна</i>	<i>Ані парна, ані непарна</i>
6	Зростання (спадання)	<i>Зростає на \mathbf{R}</i>	<i>Спадає на \mathbf{R}</i>
7	Найбільше (найменше) значення	—	—

 Пам'ятайте, що $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$. Тоді графік функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ можна отримати із графіка функції $y = 2^x$ за допомогою геометричних перетворень — симетрії відносно осі Oy .

При $a > 1$ властивості функції $y = a^x$ аналогічні властивостям функції $y = 2^x$ та її графіку, а при $0 < a < 1$ властивості функції $y = a^x$ аналогічні властивостям функції $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ та її графіку.

Графік показникової функції називається **експонентою**.

Узагальнимо властивості показникової функції $y = a^x$ при $a > 1$ і $0 < a < 1$ та заповнимо таблицю в зошитах (таблицю отримує кожен учень).

№ з/п	Функція $y = a^x$	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(y) = \dots$	$D(y) = \dots$
2	$E(y) = \dots$	$E(y) = \dots$
3	Нулі функції: ...	Нулі функції: ...
4	При $x = 0$ $y = \dots$	При $x = 0$ $y = \dots$
5	Монотонність: ...	Монотонність: ...
6	При $x < 0$ $y \dots$	При $x < 0$ $y \dots$
7	При $x > 0$ $y \dots$	При $x > 0$ $y \dots$
8	Графік:	Графік:

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Виконання усних вправ

1. Які з наведених функцій є показниковими?

а) $y = (-5)^x$; б) $y = x^4$; в) $y = (\sqrt{7})^x$; г) $y = (0,1)^x$.

2. Порівняйте значення виразів:

а) $2^{\sqrt{3}}$ і $2^{\sqrt{7}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

3. Які з наведених функцій є зростаючими; спадними?

а) $y = \pi^{-x}$; б) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; в) $y = 3^x$.

4. Порівняйте з одиницею основу $a > 0$, якщо:

а) $a^{13} > a^{15}$; б) $a^7 < a^9$.

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 3^x$; $y = 3^x - 2$; $y = 3^{x-2}$; $y = -3^x$.

2. Користуючись побудованими графіками, укажіть область значень кожної функції.

3. Порівняйте з одиницею значення виразу:

а) $(0,23)^{20}$; б) $\left(\frac{15}{11}\right)^{\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. З яким поняттям ви ознайомилися на уроці?
2. Через яку точку проходять графіки всіх показникових функцій?
3. Як називають графік показникової функції?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 2	[3]: § 1, пп. 1, 2
С	№ 70 (а, г)	с. 17, № 4, с. 25, № 5
Д	№ 73 (а, в)	с. 26, № 6 (1, 3)
В	№ 72	с. 26, № 6 (5, 6), 7

Індивідуально

Побудувати графік функції $y = 2^{-|x|}$.

УРОК № 4

ТЕМА. ЛОГАРИФМИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ.

Мета уроку: сформувати поняття логарифма числа; вивчити основну логарифмічну тотожність, основні властивості логарифмів; розвивати культуру математичного запису, пам'ять; виховувати працьовитість, наполегливість, інтерес до нових знань.

Очікувані результати: учні повинні засвоїти поняття логарифма; знати формулу основної логарифмічної тотожності й основні властивості логарифмів; уміти застосовувати поняття логарифма, знаходити логарифми чисел за визначенням, спрощувати нескладні вирази, що містять логарифми.

Основні поняття: логарифм числа.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

На цьому етапі уроку можна провести математичний диктант, текст якого наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 1.

☑ Математичний диктант

Варіант 1

Варіант 2

1. Знайдіть значення функції:

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^x, \text{ якщо } x = -2$$

$$y = 4^x, \text{ якщо } x = -3$$

2. Порівняйте значення виразів:

$$4^{-11} \text{ і } 4^{-22}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-11} \text{ і } \left(\frac{1}{4}\right)^{-22}$$

3. Знайдіть область визначення функції:

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+6} - 1$$

$$y = 4^{x+3} + 2$$

4. Порівняйте значення x і y , якщо:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} < \left(\frac{3}{2}\right)^y$$

$$\left(\frac{7}{8}\right)^x < \left(\frac{8}{7}\right)^{-y}$$

5. Порівняйте з одиницею основу $a > 0$, якщо:

$$a^{\sqrt{3}+1} > a^{\sqrt{3}-1}$$

$$a^2 > a^\pi$$

6. Знайдіть область значень функції:

$$y = \left(\frac{1}{7}\right)^x + 2$$

$$y = 3^x - 2$$

Учні виконують взаємоперевірку в парах за відповідями, підготовленими заздалегідь на відкидній дошці.

Відповіді до математичного диктанту

Варіант 1. 1. 16. 2. $4^{-11} > 4^{-22}$. 3. **Р.** 4. $x < y$. 5. $a > 1$.
6. $(2; +\infty)$.

Варіант 2. 1. $\frac{1}{64}$. 2. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-11} < \left(\frac{1}{4}\right)^{-22}$. 3. **Р.** 4. $x > y$.
5. $0 < a < 1$. 6. $(-2; +\infty)$.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

☑ Фронтальне опитування

1. При якому значенні x :

а) $2^x = 64$; б) $3^{-x} = 81$; в) $2^x = \frac{1}{2}$?

2. Яке число при піднесенні до третього степеня дорівнює:

а) 125; б) 0,001?

3. Порівняйте з нулем значення виразу 5^{-x} .

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Відповідь на запитання, чому дорівнює показник степеня, до якого треба піднести число 5, щоб отримати число 25, зави-грашки дасть і шестикласник. А чи під силу вам знайти показник степеня, до якого треба піднести число 5, щоб отримати число 7?

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Розглянемо рівняння $3^x = 9$. Для його розв'язання знаходимо показник степеня, до якого слід піднести число 3, щоб одержати число 9. Показник степеня x називають логарифмом числа 9 за основою 3.

Якщо виконується рівність $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, то показник степеня x називають логарифмом числа b за основою a .

Логарифмом числа b ($b > 0$) за основою a , де $a > 0$, $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого треба піднести число a , щоб отримати число b .

Логарифм числа b за основою a позначають $\log_a b$ і читають як логарифм b за основою a .

Наприклад, $\log_5 125 = 3$, оскільки $5^3 = 125$; $\log_3 \frac{1}{3} = -1$, оскільки $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\log_{\frac{1}{5}} 25 = -2$, оскільки $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25$; $\log_6 1 = 0$, оскільки $6^0 = 1$; $\log_6 6 = 1$, оскільки $6^1 = 6$.

Зазначимо, що для $a > 0$, $a \neq 1$, $\boxed{\log_a a = 1}$ і $\boxed{\log_a 1 = 0}$, оскільки $a^1 = a$, $a^0 = 1$.

Десятковим логарифмом називають логарифм за основою 10.

Для запису десяткових логарифмів користуються символом \lg .
Наприклад, $\lg 0,01 = -2$; $\lg 0,1 = -1$; $\lg 100 = 2$.

У науці й техніці широко використовують логарифми, основою яких є ірраціональне число, наближене значення якого дорівнює 2,71828182845..., або $\approx 2,7$.




Л. Ейлер запропонував позначити це число символом e . Його також називають неперовим числом на ім'я шотландського математика Дж. Непера.

Логарифм за основою e називають натуральним логарифмом.

Для запису натуральних логарифмів користуються символом \ln .
Наприклад, $\ln 3$; $\ln 10$.

Із визначення $\log_a b$ випливає, що $\boxed{a^{\log_a b} = b}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

 Цю рівність називають **основною логарифмічною тотожністю**. Наприклад, $3^{\log_3 7} = 7$; $0,3^{\log_{0,3} 2} = 2$, $10^{\lg 3} = 3$.

Із визначення логарифма легко отримати ще одну тотожність, яку в подальшому застосовуватимемо для запису чисел у вигляді логарифма за деякою основою:

$$\boxed{\log_a a^x = x}.$$

Наприклад, запишемо числа 5 і 3 у вигляді логарифмів за основою 2. Одержимо: $5 = \log_2 2^5$; $3 = \log_2 2^3$, тобто $5 = \log_2 32$; $3 = \log_2 8$.

Основні властивості логарифмів випливають із властивостей показникової функції.

Основні властивості логарифмів

При $a > 0$, $a \neq 1$ для будь-яких додатних x і y справджуються рівності:

- | | |
|---|---|
| 1) $\log_a 1 = 0$; | 6) $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$ ($k \neq 0$); |
| 2) $\log_a a = 1$; | 7) $\log_{a^k} x^p = \frac{p}{k} \log_a x$; |
| 3) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; | 8) $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ ($x \neq 1$); |
| 4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; | 9) $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ ($b > 0$, $b \neq 1$). |
| 5) $\log_a x^p = p \log_a x$; | |

Рівність 9 називається **формулою переходу до нової основи** (основи b).

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Виконання усних вправ

- Знайдіть значення виразів $\log_2 32$; $\log_3 \frac{1}{9}$; $\log_{0,2} 0,04$; $\log_{\sqrt{5}} 1$;
 $\log_{\pi} \pi$; $\lg \frac{1}{10\,000}$.
- При яких значеннях x має зміст вираз:
а) $\log_5 x$; б) $\log_x 3$; в) $\log_{2x} 2x$; г) $\lg(x+5)$?

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть значення виразу:

а) $\log_3 27 + 3$; е) $10^{\lg 2 + \lg 3}$;

б) $25^{\log_5 3}$; ж) $\log_{81} 3$;

в) $10^{\lg 0.5}$; з) $\log_5 \sqrt{5}$;

г) $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5}$; і) $7^{2 \log_{49} 2}$;

д) $\log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$; к) $\frac{\log_7 16}{\log_7 2}$.

2. Знайдіть x , якщо:

а) $\log_x 9 = 2$; б) $\log_x 5 = 1$; в) $\log_x \frac{1}{125} = 3$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

- 3 Яким математичним поняттям ви ознайомилися на уроці?
- 2 Чи має розв'язок рівняння $3^x = 8$? Якщо так, то що є його коренем?
3. Який логарифм називають десятковим; натуральним?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 4	[3]: § 2
С	№ 136	№ 20, 22 (1, 3, 5)
Д	№ 144	№ 24, 28
В	№ 156 (в, д)	№ 25, 40

Індивідуально

1. Обчислити: $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.

2. Підготувати коротке повідомлення про історію виникнення й розвитку логарифмів.

ТЕМА. **ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ.**

Мета уроку: сформувати вміння й навички застосування властивостей логарифмів до розв'язування задач; розвивати пам'ять, виховувати самостійність, впевненість при прийнятті рішень.

Очікувані результати: учні повинні знати властивості логарифмів, основні формули, уміти свідомо застосовувати їх до розв'язування задач.

Основні поняття: логарифмування, потенціювання.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Робота в парах

Учні, працюючи в парах, перевіряють одне в одного знання основних властивостей логарифмів, основної логарифмічної тотожності. Потім за зразком, виданим учителем на кожному парту, самостійно визначають правильність виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Самостійна робота

Варіант 1

Варіант 2

Позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть значення виразу:

$$2,5^{\log_{2,5} 8} - 3$$

$$7,2^{\log_{7,2} 6} + 4$$

A -0,5 B 5 B -2 Г 11

A 6 B 2 B 10 Г 11,2

2. Спростіть вираз:

$$\log_3 13,5 + \log_3 2$$

$$\log_2 48 - \log_2 3$$

A 3 B $\log_3 15,5$

A 45 B 3

B 15,5 Г 11,5

B $\log_2 45$ Г 4

3. Обчисліть значення виразу:

$$\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}$$

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$$

A -2 B 2 B 0,5 Г -0,5

A 2 B -2 B 0,5 Г -0,5

Варіант 1

Варіант 2

4. Обчисліть значення виразу:

$$\frac{\log_6 125}{\log_6 25}$$

$$\frac{\log_5 216}{\log_5 36}$$

А $\frac{2}{3}$

Б $\frac{3}{2}$

В 3

Г 2

А 1,5

Б 3

В 2

Г $\frac{2}{3}$

Учні здійснюють самооцінку за записами, підготовленими на відкидній дошці, обговорюють відповіді з посиланнями на відповідні властивості логарифмів. Кожне правильно виконане завдання оцінюється в 3 бали.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. Б.

Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. А.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Ці імена записані в книгу рекордів Гіннеса: німецький тенісист Хорст Генпер (його удар був такий, що м'ячик летів зі швидкістю 320 км/год), китаець Ян Генхуа (у першому забігу навколо Китайської стіни, який тривав 80 днів, подолав 2400 км, щодня пробігаючи 30 км). Є спортсмени, які не знали поразок. Так, американський боксер Роккі Марчіано не програв жодного бою, причому 43 із 49 боїв переміг нокаутом. Прагнете досягти успіху? Тренуйтеся невпинно! Сьогодні вам будуть потрібними терпіння й наполегливість, щоб «бути на ти» з логарифмами.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Дія знаходження логарифма числа (виразу) називається логарифмуванням.

Приклад 1. Прологарифмувати за основою 3 ($a > 0$; $b > 0$) вираз $27a^4 \sqrt[7]{b}$.

Потенціювання — знаходження числа (виразу) за його логарифмом.

Приклад 2. Знайти x , якщо $\lg x = 5 \lg m + \frac{2}{3} \lg n - \frac{1}{4} \lg p$.

VI. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть значення виразу:

а) $2\log_7 32 - \log_7 256 - 2\log_7 14$; г) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;

б) $\log_4 \frac{1}{4} - 2\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 \frac{4}{9}$; д) $\log_3^2 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$;

в) $\log_2 12 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{4}{5}$; е) $\frac{\log_2^2 14 + \log_2 14 \cdot \log_2 7 - 2\log_2^2 7}{\log_2 14 + 2\log_2 7}$.

2. Обчисліть $3\log_{\frac{a^3}{b}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{b}} + \log_{\frac{a^3}{b}} b$, якщо $\log_a b = 2$.

VII. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ І ВМІНЬ

На цьому етапі уроку можна провести самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 2.

Самостійна робота

Варіант 1

Варіант 2

Знайдіть значення виразу:

а) $8^{1-\log_2 3}$;

а) $25^{1-\log_5 3}$;

б) $3^{\frac{2}{\log_5 3}}$;

б) $2^{\frac{3}{\log_3 2}}$;

в) $\log_{12} 18 + \log_{12} 8$;

в) $\log_{15} 45 + \log_{15} 5$;

г) $\log_{\frac{1}{5}} \log_3 243$;

г) $\log_{49} \log_2 128$;

д) $\log_2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$;

д) $\log_3 \sqrt[4]{3^2 \sqrt[3]{3}}$;

е) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16$.

е) $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 27$.

Самостійна робота має контрольний характер і перевіряється вчителем.

Відповіді та розв'язання до самостійної роботи

Варіант 1. а) $\frac{8}{27}$; б) 25; в) 2; г) -1;

д) $\log_2 \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \log_2 \left(2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \right) = \log_2 2^{\frac{1}{3}} + \log_2 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$;

е) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 16 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 16}{\log_2 5} = \log_2 16 = 4$.

Варіант 2. а) $2\frac{7}{9}$; б) 27; в) 2; г) $\frac{1}{2}$;

$$д) \log_3 \sqrt[4]{3^2 \sqrt[3]{3}} = \log_3 \left(3^{\frac{2}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} \right) = \log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_3 3^{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12};$$

$$е) \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 27 = \log_3 4 \cdot \frac{\log_3 5}{\log_3 4} \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 5} = \log_3 27 = 3.$$

VIII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

1. Які завдання самостійної роботи були найскладнішими?
2. Які властивості логарифмів і формули були використані при виконанні завдань самостійної роботи?

IX. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 4	[3]: § 2
С	№ 141	№ 27 (1, 3, 6)
Д	№ 147	№ 27 (4, 5), 28
В	№ 151	№ 42

Індивідуально

Знайти значення виразу

$$(\log_3 2 + \log_2 81 + 4)(\log_3 2 - 2\log_{18} 2)\log_2 3 - \log_3 2. \text{ (Відповідь: 2.)}$$

Додатковий матеріал

Логарифми відкрили в першій половині XVII ст. (майже одночасно) шотландський учений Дж. Непер і швейцарський майстер-годинник І. Бюргі. Саме завдяки їхнім роботам логарифми ввійшли в обчислювальну практику, а таблиці логарифмів стали серйозним допоміжним інструментом для обчислень.

Цінність ідеї впровадження логарифмів полягала у зведенні складних дій (піднесення до степеня і добування кореня) до простіших дій (множення, ділення), а останніх — до найпростіших (додавання, віднімання). При цьому використовувалися таблиці логарифмів.

ТЕМА. ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЯ. ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ.

Мета уроку: ввести поняття логарифмічної функції; формувати вміння будувати графік логарифмічної функції й ілюструвати на ньому властивості логарифмічної функції; розвивати увагу, пам'ять, спостережливості, уміння робити висновки, спираючись на відомі факти; виховувати наполегливість у досягненні мети, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати визначення логарифмічної функції, її властивості; розпізнавати й будувати графіки логарифмічних функцій; застосовувати логарифмічні функції до опису найпростіших реальних процесів.

Основні поняття: логарифмічна функція.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Розв'язання завдання середнього рівня складності учні перевіряють шляхом коментування з місця. Розв'язання завдання високого рівня, заздалегідь підготовлене на дошці, учитель просить прокоментувати учня з високим рівнем підготовки.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бесіда за технологією «Мікрофон»

1. При яких значеннях x має зміст вираз $\log_3(x-1)$? Відповідь обґрунтуйте.
2. Яких значень може набувати вираз $\log_2 x$?
3. Обчисліть значення виразів $\log_2 1$; $\log_2 2$; $\log_2 4$; $\log_2 \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{2}} 1$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{2}} 2$; $\log_{\frac{1}{2}} 4$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Вам уже знайоме ім'я математика Ейлера. Виклавши деякі властивості показникової функції, він помітив, що, маючи залежність $y = a^z$, можна розглянути показник z як функцію y , яку й називають логарифмічною функцією з основою a . Сьогодні ми приступимо до вивчення саме цієї функції.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

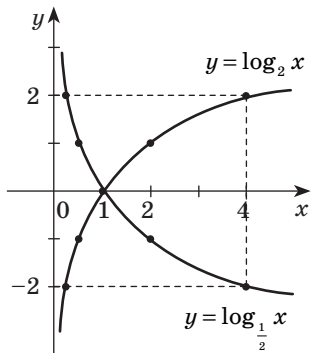
Шкільна лекція

1. Логарифмічна функція.

Функція виду $y = \log_a x$, де a — задане число, $a > 0$, $a \neq 1$, називається логарифмічною функцією.

2. Графік логарифмічної функції.

Заповнимо другий і третій рядки таблиці та побудуємо графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ (див. рисунок).



x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \log_2 x$	-2	-1	0	1	2
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-1	-2

3. Властивості логарифмічної функції.

Користуючись побудованими графіками, опишемо властивості функцій $y = \log_2 x$ і $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ та заповнимо таблицю (у ній від початку заповнений перший стовпець) на дошці й у зошитах.

№ з/п	Властивість функції	Функція $y = \log_2 x$	Функція $y = \log_{\frac{1}{2}} x$	
1	Область визначення	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	
2	Область значень	\mathbf{R}	\mathbf{R}	
3	Нулі функції	$x = 1$	$x = 1$	
4	Перетин з осями координат:			
		Ox	$(1; 0)$	$(1; 0)$
		Oy	—	—
5	Парність (непарність)	Ані парна, ані непарна	Ані парна, ані непарна	
6	Зростання (спадання)	Зростає на $x \in (0; +\infty)$	Спадає на $x \in (0; +\infty)$	
7	Проміжки знакосталості	$x > 1, y > 0$	$x > 1, y < 0$	
		$0 < x < 1, y < 0$	$0 < x < 1, y > 0$	

Отже, при $a > 1$ властивості і графік функції $y = \log_a x$ аналогічні властивостям і графіку функції $y = \log_2 x$. При $0 < a < 1$ властивості й графік функції $y = \log_a x$ аналогічні властивостям і графіку функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Виконання усних вправ

Яка з наведених функцій є зростаючою; спадною?

- а) $y = \log_{1,2} x$; б) $y = \log_{\frac{1}{7}} x$; в) $y = \ln x$.

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть область визначення функції:

- а) $y = \log_5 (5x - 20)$; б) $y = \lg(x^2 - 2x)$.

2. Порівняйте з одиницею додатне число a , якщо:

- а) $\log_a 6 > \log_a 5$; б) $\log_a 6 > \log_a 8$.

3. Порівняйте з нулем значення виразу:

- а) $\log_{0,6} 3$; б) $\log_3 0,6$; в) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{3}$; г) $\log_5 35$.

4. Визначте знак добутку $\log_{0,2} 10 \cdot \log_{0,3} \frac{1}{3}$.

5. Порівняйте значення виразів:

- а) $\log_7 5$ і 1; б) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ і $\log_6 5$; в) $\log_{0,3} 2,3$ і $\log_3 1$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- Опишіть властивості функції: а) $y = \lg x$; б) $y = \log_{0,1} x$.
- Які спільні властивості мають розглянуті функції? Укажіть відмінність у їхніх властивостях.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 4	[3]: § 2
<input type="checkbox"/> С	№ 139	№ 44 (1–3), 45 (1–4)
<input type="checkbox"/> Д	№ 154	№ 44 (4, 5)
<input type="checkbox"/> В	№ 157 (г, д)	№ 43

Індивідуально

Побудувати графік функції $y = \left| \left(\frac{1}{3} \right)^{x-3} - 1 \right|$.

ТЕМА. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ.

Мета уроку: дати визначення показникового рівняння й нерівності; сформувати вміння розв'язувати найпростіші показникові рівняння й нерівності; розвивати увагу, пам'ять, логічне мислення, спостережливість, уміння порівнювати й робити висновки; виховувати працьовитість, наполегливість, активність.

Очікувані результати: учні повинні вміти розв'язувати найпростіші показникові рівняння й нерівності.

Основні поняття: показникове рівняння, показникова нерівність.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

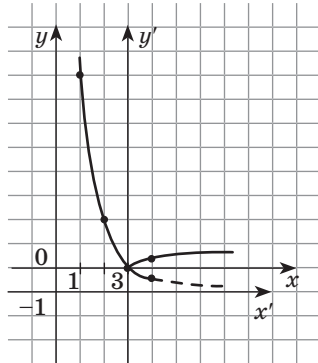
I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

На цьому етапі уроку можна перевірити правильність виконання домашнього завдання або скористатися посібником [4], СР 3 або СР 5.

Виконання завдань середнього рівня складності можна перевірити шляхом коментування з місця. Розв'язання завдання високого рівня пише на відкидній дошці один з учнів з високим рівнем підготовки.

Побудова до індивідуального завдання: див. рисунок.



III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальна бесіда

1. Дайте визначення показникової функції.
2. Якою є область визначення показникової функції?
3. Якою є область значень показникової функції?
4. При якій основі показникова функція $y = a^x$ є зростаючою; спадною?
5. При якому значенні x значення показникової функції дорівнює одиниці?
6. Подайте у вигляді степеня з основою 2 числа 4; 32.

7. Подайте у вигляді степеня з основою 5 числа $\frac{1}{125}$; 625.
8. Подайте число 1 у вигляді степеня з основою 2; $\frac{3}{5}$; 10.
9. Замініть корені $\sqrt[5]{b^{x-1}}$; $\sqrt[6]{b^{x+2}}$ на дробові показники.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Рівняння $m = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}}$, записане на дошці, показує, що внаслідок розпаду радіоактивної речовини її маса зменшується за однакові проміжки часу в однакове число разів. Через t_0 позначено проміжок часу, необхідний для того, щоб від первісної маси m_0 залишилася половина. Якщо взяти Уран-238, то для нього $t_0 = 4,5$ млрд років. Враховуючи вік Землі (5–7 млрд років), можна стверджувати, що в наші дні не розпалася й половина всіх запасів цієї речовини. Сьогодні ви ознайомитеся з такого виду рівняннями, дізнаєтеся про методи їх розв'язування.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

1. Показникові рівняння та нерівності.

Рівняння, у яких змінна міститься в показниках степенів при постійній основі, називають показниковими.

Наприклад, $3^x = 10$; $2^{x^2-7} = 8$; $\frac{3^x + 1}{3^x - 3} = 2$.

Рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають найпростішими.

Із властивостей показникової функції впливає, що:

- 1) при $b > 0$ рівняння $a^x = b$ має один корінь;
- 2) при $b \leq 0$ рівняння $a^x = b$ не має коренів.

Найпростішими показниковими нерівностями є нерівності виду $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$. Під час їх розв'язування використовують властивість монотонності показникової функції: функція $y = a^x$ зростає при $a > 1$ і спадає при $0 < a < 1$. Таким чином, для $a > 1$ розв'язання нерівності $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ зводиться до розв'язання нерівності $f(x) > \varphi(x)$, якщо ж $0 < a < 1$, то до розв'язання нерівності $f(x) < \varphi(x)$.

2. Способи розв'язування показникових рівнянь і нерівностей.

1) *Розв'язування показникових рівнянь шляхом зведення до однієї основи.*

Приклади. а) $0,2^{x-2} = 0,2^3$; $x-2=3$; $x=5$; б) $4^x = 16$; $2^{2x} = 2^4$; $2x=4$; $x=2$; в) $2,5^{8x-24} = 1$; $2,5^{-8x-24} = 2,5^0$; $8x-24=0$; $8x=24$; $x=3$.

2) *Розв'язування показникових рівнянь методом заміни змінних.*

Приклад 1. Розв'язати рівняння $9^x + 2 \cdot 3^x - 15 = 0$. (Відповідь: 1.)



У кожному з розглянутих рівнянь ОДЗ: R .

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3^x + 3^{3-x} = 12$. (Відповідь: 2; 1.)

Приклад 3. Розв'язати нерівність $0,5^{9-4x} < 4$. (Відповідь: $(-\infty; 2,75)$.)

3) *Розв'язування показникових нерівностей методом заміни змінних.*

Приклад. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{36}\right)^x - 5 \cdot 6^{-x} - 6 \leq 0$.

Розв'язання. Запишемо цю нерівність у вигляді

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x - 6 \leq 0. \quad \text{ОДЗ: } R.$$

Нехай $\left(\frac{1}{6}\right)^x = t$, $t > 0$. Одержуємо нерівність $t^2 - 5t - 6 \leq 0$.

Оскільки коренями рівняння $t^2 - 5t - 6 = 0$ є $t_1 = 6$ і $t_2 = -1$, то розв'язком нерівності є $-1 \leq t \leq 6$. Враховуючи умову $t > 0$,

одержимо: $0 < t \leq 6$. Повертаючись до заміни, маємо: $\left(\frac{1}{6}\right)^x \leq 6$.

$\left(\frac{1}{6}\right)^x \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$. Оскільки $0 < \frac{1}{6} < 1$, то функція $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ спадає

і нерівність $\left(\frac{1}{6}\right)^x \leq \left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ є рівносильною нерівності $x \geq -1$.

Відповідь: $[-1; +\infty)$.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; в) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 = 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{81}\right)$; в) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} \leq 9$;

б) $(0,6)^{\frac{x^2-7x+12}{x}} \leq 1$; г) $4x - 12 \cdot 2^x + 32 \geq 0$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Що нового ви дізналися на уроці?
2. Із якими методами розв'язування показникових рівнянь і нерівностей ви ознайомилися?
3. Які властивості показникової функції необхідно знати, щоб розв'язувати показникові рівняння; показникові нерівності?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 3	[3]: § 3
С	№ 91	№ 49 (1–3), 56 (2, 5)
Д	№ 108 (а), 111 (а), 115 (а)	№ 49 (5), 57 (1, 3)
В	№ 117	№ 49 (6), 57 (2, 4)

Індивідуально

Розв'язати нерівність $3(\sqrt{2})^x - 7 \cdot 2^{\frac{x}{4}} - 20 \geq 0$.

УРОК № 8

ТЕМА. ПОКАЗНИКОВІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ.

Мета уроку: формувати вміння учнів розв'язувати показникові рівняння й нерівності; розвивати вміння логічно мислити, грамотно робити математичний запис; виховувати наполегливість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти розв'язувати найпростіші показникові рівняння й нерівності відомими їм способами.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань і вмінь.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здійснюють самоперевірку домашнього завдання за записами, заздалегідь підготовленими вчителем.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Чи має розв'язок показникове рівняння $2^x = -2$?
2. У чому полягає спосіб зведення до спільної основи під час розв'язування показникових рівнянь?
3. У який спосіб розв'язують показникові рівняння виду $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$?
4. Розв'яжіть показникову нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \frac{1}{243}$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

«Швидше, вище, сильніше» — це девіз Олімпійських ігор. Сьогодні ми, дотримуючись цього девізу, розв'язуватимемо найпростіші завдання — швидше, брати рівень завдань — вище і почувати мемо себе сильніше інтелектуально.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в парах

Учні працюють із подальшою перевіркою правильності розв'язань біля дошки.

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 125$;

в) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$;

б) $(3^{x-2})^{x-4} = \frac{1}{3}$;

г) $2 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 2 = 0$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$;

б) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$.

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ І ВМІНЬ

На цьому етапі уроку можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 4 і СР 5.

Самостійна робота

Варіант 1

Варіант 2

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{7^x} = 49$$

А 0 Б 1 В 2 Г 4

$$\sqrt{10^x} = 100$$

А 0 Б 1 В 4 Г 2

2. Розв'яжіть нерівність:

$$7^{\frac{x^2}{2}} \leq 49$$

А (-2; 2)
Б $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$
В [-2; 2]
Г $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

$$5^{\frac{x^2}{2}} \geq 25$$

А (-2; 2)
Б [-2; 2]
В $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$
Г $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

3. Розв'яжіть рівняння:

$$7^{x+1} - 3 \cdot 7^x = 28$$

А 1 Б 2 В 3 Г 4

$$4^x + 4^{x-1} = 5$$

А 1 Б -1 В 0 Г 5

4. Розв'яжіть нерівність:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+4x} \geq \left(\frac{8}{27}\right)^{x+2}$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{-x^2+8x}$$

5. Розв'яжіть рівняння:

$$4^x - 0,25^{x-2} = 15$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{1-x} - \left(\frac{1}{5}\right)^x = 4,96$$

Самостійна робота має контрольний характер і перевіряється вчителем.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Г. 2. В. 3. А. 4. [-3; 2]. 5. 2.

Варіант 2. 1. В. 2. В. 3. А. 4. $\left(\frac{1}{5}; 3\right)$. 5. 2.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Зібравши зошити, учитель пропонує учням перевірити правильність розв'язання завдань за відповідями, заздалегідь підготовленими на дошці.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 3	[3]: § 3
С	№ 88	№ 51 (1, 2), 52
Д	№ 108 (б), 115 (б)	№ 51 (3, 4), 56 (3)
В	№ 116 (а)	№ 53, 54 (2, 3)

Індивідуально

Розв'язати нерівність $4^x - 6 \cdot 2^{x-1} \geq 4$.

УРОК № 9

ТЕМА. ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ.

Мета уроку: ознайомити учнів зі способами розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь і нерівностей; сформувати вміння розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння й нерівності; розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення, уміння порівнювати, аналізувати й робити самостійні висновки; виховувати культуру математичного мовлення й запису, наполегливість, самостійність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати логарифмічні рівняння й нерівності, уміти розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння й нерівності.

Основні поняття: логарифмічне рівняння, логарифмічна нерівність.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Оскільки домашні завдання, найімовірніше, не становитимуть труднощів для учнів, можна обмежитися бесідою, яка охоплює всі моменти домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Інтерактивна гра «Закінчіть речення»

1. Областю визначення функції $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) є...
2. Областю значень логарифмічної функції $y = \log_a x$ ($a > 0$; $a \neq 1$) є...
3. Для функції $y = \log_a x$ при $a > 1$, якщо $x_1 < x_2$, то...
4. Для функції $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$, якщо $x_1 < x_2$, то...

5. Якщо $\log_a x = 0$ ($a \neq 1, a > 0$), то $x = \dots$
6. Якщо $\log_a x = 1$ ($a \neq 1, a > 0$), то $x = \dots$
7. Якщо $a > 1$ і $\log_a x > 0$, то $x \dots$
8. Якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x > 0$, то $x \dots$
9. Якщо $a > 1$ і $\log_a x < 0$, то $x \dots$
10. Якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x < 0$, то $x \dots$

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Від XVII ст. і до появи мікрокалькуляторів і комп'ютерів наприкінці XX ст. основними засобами приблизних обчислень були таблиці логарифмів і логарифмічна лінійка. Сьогодні ми з'ясуємо, як, знаючи значення логарифма, знайти число, від якого береться логарифм, тобто вчитимемося розв'язувати логарифмічні рівняння.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Логарифмічним називається рівняння, яке містить невідоме під знаком логарифма.

Наприклад, $\log_7(3-6x) = 2$; $\lg x - \lg 21 = \lg 20 + \lg(2-x)$.

У більшості випадків найпростіші логарифмічні рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, розв'язують на основі визначення логарифма.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\log_2(7-3x) = 2$. (Відповідь: 1.)

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{3}}(3x-6) = -2$. (Відповідь: 5.)

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log(2x-5)^2 = 0$. (Відповідь: 3; 2.)

Приклад 4. Розв'язати рівняння $0,2 \log_x \frac{1}{32} = -0,5$. (Відповідь: 4.)

Багато логарифмічних рівнянь розв'язують зведенням до алгебраїчного рівняння.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\log_{0,7}(5x-3) = \log_{0,7}(2x+6)$. (Відповідь: 3.)

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{1}{\lg x - 6} + \frac{5}{\lg x + 2} = 1$. (Відповідь: 100; 108.)

Нерівності виду $\log_a f(x) \geq b$ або $\log_a f(x) \leq \log_a \varphi(x)$ називають найпростішими логарифмічними нерівностями. Їх можна розв'язувати на основі властивостей логарифмічної функції.

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\log_{0,5} x > 2$. (Відповідь: $(0; 0,25)$.)

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\lg(x-1) + \lg(8-x) < 1$. (Відповідь: $(1; 3) \cup (6; 8)$.)

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\ln(x^2 - 6x + 9) = \ln 3 + \ln(x + 3)$;

б) $\log_5 x + \log_5(x + 7) = \log_5 2 + 2\log_5 3$.

(Відповідь: а) 0; 9; б) 2.)

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_{0,3}(6-x) > -1$;

б) $\log_3(2-x) + \log_{\frac{1}{3}}(x-1) > \log_{\sqrt{3}} 3$.

(Відповідь: а) $\left(2\frac{2}{3}; 6\right)$; б) $\left(1; 1\frac{1}{10}\right)$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда за технологією «Мікрофон»

1. Які рівняння називають логарифмічними?
2. Якими є особливості розв'язання логарифмічних рівнянь?
3. Які властивості логарифмічної функції використовують під час розв'язування логарифмічних нерівностей?
4. Про які способи розв'язування логарифмічних рівнянь ви дізналися на уроці?
5. Що є причиною появи стороннього кореня в ході розв'язування логарифмічних рівнянь?
6. Якій системі нерівностей рівносильна нерівність $\log_a f(x) \leq \log_a \varphi(x)$ при $0 < a < 1$?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 5	[3]: § 3
С	№ 169	№ 62 (1, 2); 68 (1, 2)
Д	№ 188 (а, б), 190 (а)	№ 62 (5, 6), 69 (1, 3)
В	№ 177	№ 65 (1), 69 (4)

Індивідуально

Розв'язати нерівність $\log_{\pi} \frac{x+27}{16-2x} < \log_{\pi} x$.

ТЕМА. **ЛОГАРИФМІЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ.**

Мета уроку: відпрацювати навички розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей; формувати вміння розв'язувати логарифмічні рівняння й нерівності; розвивати пам'ять, увагу, культуру математичного запису; виховувати наполегливість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти самостійно розв'язувати найпростіші логарифмічні рівняння й нерівності.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань і вмінь.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

☑ Фронтальна бесіда

1. Обґрунтуйте справедливості рівносильного переходу

$$\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c \quad (a > 0; a \neq 1).$$

2. У який спосіб можна розв'язати рівняння $\log_2(x-2) = \log_2(x^2-2)$?

3. У яких випадках під час розв'язування логарифмічних рівнянь доцільно застосовувати заміну змінних?

4. Як можна розв'язати найпростішу логарифмічну нерівність, використовуючи властивості логарифмічної функції?

5. Чи є правильним твердження, що при $a > 1$ нерівність

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \text{ рівносильна системі } \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0? \end{cases}$$

6. Чи є правильним твердження, що при $0 < a < 1$ нерівність

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \text{ рівносильна системі } \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0? \end{cases}$$

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

☑ Слово вчителя

Відомо, що, консервуючи овочі, важливо знати кислотність розчину, а знаючи кислотність, можна визначати концентрацію йонів водню. Це можна зробити за допомогою логарифмічних рівнянь, використовуючи логарифм з основою 10.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

☑ Робота в малих групах

Учні, об'єднавшись у малі групи, виконують завдання, розв'язання яких потім демонструють біля дошки.

1. Розв'яжіть рівняння $x^{1+\lg x} = 100$.



Таке рівняння іноді називають показниково-логарифмічним, і розв'язується воно, як правило, логарифмуванням обох частин.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння $x^{1+\lg x} = 100$ за основою 10 і отримаємо: $(1 + \lg x)\lg x = \lg 100$; $\lg^2 x + \lg x - 2 = 0$. Виконавши заміну $\lg x = t$, одержимо: $t^2 + t - 2 = 0$; $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Отже, $\lg x = -2$, і тоді $x = 0,01$ або $\lg x = 1$. Звідси $x = 10$. Перевіркою встановлюємо, що обидва корені задовольняють рівняння.

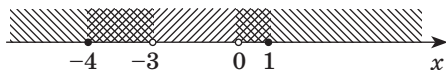
2. Розв'яжіть рівняння $\log_2 \log_3 \log_5 x = 0$. (Відповідь: 125.)

3. Розв'яжіть нерівність $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$.

Розв'язання. $\log_2(x^2 + 3x) \leq 2$; $\log_2(x^2 + 3x) \leq \log_2 2^2$;

$$\begin{cases} x^2 + 3x \leq 4 & (\text{оскільки } 2 > 1), \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 3x - 4 \leq 0, \\ x^2 + 3x > 0. \end{cases} \quad \text{Розв'язком першої}$$

нерівності є проміжок $[-4; 1]$, розв'язком другої — об'єднання проміжків $(-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. Знайдемо спільні розв'язки нерівностей системи (див. рисунок).



Відповідь: $x \in [-4; -3) \cup (0; 1]$.

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ І ВМІЬ

На цьому етапі уроку можна провести самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 6.

Самостійна робота

Варіант 1

Варіант 2

Позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_6(x-2)=0$$

$$\log_7(3+x)=0$$

А 3 Б 2 В 6 Г 8 А 4 Б -2 В -3 Г 7

2. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{6}}x < 0$$

$$\log_{\frac{1}{5}}x > 0$$

А $(1; +\infty)$ В $(0; \frac{1}{6})$ А $(1; +\infty)$ В $(0; 1)$
Б $(0; 1)$ Г $(\frac{1}{6}; +\infty)$ Б $(\frac{1}{5}; +\infty)$ Г $(0; \frac{1}{5})$

3. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_3(x-2) > 1$$

$$\log_6(3+x) < 1$$

А $[5; +\infty)$ В $(2; +\infty)$ А $(3; +\infty)$ В $[3; +\infty)$
Б $(5; +\infty)$ Г $(0; 5)$ Б $(-3; 3)$ Г $(4; +\infty)$

4. Розв'яжіть рівняння:

$$\log_2x = \log_2(3x-8)$$

$$\log_6(-2x-3) = \log_6x$$

А 4 В Коренів немає А Коренів немає В 1
Б -4 Г 3 Б -1 Г 3

5. Розв'яжіть нерівність:

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-5) < \log_{\frac{1}{3}}(x-6)$$

$$\log_{\frac{1}{7}}(3x-7) < \log_{\frac{1}{7}}(x+1)$$

А $(-1; +\infty)$ В $(2,5; +\infty)$ А $(-\infty; 4)$ В $(-1; 2\frac{1}{3})$
Б $(6; +\infty)$ Г $(-\infty; -1)$ Б $(2\frac{1}{3}; 4)$ Г $(-1; 4)$

Варіант 1

Варіант 2

6. Розв'яжіть рівняння:

$$\lg x^2 - \lg(x+2) = 0$$

А 2; -1

В -1

Б 2

Г -2; 1

$$\lg x^2 - \lg(x+6) = 0$$

А -3; 2

В -2

Б 3

Г 3; -2

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. А. 2. А. 3. Б. 4. А. 5. Б. 6. А.

Варіант 2. 1. Б. 2. В. 3. Б. 4. А. 5. Б. 6. Г.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель збирає зошити, пропонує учням ознайомитися із правильними відповідями та відповідає на їхні запитання.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 5	[3]: § 3
С	№ 171	№ 63, 64 (1, 2), 68 (1)
Д	№ 185 (в), 188 (в)	№ 64 (3), 69 (2), 70 (3)
В	№ 196 (а)	№ 64 (4), 65 (2), 70 (4)

Індивідуально

Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{9}}(6x+3) < -1$.

УРОК № 11

ТЕМА. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал з теми «Показникова й логарифмічна функції»; підготувати учнів до контрольної роботи; розвивати вміння узагальнювати, мислити логічно, робити висновки, чітко висловлювати свою думку; виховувати відповідальність, уміння працювати самостійно й у групі.

Очікувані результати: учні повинні розрізняти й будувати графіки показникових і логарифмічних функцій та ілюструвати на них властивості функцій; застосовувати показникові й логарифмічні функції для розв'язання показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за записами, заздалегідь підготовленими на дошці, під час перевірки коментують розв'язання, посилаючись на властивості логарифмічної функції, методи розв'язування логарифмічних і показникових рівнянь і нерівностей.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Ми наблизилися до завершення вивчення великої за обсягом і важливої для багатьох сфер життя теми «Показникова і логарифмічна функції». Постарайтеся усунути прогалини в знаннях, щоб до моменту написання контрольної роботи з теми почувати себе впевнено.

IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Робота в групах

Учні об'єднуються в гетерогенні групи для подальшої роботи на уроці. Кожна група готує коротке повідомлення (5 хв) за заданою темою, яке надалі презентує представник групи (або кілька представників). Одне питання може висвітлювати кілька груп.

Орієнтовні теми повідомлень

1. Показникова функція, її властивості та графік.
2. Логарифмічна функція, її властивості та графік.
3. Розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь.
4. Розв'язування показникових і логарифмічних нерівностей.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Усі групи отримують картки з однаковими завданнями й працюють над ними за інтерактивною технологією «Акваріум». Одна із груп розташовується в центрі класу — в «акваріумі», решта — по зовнішньому колу. Група в центрі читає вголос перше завдання, обговорює його протягом 3–5 хвилин і доходить спільної думки щодо розв'язання. Інші групи слухають хід обговорення й після дискусії приймають або відкидають запропоновану ідею. Далі

завдання розв'язується на дошці, і місце в «акваріумі» займає наступна група, яка розв'язує друге завдання, і т. д., поки всі завдання картки будуть виконані.

Картка для роботи групи

1. Знайдіть область визначення функції $y = \log_5 \frac{3-6x}{10+5x}$.
2. Розв'яжіть рівняння $2^x + 2^{x-3} = 72$.
3. Розв'яжіть нерівність $\log_{\frac{2}{3}}(6-x) \leq \log_{\frac{2}{3}}(x+1)$.
4. Розв'яжіть рівняння $9^x - 2 \cdot 3^x = 63$.
5. Розв'яжіть нерівність $0,2^{\frac{x^2-3x-24}{x}} \geq 0,04$.
6. Розв'яжіть рівняння $\log_4 \log_2 \log_3(2x-3) = 0,5$.

Розв'язання до картки

1. $y = \log_5 \frac{3-6x}{10+5x}$. $D(y): \frac{3-6x}{10+5x} > 0$; $\frac{6x-3}{5x+10} < 0$; $x \in (-2; 0,5)$. Відпо-

відь: $(-2; 0,5)$.

2. $2^x + 2^{x-3} = 72$.

ОДЗ: \mathbf{R} .

$2^x + 2^x \cdot \frac{1}{8} = 72$; $2^x \left(1 + \frac{1}{8}\right) = 72$; $2^x \cdot \frac{9}{8} = 72$; $2^x = 64$; $2^x = 2^6$; $x = 6$. Відповідь: 6.

3. $\log_{\frac{2}{3}}(6-x) \leq \log_{\frac{2}{3}}(x+1)$. $\begin{cases} 6-x > 0, \\ x+1 > 0, \\ 6-x \geq x+1, \text{ оскільки } 0 < \frac{2}{3} < 1. \end{cases} \begin{cases} x < 6, \\ x > -1, \\ 2x \leq 5; \end{cases}$

$\begin{cases} -1 < x < 6, \\ x \leq 2,5. \end{cases} x \in (-1; 2,5]$. Відповідь: $(-1; 2,5]$.

4. $9^x - 2 \cdot 3^x = 63$.

ОДЗ: \mathbf{R} .

$3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 63 = 0$. Нехай $3^x = t$, $t > 0$. $t^2 - 2t - 63 = 0$; $t_1 = 9$; $t_2 = -7$ (не задовольняє умову $t > 0$). $3^x = 9$; $3^x = 3^2$; $x = 2$. Відповідь: 2.

5. $(0,2)^{\frac{x^2-3x-24}{x}} \geq 0,04$.

ОДЗ: $x \neq 0$.

$(0,2)^{\frac{x^2-3x-24}{x}} \geq 0,2^2$. Оскільки $0 < 0,2 < 1$, то $\frac{x^2-3x-24}{x} \leq 2$;

$\frac{x^2-3x-24-2x}{x} \leq 0$; $\frac{x^2-5x-24}{x} \leq 0$. Розв'язком є об'єднання про-

міжків $(-\infty; -3]$ і $(0; 8]$ (див. рисунок).



Відповідь: $(-\infty; -3] \cup (0; 8]$.

6. $\log_4 \log_2 \log_3 (2x-3) = 0,5$. $\log_4 \log_2 \log_3 (2x-3) = \log_4 2$;
 $\log_2 \log_3 (2x-3) = 2$; $\log_2 \log_3 (2x-3) = \log_2 4$; $\log_3 (2x-3) = 4$;
 $2x-3 = 3^4$; $2x = 81+3$; $2x = 84$; $x = 42$. Перевіркою переконаємося,
що $x = 42$ — корінь. *Відповідь:* 42.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Рефлексія

1. Що на уроці було, на ваш погляд, головним?
2. Чи сподобалася вам форма роботи на уроці?
3. Чи повною мірою досягнуто мету уроку?
4. На які моменти уроку слід звернути увагу під час підготовки до контрольної роботи?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 5, повт. § 3	[3]: § 3
С		
Д	с. 44, СР № 1	с. 64, зразок КР № 1
В		

Індивідуально

Знайти значення x , при яких функція $f(x) = x^{\log_2 x + 2}$ дорівнює 8.

УРОК № 12

ТЕМА. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Показникова і логарифмічна функції»; розвивати вміння логічно мислити, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати самостійність, уміння сконцентрувати увагу на роботі.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати знання властивостей показникової та логарифмічної функцій і вміння застосовувати знання під час розв'язування показникових і логарифмічних рівнянь і нерівностей.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель налаштовує учнів на написання контрольної роботи, звертає їхню увагу на необхідність надання повного розв'язання завдань 7–9, а також на можливість логарифмування обох частин рівняння завдання 9, що допоможе його розв'язати.

IV. КОНТРОЛЬ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], КР 1, КР 2.

Контрольна робота № 1

Варіант 1

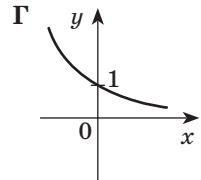
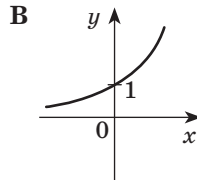
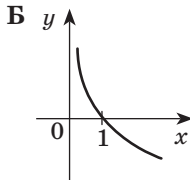
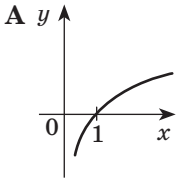
Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть зростаючу функцію.

А $y = \log_{0,7} x$ Б $y = 2^{-x}$ В $y = 5^x$ Г $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

2. На якому рисунку наведено графік функції $y = \log_5 x$?



3. Яке рівняння має корінь?

А $5^x = -5$ Б $5^x = 0$ В $\log_3^2(-x) = -1$ Г $5^x = \sqrt{5}$

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $0,5^x < \frac{1}{8}$.

А $(3; +\infty)$ Б $[3; +\infty)$ В $[1; 3]$ Г $(-\infty; 3)$

5. Яке число є розв'язком рівняння $\log_2 x = 3$?

А 1 Б 8 В $\frac{1}{8}$ Г 9

6. Знайдіть область визначення функції $y = \log_2(6 - 3x)$.

А $(-\infty; 2)$ Б $(2; +\infty)$ В $(-\infty; 2]$ Г $[2; +\infty)$

Достатній рівень (3 бали)

7. Розв'яжіть нерівність $\log_5(x+5) + \log_5(x+1) > 1$.
8. Розв'яжіть рівняння $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$.

Високий рівень (3 бали)

9. Розв'яжіть рівняння $x^{\log_2 x - 3} = 16$.

Варіант 2

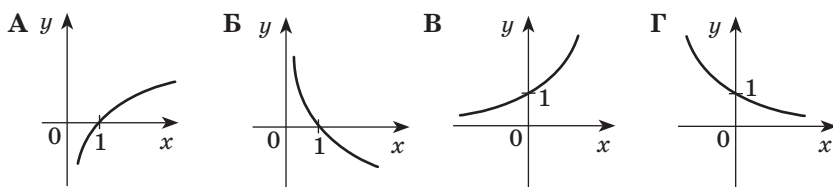
Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Укажіть спадну функцію.

А $y = \log_5 x$ Б $y = \pi^x$ В $y = \log_{0,6} x$ Г $y = 6,3^x$

2. На якому рисунку наведено графік функції $y = 5^x$?



3. Яке рівняння має корінь?

А $\log_2(-x) = 2$ Б $\log_2^2 x = -1$ В $5^{-x} = -5$ Г $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$.

А $(-\infty; -2)$ Б $(-2; +\infty)$ В $[-2; 1]$ Г $[-2; +\infty)$

5. Яке число є розв'язком рівняння $\log_3 x = 2$?

А 9 Б $\frac{1}{9}$ В 1 Г 8

6. Знайдіть область визначення функції $y = \log_{\frac{1}{9}}(10 - 5x)$.

А $(0; +\infty)$ Б $(-\infty; 2)$ В $(2; +\infty)$ Г $[2; +\infty)$

Достатній рівень (3 бали)

7. Розв'яжіть нерівність $\log_7(x-1) + \log_7(x-7) < 1$.
8. Розв'яжіть рівняння $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Високий рівень (3 бали)

9. Розв'яжіть рівняння $x^{\log_3 x + 2} = 27$.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. В. 2. А. 3. Г. 4. А. 5. Б. 6. А.

$$7. \log_5(x+5) + \log_5(x+1) > 1; \begin{cases} \log_5((x+5)(x+1)) > \log_5 5, \\ x+5 > 0, \\ x+1 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x + 5 > 5 \text{ (оскільки } 5 > 1), \\ x > -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ x > -1; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x < -6, \\ x > -1; \end{cases} \quad x > 0.$$

Відповідь: (0; +∞).

8. $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0.$

ОДЗ: $\mathbb{R}.$

$$2^x = t, \quad t > 0; \quad t^2 - 12t + 32 = 0; \quad t_1 = 8; \quad t_2 = 4. \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} 2^x = 8, \\ 2^x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2^x = 2^3, \\ 2^x = 2^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3, \\ x = 2. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } 3; 2.$$

9. $x^{\log_2 x - 3} = 16.$ Логарифмуємо за основою 2, маємо: $(\log_2 x - 3)\log_2 x = \log_2 16$; $\log_2^2 x - 3\log_2 x - 4 = 0.$ Нехай $\log_2 x = t$, тоді маємо: $t^2 - 3t - 4 = 0$; $t_1 = 4, \quad t_2 = -1.$ Виконаємо обернену заміну: $\log_2 x = 4, \quad x = 16$ або $\log_2 x = -1, \quad x = \frac{1}{2}.$ Перевіркою встановлюємо, що обидва корені задовольняють рівняння. Відповідь: $16; \frac{1}{2}.$

Варіант 2. 1. В. 2. В. 3. А. 4. А. 5. А. 6. Б.

$$7. \log_7(x-1) + \log_7(x-7) < 1; \begin{cases} \log_7((x-1)(x-7)) < \log_7 7, \\ x-1 > 0, \\ x-7 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 7 \text{ (оскільки } 7 > 1), \\ x > 7; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 8x < 0, \\ x > 7; \end{cases} \begin{cases} 0 < x < 8, \\ x > 7; \end{cases} \quad 7 < x < 8.$$

Відповідь: (7; 8).

8. $3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 = 0.$

ОДЗ: $\mathbb{R}.$

$$3^x = t, \quad t > 0; \quad t^2 - 12t + 27 = 0; \quad t_1 = 3; \quad t_2 = 9. \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} 3^x = 3, \\ 3^x = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} 3^x = 3^1, \\ 3^x = 3^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ x = 2. \end{cases} \quad \text{Відповідь: } 1; 2.$$

9. $x^{\log_3 x + 2} = 27$. Логарифмуємо за основою 3, маємо: $(\log_3 x + 2)\log_3 x = \log_3 27$; $\log_3^2 x + 2\log_3 x - 3 = 0$. Нехай $\log_3 x = t$, тоді маємо: $t^2 + 2t - 3 = 0$; $t_1 = -3$, $t_2 = 1$. Виконаємо обернену заміну: $\log_3 x = -3$, $x = \frac{1}{27}$ або $\log_3 x = 1$, $x = 3$. Перевіркою встановлюємо, що обидва корені задовольняють рівняння. *Відповідь:* $\frac{1}{27}$; 3.

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель збирає контрольні роботи, виконані учнями, знайомить їх із відповідями, заздалегідь підготовленими на дошці, та відповідає на запитання, що виникли під час виконання роботи.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Повторити поняття функції, графіка функції.

УРОК № 11*

ТЕМА. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: удосконалити вміння учнів розв'язувати показникові й логарифмічні рівняння й нерівності, застосовуючи властивості показникових і логарифмічних функцій; розвивати логічне мислення, культуру математичного мовлення й запису; виховувати самостійність, інтерес до математики.

Очікувані результати: учні повинні вміти будувати графіки показникових і логарифмічних функцій; користуватися показниковими й логарифмічними функціями для опису найпростіших реальних процесів; розв'язувати показникові й логарифмічні рівняння й нерівності.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал, картка самоконтролю.

Тип уроку: ділова гра (узагальнення й систематизація знань).

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пропонує учням об'єднатися в гетерогенні групи, члени яких стануть фахівцями з реклами, і взяти участь у конкурсі «Група року». Склад групи й математичне поняття, над презентацією якого працюватиме група, погоджені заздалегідь. Над рекламою одного поняття можуть працювати кілька груп (якщо їх більше ніж чотири).

Орієнтовні теми для презентації

1. Показникова функція.
2. Логарифмічна функція.
3. Показникові рівняння й нерівності.
4. Логарифмічні рівняння й нерівності.

II. РЕКЛАМА (МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ)

Учитель — голова експертної комісії — знайомить учасників конкурсу з його умовами. Найбільша кількість балів за рекламу — 2.

Приклад реклами показникової функції

Вона допомогла людям описати такі процеси, як радіоактивний розпад, розмноження бактерій, утворення нейтронів у ланцюговій реакції, інформаційний бум тощо.

Без неї не були б розв'язані задачі про зміну атмосферного тиску, приріст деревини.

І навіть сума вашого внеску до банку підлягає закону, який описується цією функцією.

Ви прагнете бути активним учасником сучасного життя? Тоді докладніше знайомтеся з темою «Показникова функція».

Голова експертної комісії повідомляє результати конкурсу з реклами.

III. ГРА «ЗНАЙДИ ПОМИЛКУ»

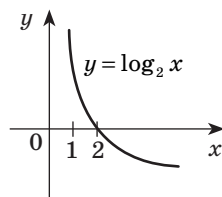
(АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ)

У ході конкурсу комісія перевіряє вміння групи швидко реагувати, правильно оцінювати ситуацію, обґрунтовувати свою думку.

На відкидній дошці підготовлено п'ять завдань. У розв'язанні кожного з них допущено помилку, яку групі необхідно знайти й виправити. Найбільша кількість балів за рекламу — 5.

Картка для роботи групи

1. На рисунку зображено графік функції $y = \log_2 x$.
2. $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$; $x > 3$. *Відповідь:* $[3; +\infty)$.
3. $\log_5 x < \log_5 25$; $x < 25$. *Відповідь:* $(-\infty; 25)$.
4. $3^x = \frac{1}{81}$; $x = 4$. *Відповідь:* 4.
5. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{21} < 0$.



IV. ПРЕЗЕНТАЦІЯ (ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ)

Кожна група готує презентацію одного з математичних понять, наведених у переліку тем. При цьому групи міняються темами, наприклад група, яка рекламувала показникову функцію, презентує логарифмічні рівняння й нерівності тощо.

Приклад презентації логарифмічних рівнянь і нерівностей

Я — Логарифмічне рівняння, тобто рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма.

Розв'язуючи мене, пам'ятай, що область визначення логарифмічної функції — додатні числа, що $\log_a x$ розглядають для $a > 0$, $a \neq 1$.

Розв'язуючи мене, пам'ятай про методи розв'язування логарифмічних рівнянь: зведення до однієї основи, метод заміни змінних.

Самі ці методи ти використовуєш, розв'язуючи логарифмічну нерівність. Але стережися підводних рифів! Ніколи не забувай про область допустимих значень нерівності та про те, що при $a > 1$ функція $y = \log_a x$ зростає, а при $0 < a < 1$ — спадає.

Голова експертної комісії підбиває підсумки презентації.

V. «МОЗКОВИЙ ШТУРМ»

(УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК)

Кожна група отримує картку із задачею, обговорює її, намічає план розв'язання, а через визначений час (3–5 хв) пропонує розв'язання. Усі розв'язання записуються на дошці, під час обговорення залишаються найбільш раціональні з них, вони й реалізуються кожною групою. Участь у цьому конкурсі оцінюється від 0 до 3 балів.

Задача 1. Відомо, що розмноження бактерій у певному середовищі описується формулою $N = N_0 a^{kt}$, де N_0 — початкова кількість бактерій при $t = 0$, a і k — деякі сталі. Обчисліть, за який час кількість бактерій збільшиться втричі.

Розв'язання. Якщо кількість бактерій за час t збільшилася втричі, то $\frac{N}{N_0} = 3$, тобто $a^{kt} = 3$. Отже, $\log_a a^{kt} = \log_a 3$, звідки $kt = \log_a 3$;

$t = \frac{\log_a 3}{k}$. *Відповідь:* через $\frac{\log_a 3}{k}$.

Задача 2. За законом, який установив К. Е. Цюлковський, кількість пального, необхідна для досягнення ракетою масою m (без пального) швидкості v , визначається за формулою $M = m \left(10^{0,43 \frac{v}{v_1}} - 1 \right)$, де v_1 — швидкість витоку продуктів згоряння із сопла двигуна

ракетносія. Обчисліть, скільки необхідно пального, щоб ракета масою $m = 1$ т досягла швидкості 11,2 км/с (друга космічна швидкість), якщо швидкість витoku продуктів згорання із сопла дорівнює 5 км/с. Опором повітря й силою тяжіння Землі знехтувати.

Розв'язання. За формулою $M = m \left(10^{0,43 \frac{v}{v_1}} - 1 \right)$, де $v_1 = 5$ км/с, а $v = 11,2$ км/с, $m = 1$ т. Тоді $M = 1 \left(10^{0,43 \frac{11,2}{5}} - 1 \right) \approx 10^{0,9632} - 1 \approx 8,2$ (т).
Відповідь: 8,2 т.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ КОНКУРСУ

Голова експертної комісії оголошує групу-переможця.

VII. САМООЦІНКА РОБОТИ УЧНЯМИ

Учні заповнюють картки для самоконтролю, оцінюючи свою роботу від 0 до 2 балів за кожним з критеріїв.

Картка для самоконтролю

1. Активність роботи в групі: _____
2. Внесення вдалих пропозицій, які були використані під час розв'язання: _____
3. Допомога членам групи: _____

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуально

Унаслідок радіоактивного розпаду кількість речовини масою 500 г за добу зменшується вдвічі. Визначте кількість речовини, що залишиться через: а) 2 доби; б) 3 доби.

ТЕМА 4. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

УРОК № 13

ТЕМА. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ.

Мета уроку: ознайомити учнів з поняттям границі функції в точці на прикладах; сформулювати основні теореми про границі функції в точці; розвивати увагу, пам'ять, культуру математичного мовлення й записів; виховувати наполегливість у досягненні мети, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити за графіком границі функції, якщо вони існують, розв'язувати найпростіші завдання на знаходження границі функції в точці.

Основні поняття: границя функції в точці.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Зробивши короткий статистичний аналіз контрольної роботи, учитель аналізує типові помилки, яких припустилися учні під час її написання.

III. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування

1. Побудуйте графік функції: а) $f(x) = x + 2$; б) $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.
2. Знайдіть значення функцій $f(x)$ і $g(x)$ для значень аргументу, які дорівнюють 0; 1; 2; -1; -2.
3. Зробіть висновок про поведінку функцій $f(x)$ і $g(x)$ при $x = 2$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

☑ Слово вчителя

Усьому є край (межа, границя), говоримо ми, перебуваючи в стані роздратування, і тим самим підкреслюємо, що так далі тривати не може. Сьогодні ви дізнаєтеся, чи мають ці слова якесь відношення до алгебри і що розуміємо в математиці під словом «границя».

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Розглянемо побудовані на дошці графіки функцій $f(x) = x + 2$ і $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ та звернемо увагу на те, що значення $f(x)$ наближається до числа 4, якщо x наближається до числа 2 зліва і справа. За допомогою символів це записують так: $x \rightarrow 2$, $f(x) \rightarrow 4$ або $\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$.

Знайдемо значення функції $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ при $x \rightarrow 2$. На відміну від попередньої функції, у точці $x_0 = 2$ функція $g(x)$ не визначена. Однак із графіка бачимо, що при $x \rightarrow 2$ відповідні значення функції наближаються до числа 4. Вважають, що число 4 є границею функції $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ у точці $x_0 = 2$, тобто $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$.

Таким чином, число A — границя функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$. При наближенні як завгодно близько значення x до значення x_0 значення функції $f(x)$ як завгодно близько наближаються до числа A .

Розглянемо функцію $\varphi(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ x, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$

Побудуємо графік (рис. 1) і розглянемо поведінку функції $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 1$. У цьому випадку границя функції $\varphi(x)$ не існує, оскільки немає єдиного числа, до якого наближається $\varphi(x)$ при $x \rightarrow 1$. Якщо $x \rightarrow 1$ зліва, то $\varphi(x) \rightarrow 1$; якщо $x \rightarrow 1$ справа, то $\varphi(x) \rightarrow 0$.

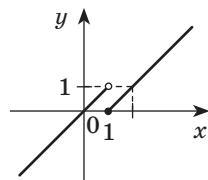


Рис. 1

Основні теореми про границі

Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$.

$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$; $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ ($B \neq 0$).

Приклад. Знайти границю функції в точці:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x^2 + x - 1)$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3 + x}$.

(Відповідь: а) $\frac{1}{3}$; б) 5; в) 1.)

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

Знайдіть границю функції в точці:

а) $\lim_{x \rightarrow -1} (2x - 3)$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 1}{2 - 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} (-5x + 1)$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x^2}{x^4 - x^2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9}$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда за технологією «Мікрофон»

На рис. 2 зображено графік функції: а) $y = f_1(x)$; б) $y = f_2(x)$; в) $y = f_3(x)$; г) $y = f_4(x)$. Установіть: чи визначена функція в точці x_0 ; чи існує границя функції в точці x_0 ; чи дорівнює границя в точці x_0 значенню функції в цій точці.

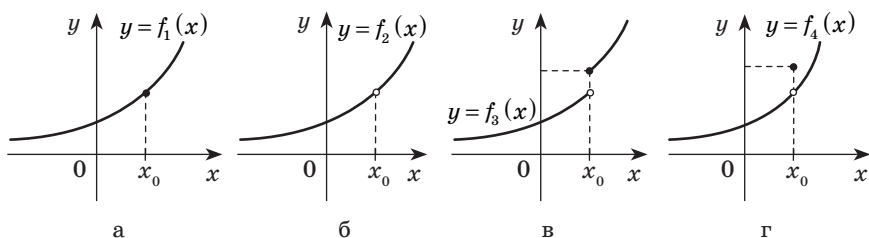


Рис. 2

Відповідь: а) функція має границю в точці x_0 і визначена в цій точці; границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в точці x_0 ; б) функція не визначена в точці x_0 ; функція має границю в точці x_0 ; в) функція визначена в точці x_0 ; функція не має границі в точці x_0 ; г) функція визначена в точці x_0 ; функція має границю в точці x_0 ; значення функції в точці x_0 не збігається зі значенням границі функції в точці x_0 .

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 6	[3]: § 6
С	№ 210	с. 140, № 3
Д	№ 219	№ 127 (3, 4)
В	№ 227	№ 128

Індивідуально

Знайти границю функції в точці $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{2-\sqrt{x-2}}$.



У цьому завданні необхідно для обчислення границі домножити чисельник і знаменник на вираз, спряжений знаменнику.

УРОК № 14

ТЕМА. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: сформувані в учнів поняття про миттєву швидкість руху, силу струму, дотичну до кривої; ознайомити із задачами, які приводять до поняття похідної; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, уміння зіставляти процеси реального життя з математичними поняттями; виховувати культуру математичного мовлення й запису, інтерес до математики.

Очікувані результати: учні повинні розуміти, що називається миттєвою швидкістю, і вміти знаходити миттєву швидкість матеріальної точки під час прямолінійного руху; розуміти, що називають дотичною до кривої, і знаходити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої.

Основні поняття: миттєва швидкість, дотична до кривої, приріст часу, приріст шляху, приріст аргументу, приріст функції, похідна функції.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ;
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Учні здійснюють взаємоперевірку правильності виконання домашнього завдання.

Фронтальна бесіда

1. Що називають середньою швидкістю руху матеріальної точки за інтервал часу Δt на відрізку шляху Δs ?
2. Що таке кутовий коефіцієнт прямої?
3. За якою формулою знаходять силу струму, який протікає в провіднику за інтервал часу Δt ?

**III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

Слово вчителя

Розглянемо дві задачі.

1. Камінь кинуто з висоти 100 м. Визначте швидкість його руху через 2 с. Яка швидкість його руху в момент удару об землю?
2. Маса солі, що розчинилася у воді за час від $t = 0$ до будь-якого моменту часу t , визначається за деяким законом $x = f(t)$. Якою є швидкість розчинення в момент часу t_0 ?

Отже, ми бачимо, що перша задача з фізики, а друга — з хімії. Подумайте, що їх об'єднує. Спосіб розв'язування задач, у яких йдеться про швидкість зміни значень функції відносно зміни її аргументу, універсальний. Сьогодні ви познайомитеся з поняттям, яке й робить цей спосіб універсальним.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Нехай матеріальна точка рухається вздовж прямої за законом $s = f(t)$. У момент часу t_0 точка пройшла шлях $s_0 = f(t_0)$. Нехай від моменту часу t_0 до $t_1 = t_0 + \Delta t$ ця точка перемістилася на відстань Δs і зайняла положення $s_1 = s_0 + \Delta s$, тобто за інтервал часу Δt пройшла

шлях $\Delta s = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Тоді $v_{\text{сеп}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Чим менший інтервал часу Δt , тим точніше можна вказати значення швидкості руху в момент часу t_0 .

Швидкість руху матеріальної точки в момент часу t_0 називають миттєвою швидкістю руху точки.

Отже, $v_{\text{мит}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{сеп}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Δt і Δs називають відповідно приростом часу й приростом шляху. Тобто миттєва швидкість точки, яка рухається прямолінійно, — границя відношення приросту шляху Δs до приросту часу Δt , коли приріст часу наближається до нуля.

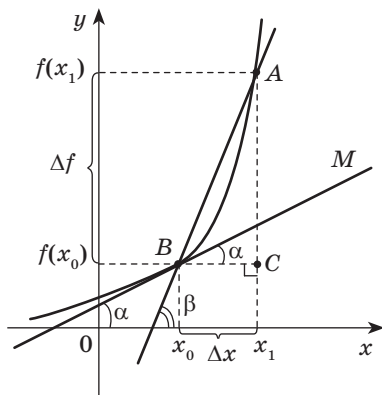
Нехай у провіднику за час t через поперечний переріз проходить електричний заряд q , який з часом змінюється за формулою $q = f(t)$.

Нехай за час $\Delta t = t_1 - t_0$ електричний заряд змінився на $\Delta q = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$. Тоді середня сила струму за час Δt визначається за формулою $I_{\text{сеп}} = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Отже, сила струму в момент часу t_0 дорівнюватиме

$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. Це число й називається силою струму в даний момент часу.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай її графіком є деяка крива (див. рисунок), точки A і B належать її графіку. Пряма AB — січна. Зафіксуємо точку B . Нехай точка A , рухаючись по кривій $y = f(x)$, наближається до точки B . При цьому січна AB , обертаючись навколо точки B , буде наближатися до граничного положення прямої BM . Цю пряму називають дотичною до даної кривої в точці B .



Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{AC}{BC} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Назвемо Δx приростом аргументу, а Δf — приростом функції.



Проаналізувавши розв'язання розглянутих задач, доходимо висновку, що всі вони розв'язуються за тим самим алгоритмом. Слід:

- 1) розглянути приріст незалежної змінної;
- 2) знайти відповідний йому приріст залежної змінної;
- 3) знайти відношення приросту функції до приросту аргументу;
- 4) знайти границю відношення приросту функції до приросту аргументу.

Знайдене в такий спосіб число називають **похідною функції** $y = f(x)$ у точці x_0 . Це число позначають $f'(x_0)$ або $y'(x_0)$. Визначення похідної

функції $y = f(x)$ коротко можна записати так: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Перш ніж взятися до розв'язування задач, слід повернутися до задачі 2, розглянутої на початку уроку. Отже, швидкість розчинення солі в момент часу t_0 дорівнює $v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_1) - f(t_0)}{\Delta t}$.

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Точка рухається прямолінійно за законом $s = 3t^2 - 2t + 5$ (s — у метрах, t — у секундах). Знайдіть швидкість руху точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

Розв'язання

- 1) Нехай значення $t_0 = 2$ с набуло приріст Δt , тоді $t_1 = 2 + \Delta t$.

- 2) Знайдемо відповідний приріст шляху:

$$\begin{aligned}\Delta s &= s(2 + \Delta t) - s(2) = 3(2 + \Delta t)^2 - 2 \cdot (2 + \Delta t) + 5 - (3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 5) = \\ &= 3 \cdot (4 + 4\Delta t + \Delta t^2) - 4 - 2\Delta t + 5 - 12 + 4 - 5 = \\ &= 12 + 12\Delta t + 3\Delta t^2 - 2\Delta t - 12 = 10\Delta t + 3\Delta t^2.\end{aligned}$$

- 3) Знайдемо відношення приросту шляху до приросту часу:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t} = 10 + 3\Delta t.$$

- 4) Знайдемо границю відношення приросту шляху до приросту

часу: $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (10 + 3\Delta t) = 10$.

Відповідь: 10 м/с.

2. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = x^2 - 4x$ у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

Розв'язання

- 1) Надамо аргументу x_0 приріст Δx і отримаємо $3 + \Delta x$.

- 2) Знайдемо відповідний приріст функції:

$$\Delta y = (3 + \Delta x)^2 - 4(3 + \Delta x) - (3^2 - 4 \cdot 3) = 9 + 6\Delta x + \Delta x^2 - 12 - 4\Delta x - 9 + 12 = 2\Delta x + \Delta x^2.$$

- 3) Знайдемо відношення: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$.

- 4) Знайдемо: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2 + \Delta x) = 2$.

Відповідь: $k = 2$.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- З якими поняттями ви ознайомилися на уроці?
- Чи можете ви зараз відповісти на запитання, що спільного в задачах, розглянутих на початку уроку?

3. Що називають миттєвою швидкістю матеріальної точки, рух якої описується функцією $s = f(t)$?
4. Що називають швидкістю зміни функції $y = f(x)$ у точці x_0 ?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 7	[3]: § 6, п. 3
С	№ 236	№ 132, 135 (1, 2)
Д	№ 251	№ 139
В	№ 257	№ 135 (3)

Індивідуально

Визначити кут між дотичною до параболи $y = x^2 - 2x + 3$ і додатним напрямком осі Ox у точці $x_0 = 1\frac{1}{2}$.

УРОК № 15

ТЕМА. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ. ЇЇ ГЕОМЕТРИЧНИЙ І ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ.

Мета уроку: ознайомити учнів з визначенням похідної; з'ясувати її геометричний і фізичний зміст; розвивати увагу, уміння аналізувати, узагальнювати, пов'язувати абстрактні поняття з реальними процесами; виховувати культуру математичного мовлення, точність, акуратність, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні розуміти значення поняття похідної для опису реальних процесів, зокрема механічного руху; знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції, швидкість зміни функції в точці.

Основні поняття: похідна функції, диференціювання.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

На цьому етапі уроку можна провести самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 7.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Знайдіть миттєву швидкість точки, що рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 - 2t$, у момент часу $t_0 = 2$ с (s — у метрах, t — у секундах). (Відповідь: 2 м/с.)
2. Кут φ повороту точки навколо осі залежно від часу задано формулою $\varphi(t) = 2t^2 + t - 1$ (рад). Визначте миттєву кутову швидкість руху точки при $t = 4$ с. (Відповідь: $17 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.)

Варіант 2

1. Знайдіть миттєву швидкість точки, що рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^2 - 2t$, у момент часу $t_0 = 3$ с (s — у метрах, t — у секундах). (Відповідь: 4 м/с.)
2. Кут φ повороту точки навколо осі залежно від часу задано формулою $\varphi(t) = 2t^2 + t - 1$ (рад). Визначте миттєву кутову швидкість руху точки при $t = 2$ с. (Відповідь: $9 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$.)

Учні виконують роботу під копірку, а потім колективно обговорюють розв'язання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальна бесіда

1. Що називають швидкістю зміни функції $y = f(x)$ у точці x_0 ?
2. Що називають миттєвою швидкістю точки, що рухається за законом $s = f(t)$?
3. Опишіть алгоритм знаходження миттєвої швидкості й алгоритм знаходження кутового коефіцієнта дотичної в точці.
4. Яким рівнянням задається пряма на координатній площині?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Оскільки $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ широко застосовується не тільки в задачах, розглянутих на попередньому уроці, а й у низці інших (зокрема в задачах про знаходження густини неоднорідного стрижня, теплоємності тіл у разі нагрівання тощо), то є сенс вивчати властивості цієї границі та визначати способи її обчислення. Приступимо.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

1. Похідна функції.

Дамо визначення похідної функції в точці x_0 . Нехай функція $y = f(x)$ задана на деякому проміжку P .

1) Нехай $x_0 \in P$. Надамо x_0 приріст Δx і отримаємо: $(x_0 + \Delta x) \in P$.

2) Обчислимо $\Delta y = \Delta f(x_0)$ у точці x_0 : $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

3) Знайдемо відношення: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

4) Знайдемо: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

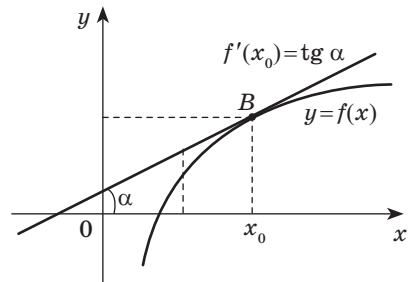
Отже, похідна функції $y = f(x)$, якщо вона існує в кожній точці інтервалу P , також є функцією аргументу x . Тоді її позначають $f'(x)$, і за визначенням $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

2. Механічний зміст похідної.

На попередньому уроці було розглянуто задачу про знаходження миттєвої швидкості прямолінійного руху матеріальної точки. Тепер, знаючи визначення похідної, можна сказати, що коли точка рухається за законом $s = s(t)$, то швидкість її руху $v(t)$ в момент часу t дорівнює похідній $s'(t)$, тобто $v(t) = s'(t)$.

3. Геометричний зміст похідної.

На попередньому уроці було розглянуто задачу про знаходження кутового коефіцієнта дотичної. Знаючи визначення похідної, можна зробити висновок: кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 дорівнює значенню похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 (див. рисунок).



Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Функція $y = f(x)$ у точці x_0 називається диференційованою, якщо в цій точці вона має похідну $f'(x_0)$.

Якщо функція $y = f(x)$ диференційована в кожній точці деякого проміжку P , то вона називається диференційованою на цьому проміжку.

Операцію знаходження похідної функції називають диференціюванням функції.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямком осі абсцис кут 30° . Знайдіть $f'(x_0)$.

(Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.)

2. Відомо, що тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$ дорівнює 2. Запишіть рівняння дотичної в точці $x_0 = 1$, якщо $f(x_0) = 3$. (Відповідь: $y = 2x + 1$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Сформулюйте визначення похідної функції в точці.

2. Який механічний зміст похідної?

3. Який геометричний зміст похідної?

4. Яка функція називається диференційованою в точці; на проміжку?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 7	[3]: § 6
С	№ 249	№ 129; с. 146, № 1
Д	№ 252, 253	№ 130
В	№ 256	№ 134

Індивідуально

Знайти за визначенням похідну функції: а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = \sqrt{x}$.

(Відповідь: а) $(x^3)' = 3x^2$; б) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.)

ТЕМА. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

Мета уроку: сформувати знання учнів про похідні елементарні функції, ознайомити із правилами диференціювання функцій та їх застосуванням до диференціювання різних функцій; розвивати логічне мислення, увагу, пам'ять, інтерес до нових знань; виховувати наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні знати правила диференціювання; уміти застосовувати ці правила при диференціюванні відомих їм функцій.

Основні поняття: похідна елементарної функції.

Обладнання: підручник, таблиця похідних елементарних функцій.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Двоє учнів біля дошки знаходять похідні функцій $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$. Решта, працюючи в парах, виконують вправи, аналогічні домашнім.

Робота в парах

1. Знайдіть за визначенням похідну функції $y = -3x^2 + 2$.
2. Запишіть рівняння дотичної до кривої $y = -x^2$ у точці $P(-1; 1)$.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Використовуючи вже відомі вам формули, знайдіть похідну функції $y = f(x)$ у точці $x_0 = -2$:
 - а) $y = 3x$; б) $y = x^2$; в) $y = \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt{x}$; д) $y = x^3$.
2. Враховуючи, що $(kx + b)' = k$, знайдіть $(x)'$; $(b)'$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Людина завжди прагне до комфорту й швидкого отримання результату. Не поїдете ви з Харкова, наприклад, у Москву на велосипеді, чи не так? Це довго й незручно. Швидше за все, дістанетеся потягом, машиною або літаком.

Зазначимо, що похідну кожної з функцій $y=2x-8$, $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$ або $y=\frac{1}{x}$ значно легше обчислювати не за визначенням, а за формулами, тож спробуємо сьогодні вивчити таблицю елементарних функцій і правила диференціювання.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція з елементами бесіди

Розглянемо таблицю похідних елементарних функцій (учитель роздає таблиці на кожен парту).

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C (число)	0	a^x	$a^x \ln a$ ($a > 0$)
x	1	$\ln x$	$\frac{1}{x}$ ($x > 0$)
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$ ($x > 0$)
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\cos x$	$-\sin x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^x	e^x	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Ознайомимося з прикладами знаходження похідної функції:

а) $(\sqrt{2})' = 0$; в) $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = \frac{-5}{x^6}$; д) $\left(\log_{\frac{1}{3}} x\right)' = \frac{1}{x \ln \frac{1}{3}}$;
 б) $(x^7)' = 7x^6$; г) $(2x)' = 2^x \ln 2$; е) $(x^2 x^5)' = (x^7)' = 7x^6$.

А тепер запишемо в зошити правила знаходження похідної суми, різниці, добутку й частки функцій. У запису приймемо значення функцій f і g та їх похідних у точці x : $f(x_0)=f$; $g(x_0)=g$; $f'(x_0)=f'$; $g'(x_0)=g'$.

Правила диференціювання

1. $(Cf)' = Cf'$ — постійний множник можна виносити за знак похідної.
2. $(f \pm g)' = f' \pm g'$ — похідна суми (різниці) диференційованих функцій дорівнює сумі (різниці) їх похідних.
3. $(f \cdot g)' = f'g + g'f$.
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$.

Приклад 1. Знайти похідну функції:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 4$;

б) $y = -x^4 + \text{ctg } x$.

Приклад 2. Знайти значення похідної функції $f(x) = \sin x + 2$ в точці $x_0 = \frac{\pi}{3}$. (Відповідь: $2\frac{1}{2}$.)

Приклад 3. Знайти похідну функції: а) $y = \sqrt{x}(2x^2 + 3)$; б) $y = \frac{2x-3}{5-4x}$.

(Відповідь: а) $\frac{2x^2+3}{2\sqrt{x}} + 4x\sqrt{x}$; б) $-\frac{2}{(5-4x)^2}$.)

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x} - \cos x + \text{tg } x$;

б) $y = 4x^2 - \ln x$;

в) $y = (3x^2 - 7x + 2)(1 - 2x - 6x^3)$;

г) $y = \frac{x+6}{3x^2-4}$.

2. Знайдіть значення похідної функції $y = \frac{x^3+1}{x^3-1}$ у точці $x_0 = 2$.

3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 1$ у точці $x_0 = -4$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Як знайти похідну суми, добутку, частки двох функцій?
2. Як знайти похідну функції в точці?
3. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 5$; б) $y = -2x$; в) $y = -\frac{1}{x}$; г) $y = -\frac{2}{\sqrt{x}}$.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 8	[3]: § 7, пп. 1, 2
С	№ 270	№ 143 (1, 3, 5, 7, 9, 11)
Д	№ 291 (а), 301	№ 146, 148
В	№ 307 (а)	№ 151 (х)

Індивідуально

Розв'язати нерівність $f'(x) > 0$, якщо $f(x) = -2x + x^2$.

УРОК № 17

ТЕМА. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: сформувати в учнів поняття складеної функції; ознайомити із правилами диференціювання складеної функції; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати працьовитість, акуратність, наполегливість, інтерес до знань.

Очікувані результати: учні повинні мати уявлення про складену функцію й правила її диференціювання, уміти виконувати найпростіші завдання на застосування правила диференціювання складеної функції.

Основні поняття: складена функція.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

На цьому етапі уроку можна в групах виконати завдання, текст якого наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 8.

Робота в парях

Установіть відповідність між функцією та її похідною.

- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1 $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ | А $4x^3 - 6x - 2$ |
| 2 $y = \frac{x}{3} - \frac{3}{x^2}$ | Б $2 \cos x \cdot (3x^2)$ |
| 3 $y = x^4 - 3x^2 - 2x + 6$ | В $2x^3 \cos x + 6x^2 \sin x + 2 \cos x$ |
| 4 $y = 2 \sin x \cdot (x^3 + 1)$ | Г $\frac{x^3 + 18}{3x^3}$ |
| 5 $y = \cos(-x^2 - 2)$ | Д $\frac{7}{9x^2 + 4 + 12x}$ |
| | Е $x^2 \sin x - 2x \cos x + 2 \sin x$ |

Відповідь. 1-Д; 2-Г; 3-А; 4-В; 5-Е.

Учні здійснюють самоперевірку за відповідями і формулюють правила диференціювання.

**III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

Слово вчителя

Як відомо, усе таємне коли-небудь стає явним, а все складне можна значно спростити, розклавши його на складові. Сьогодні ви познайомитеся з функцією, яку називають складеною, але сподіваємося, що, розібравшись, кожен з вас переконається, що працювати з такою функцією не складніше, ніж з елементарною.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Бесіда

Припустимо, треба обчислити за заданим значенням x відповідне значення z функції $z = h(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Як ви здійснюватимете обчислення?

Отже, для цього спочатку обчислимо за заданим x значення функції $f(x) = 4 - x^2$, а потім знайдемо, що $z = h(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$.

Функція h складена з функцій g і f , отже, вона є складеною.

Якщо функція f має похідну в точці x_0 , а функція g має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$, то складена функція $h(x) = g(f(x))$ також має похідну в точці x_0 , причому $h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Приклад. Знайти похідну функції $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Розв'язання. $h'(x) = (4 - x^2)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{4 - x^2}}$; $h'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{x}{4 - x^2}$.

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть похідну функції:

а) $f(x) = (6x + 3)^9$; б) $f(x) = \frac{3}{(-2x - 3)^7}$; в) $f(x) = \sqrt{3 - e^x}$.

2. Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у точці x_0 :

а) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$, $x_0 = 4$;

б) $f(x) = (4^x + 1)^2$, $x_0 = 0$.

3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x_0) = e^{-x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 0$.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

Задано функції $f(x) = 1 - 2x$ і $g(x) = \sin x$. Задайте формулою складену функцію $h(x) = f(g(x))$ і $\varphi(x) = g(f(x))$.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Повторити властивості функції.

2. Виконати домашню самостійну роботу.

Домашня самостійна робота

Варіант 1

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 3x^5 + \frac{x^2}{2} - 3$;

б) $y = 2\sin x - 5\operatorname{ctg} x$;

в) $y = \frac{x+3}{x-2}$

Варіант 2

1. Знайдіть похідну функції:

а) $y = 2x^5 - \frac{x^3}{3} + 1$;

б) $y = 3\cos x + 7\operatorname{tg} x$;

в) $y = \frac{x-2}{x+3}$.

2. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ в точці x_0 :

$f(x) = \sqrt{2x - x^3}$, $x_0 = 1$

$f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$, $x_0 = -1$

3. Розв'яжіть задачу.

Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = t^2 + 1$ (s — у метрах, t — у секундах). Визначте координату точки в момент, коли швидкість її руху дорівнює 8 м/с.

Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = t^3 - 2t$ (s — у метрах, t — у секундах). Визначте координату точки в момент, коли швидкість її руху дорівнює 1 м/с.

ТЕМА. ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ.

Мета уроку: вчити застосовувати формули диференціювання елементарних функцій і правила диференціювання для знаходження похідних; розвивати логічне мислення, уміння працювати в групі; виховувати працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні знати таблицю похідних елементарних функцій, правила диференціювання; уміти застосовувати правила диференціювання під час розв'язування нескладних завдань.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ**

Учитель збирає зошити із самостійною домашньою роботою.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ **Інтерактивна гра «Німий диктант»**

Учитель показує функцію, заздалегідь написану на дошці, наприклад, $y = x^5$; $y = -\sin x$; $y = \operatorname{ctg} 3x$; $y = \frac{2}{x^6}$; $y = \sqrt{5x}$; $y = \cos x$; $y = e^{2x}$; $y = \ln x$; $y = \log_3 x$; $y = 2^x$; $y = x + 3x^2$; $y = -\operatorname{tg} x$. Учні піднімають планшети із записом похідної цієї функції.

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ** **Інтерв'ю**

Учитель звертається до учнів із пропозицією пояснити, чому так важливо володіти технікою диференціювання на цьому етапі вивчення теми. Учні висловлюють свою думку у вигляді інтерв'ю.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК **Робота в групах**

Учні об'єднуються в гетерогенні групи й виконують завдання однакової складності.

Картка для роботи групи

1. Знайдіть похідну функції $y = 4\sin x - \frac{1}{4}\cos 4x + \sqrt{x} - x^3 + \frac{1}{x^4}$.
2. Знайдіть похідну функції $f(x) = \frac{x}{x+2}$ в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

3. Знайдіть похідну функції $y = e^{-x} \operatorname{tg} x$.
4. Знайдіть тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = 2x - 3\sin x$ у точці $x_0 = \pi$.
5. Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = t^3 + 1$. Знайдіть швидкість руху точки в момент, коли переміщення дорівнює 9 м.

Розв'язання до картки

1. $y = 4\sin x - \frac{1}{4}\cos 4x + \sqrt{x} - x^3 + \frac{1}{x^4}$;

$$y' = 4\cos x + \frac{1}{1}\sin 4x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^2 - \frac{4}{x^5}$$

2. $f(x) = \frac{x}{x+2}$; $f'(x) = \frac{(x+2) - x}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$; $f'(x_0) = f'(1) = \frac{2}{9}$.

Відповідь: $\frac{2}{9}$.

3. $y = e^{-x} \operatorname{tg} x$; $y' = e^{-x} \operatorname{tg} x + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}$. *Відповідь:* $y' = -e^x \operatorname{tg} x + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}$.

4. $f(x) = 2x - 3\sin x$; $f'(x) = 2 - 3\cos x$; $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = f'(\pi) = 2 + 3 \cdot 1 = 5$.

Відповідь: 5.

5. $s(t) = t^3 + 1$. За умовою $t^3 + 1 = 9$, тобто $t^3 = 8$; $t = 2$. Отже, треба визначити швидкість руху точки в момент часу $t = 2$ с. $v(t) = s'(t) = 3t^2$; $v(2) = s'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$. *Відповідь:* 12 м/с.

Через час, зазначений учителем, представники груп пояснюють розв'язання одного із завдань, деякі завдання можна прокоментувати з місця.

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Самостійна робота

Варіант 1

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Знайдіть похідну функції:

$y = e^x \operatorname{tg} x$

$y = e^x \operatorname{ctg} x$

A $\frac{e^x}{\cos^2 x}$

B $e^x \operatorname{tg} x - \frac{e^x}{\cos^2 x}$

B $e^x \operatorname{ctg} x - \frac{e^x}{\sin^2 x}$

Г $e^x \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{\cos^2 x}$

Варіант 1

2. Знайдіть похідну функції:

$$y = -x \sin x \text{ у точці } x_0 = \pi$$

A $\frac{\pi}{2}$

Б π

Варіант 2

$$y = -x \cos x \text{ у точці } x_0 = \frac{\pi}{2}$$

В 1

Г -1

3. Знайдіть похідну функції:

$$y = \ln \operatorname{ctg} x$$

A $\operatorname{tg} x$

Б $\operatorname{ctg} x$

$$y = \ln \operatorname{tg} x$$

В $-\frac{2}{\sin 2x}$

Г $\frac{2}{\sin 2x}$

Достатній рівень (3 бали)

4. Обчисліть значення похідної функції:

$$f(x) = \sqrt{\cos x} \text{ у точці } x_0 = 0$$

$$f(x) = \cos \sqrt{x} \text{ у точці } x_0 = \frac{\pi^2}{4}$$

Високий рівень (3 бали)

5. Знайдіть точку, у якій дотична до графіка функції $y = x^2 - x + 1$ буде паралельною прямій:

$$y = x$$

$$y = -x$$

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. 0. 5. (1;1).

Варіант 2. 1. В. 2. А. 3. Г. 4. $-\frac{1}{\pi}$. 5. (0;1).



Якщо прямі, задані рівняннями $y = k_1 x + b_1$ і $y = k_2 x + b_2$, паралельні, то $k_1 = k_2$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Рефлексія «Закінчіть речення»

1. Моя робота в складі групи була...
2. Найскладнішими для мене виявилися завдання...
3. Щоб усунути прогалини в знаннях, я маю...

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 8	[3]: § 7
С	№ 274	№ 143 (13, 17, 19)
Д	№ 294	№ 143 (14, 15, 21)
В	№ 306	№ 150 (4), 152 (1)

Індивідуально

Залежність координати матеріальної точки від часу описується формулою $g = 2t^2 + 3t + 1$. Знайти швидкість руху точки.

ТЕМА. ОЗНАКИ СТАЛОСТІ, ЗРОСТАННЯ І СПАДАННЯ ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: ознайомити учнів із правилами знаходження проміжків зростання (спадання) функції; розвивати логічне мислення, уміння самостійно приймати рішення; виховувати спостережливість, старанність, уміння розраховувати час роботи.

Очікувані результати: учні повинні знати ознаки зростання (спадання) функції та уміти їх застосовувати для дослідження функцій на монотонність.

Основні поняття: критичні точки функції.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні самостійно здійснюють перевірку правильності виконання домашнього завдання за записами, підготовленими заздалегідь учителем на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування

1. Яку функцію називають зростаючою; спадною?
2. Які властивості функції необхідно знати для дослідження функції?
3. Знайдіть похідну функції $y = x^3 - 3x$.
4. У яких точках значення даної похідної дорівнює нулю?
5. Для яких значень аргументу значення $(x^3 - 3x)'$ будуть додатними; від'ємними?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ І ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Для вивчення багатьох процесів необхідно не тільки вміти читати графік досліджуваного процесу, а й будувати його. А для побудови графіка слід знати, як поводить себе функція на тих чи інших проміжках. Одним із важливих завдань дослідження функції є дослідження функції на монотонність.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Із геометричного змісту похідної зрозуміло, що в кожній точці графіка зростаючої функції дотична утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут. А в кожній точці графіка спадної функції дотична утворює із додатним напрямком осі Ox тупий кут. Тобто якщо на якому-небудь проміжку функція має похідну і зростає, то $f'(x) \geq 0$, а якщо на якому-небудь проміжку функція має похідну і спадає, то $f'(x) \leq 0$.

Для дослідження властивостей функції важливішими є твердження, які дозволяють за знаком похідної з'ясувати монотонність функції.

Достатня ознака зростання (спадання) функції

1. Якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає.
2. Якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає (рис. 1).

Функція $f(x)$ є сталою на проміжку тоді і тільки тоді, коли її похідна дорівнює нулю у всіх точках цього проміжку.

Зазначимо, що функція може зростати (спадати) і на проміжку, у деяких точках якого вона диференційована. Наприклад, функція $y = 3x + |x|$ зростає на \mathbf{R} , хоча в точці $x = 0$ її похідна не існує (рис. 2).

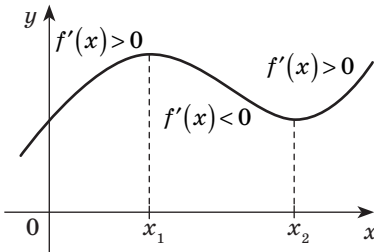


Рис. 1

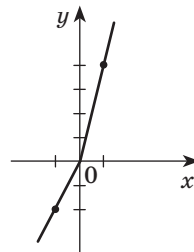


Рис. 2

Тоді очевидно, що два сусідні проміжки, на одному з яких функція зростає, а на іншому спадає, можуть розділятися лише точкою, у якій похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають **критичними точками** функції.



Точки, у яких похідна функції дорівнює нулю, називають **стаціонарними точками** функції.

Алгоритм знаходження проміжків зростання (спадання) функції

- 1) Знайти $D(y)$ для $y = f(x)$. (Знайти область визначення функції.)
- 2) Знайти $y' = f'(x)$. (Знайти похідну функції та $D(f')$.)
- 3) Розв'язати рівняння $f'(x) = 0$. (Знайти критичні точки функції.)
- 4) Розв'язати нерівність $f'(x) > 0$ і вказати проміжки зростання функції.
- 5) Розв'язати нерівність $f'(x) < 0$ і вказати проміжки спадання функції.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть критичні точки функції:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; б) $f(x) = 4x - \frac{x^3}{3}$.

(Відповідь: а) 0; 1; -1; б) -2; 2.)

2. Доведіть, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ не має критичних точок.



Точка $x = 0$ у завданні 2 не є критичною, оскільки 0 — не є внутрішньою точкою області визначення функції $y = \sqrt{x}$. Отже, критичних точок немає.

3. Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x) = x^3 - 27x$.
(Відповідь: функція зростає на кожному із проміжків $(-\infty; -3)$; $(3; +\infty)$, спадає на проміжку $(-3; 3)$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. З якими поняттями ви ознайомилися на уроці?
2. Сформулюйте достатні ознаки зростання і спадання функції.
3. Сформулюйте умову сталості функції на проміжку.
4. Які точки називаються критичними?
5. Наведіть алгоритм можливого дослідження функції на монотонність.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 10	[3]: § 8, п. 1
С	№ 349	с. 171, № 1–3; № 157 (1), 158 (1, 2)
Д	№ 371	с. 171, № 4–6; № 157 (2), 158 (5, 8)
В	№ 353	№ 158 (10), 162

Індивідуально

Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = \frac{5x^2}{x+4}$.

УРОК № 20

ТЕМА. ЕКСТРЕМУМИ ФУНКЦІЇ.

Мета уроку: сформувати поняття про точки екстремуму та екстремуми функції; сформувати вміння знаходити екстремуми функцій за допомогою похідної; розвивати розумову діяльність, пам'ять, увагу; виховувати наполегливість, терпіння, інтерес до пізнання нового.

Очікувані результати: учні повинні знати, як використовувати похідну для знаходження екстремумів функції.

Основні поняття: окіл точки x_0 , точки екстремуму, екстремуми функції.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Завдання середнього і достатнього рівнів складності коментуються з місця, розв'язання завдання високого рівня один з учнів записує на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

☑ Бліцопитування

1. Відомо, що похідна функції $y = f(x)$, заданої на множині \mathbf{R} , має такі знаки, як на рис. 1. Укажіть проміжки зростання і спадання функції.

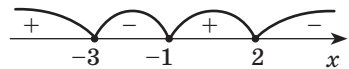


Рис. 1

2. На рис. 2 зображено графік похідної функції $y=f'(x)$, визначеної на проміжку $(-2; 4)$. Укажіть критичні точки функції та проміжки її монотонності.

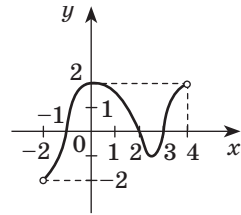


Рис. 2

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

У житті кожного з нас бувають зльоти і падіння, так звані екстремальні ситуації. Виявляється, у функції також є моменти зльоту і падіння. У неї теж є «екстремальні ситуації», які називаються екстремумами функції; точки, у яких це трапляється, називаються екстремальними. Сьогодні ви навчитесь знаходити точки екстремуму й екстремуми функції. Як уникнути або досягти екстремумів у житті, навчить саме життя.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Околом точки a називається будь-який проміжок, для якого a є внутрішньою точкою.

Визначення точок максимуму і мінімуму

1. Точка x_0 називається **точкою мінімуму** функції $y=f(x)$, якщо для всіх x ($x \neq x_0$) з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.
2. Точка x_0 називається **точкою максимуму** функції $y=f(x)$, якщо для всіх x ($x \neq x_0$) з деякого околу точки x_0 виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Точки максимуму і мінімуму функції називають **точками екстремуму**.

Значення функції в точці мінімуму називають **мінімумом функції**; значення функції в точці максимуму називають **максимумом функції**. Значення функції в точках її екстремуму називають **екстремумами функції**.



Екстремуми функції й точки екстремуму функції — різні математичні поняття.

Наприклад, для функції $y = x^2 - 4x + 5$ екстремальною є точка $x_{\min} = 2$, а екстремумом є значення $y_{\min} = 1$ (рис. 3). Для функції $y = 1 - |x|$ точкою максимуму є точка $x_{\max} = 0$, а значення $y_{\max} = 1$ є максимумом функції $y = 1 - |x|$ (рис. 4).

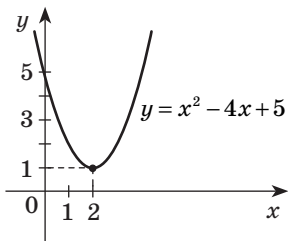


Рис. 3

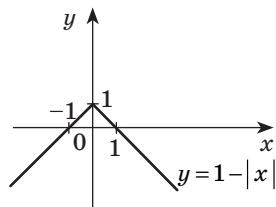


Рис. 4

Як бачимо, точки екстремуму — це точки, у яких похідна функції дорівнює нулю або не існує.

Необхідна умова існування екстремуму: якщо x_0 — точка екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Достатня умова існування екстремуму

1. Якщо похідна функції $f(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з «-» на «+», то точка x_0 є точкою мінімуму (рис. 5).
2. Якщо похідна функції $f(x)$ при переході через точку x_0 змінює знак з «+» на «-», то ця точка є точкою максимуму.

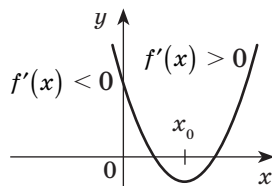


Рис. 5

Алгоритм дослідження функції на екстремуми

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Знайти похідну $f'(x)$ і $D(f')$.
- 3) Знайти критичні точки.
- 4) Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної на кожному проміжку, на які розбилася область визначення.
- 5) Визначити, чи є критична точка точкою максимуму або мінімуму, чи не є точкою екстремуму.
- 6) Знайти екстремуми функції.

Далі вчитель наводить приклади дослідження функції на екстремуми.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

- Знайдіть екстремуми функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. (Відповідь: 28; 4.)
- Знайдіть точки екстремуму функції:
а) $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^4 - 5$; в) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.
б) $f(x) = 3x - x^3$;
(Відповідь: а) $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 4$; б) $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -1$; в) $x_{\max} = \pm 1$, $x_{\min} = 0$.)
- Як, користуючись похідною, знайти абсцису вершини параболы — графіка функції $y = ax^2 + bx + c$?

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- Із якими поняттями ви ознайомилися на уроці?
- Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
- Сформулюйте достатню умову існування екстремуму в точці.
- За яким алгоритмом можна досліджувати функцію на монотонність і екстремум?
- Функція визначена і спадає на проміжку $[-5; 5]$. Чи може точка її екстремуму належати цьому проміжку? Обґрунтуйте відповідь.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 10	[3]: § 8, п. 2
С	№ 361	с. 117, № 1–7; № 164 (1–3)
Д	№ 369	с. 117, № 1–8; № 164 (5, 7) 165 (1)
В	№ 374 (а)	№ 166

Індивідуально

- Знайти проміжки зростання і спадання та екстремуми функції $y = \frac{e^x}{x}$.
- Знайти точки екстремуму функції $y = e^x x - e^x$.

ТЕМА. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ЇХ ГРАФІКІВ.

Мета уроку: формувати в учнів уміння застосовувати похідну до дослідження функцій і побудови їх графіків; розвивати культуру математичних записів, уміння аналізувати; виховувати акуратність, спостережливість.

Очікувані результати: учні повинні знати загальну схему дослідження функції та побудови її графіка, застосовувати цю схему під час виконання завдань.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Робота в парах за готовими рисунками

1. Знайдіть точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$, графік якої зображено на рис. 1. Чи існує похідна в зазначених точках? Якщо існує, то чому дорівнює її значення?
2. Скільки екстремумів має функція, графік якої зображено на рис. 2?
3. На рис. 3 зображено графік похідної функції $f(x)$, яка визначена на проміжку $[-1; 5]$. Скільки екстремумів має функція $f(x)$? Назвіть її проміжки монотонності.

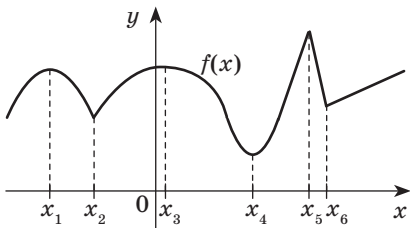


Рис. 1

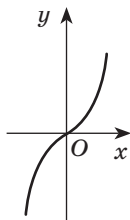


Рис. 2

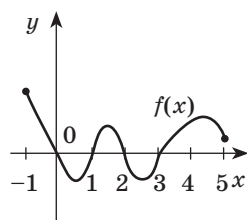


Рис. 3

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Ви вмієте шукати похідні різних функцій, знаходити проміжки монотонності й екстремуми функцій. Тепер важливо навчитися застосовувати знання на практиці. Практичне застосування в цьому випадку — побудова графіків функцій.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Учні об'єднуються в групи, отримують на парті схему дослідження функції та побудови її графіка та завдання, яке виконують, користуючись цією схемою. Після закінчення часу, визначеного вчителем, представники груп пояснюють етапи дослідження функції, а потім на дошці будують графік.

Схема дослідження функції

- 1) Знайти область визначення функції.
- 2) Знайти точки перетину графіка з осями координат.
- 3) Визначити парність (непарність), періодичність функції.
- 4) Знайти похідну й критичні точки функції.
- 5) Знайти проміжки зростання, спадання, точки екстремуму й екстремальні значення функції.
- 6) На основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Завдання для роботи групи

1. Дослідіть функцію $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ та побудуйте її графік.

Розв'язання

1) $D(y) = \mathbf{R}$.

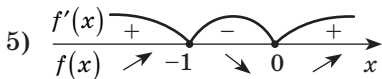
2) $2x^3 + 3x^2 - 1 = 0$; $3x^3 + 3x^2 - x^3 - 1 = 0$; $3x^2(x+1) - (x^3 + 1) = 0$;
 $3x^2(x+1) - (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$; $(x+1)(3x^2 - x^2 + x - 1) = 0$;

$$(x+1)(2x^2 + x - 1) = 0; \begin{cases} x+1=0, \\ 2x^2 + x - 1 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Точки перетину з віссю Ox : $(-1; 0)$, $(\frac{1}{2}; 0)$.

Точка перетину з віссю Oy : $(0; -1)$.

- 3) Функція не є ані парною, ані непарною: $y(-x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$; функція неперіодична.
- 4) $y' = 6x^2 + 6x$; $6x^2 + 6x = 0$; $x^2 + x = 0$; $x(x+1) = 0$.
 $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ — критичні точки.



$x_{\max} = -1; y_{\max} = 0. x_{\min} = 0; y_{\min} = -1.$

6) Будуємо графік функції (рис. 4).



Під час побудови графіка бажано знаходити кілька точок, які належать графіку функції (контрольних точок).

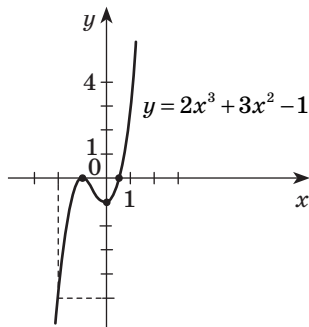


Рис. 4

Запропонована схема дослідження функції є орієнтовною. Наприклад, не завжди можна знайти точки перетину з віссю абсцис.

2. У таблиці описані деякі властивості функції $y = f(x)$. Побудуйте схематичний графік функції, якщо вона визначена на \mathbf{R} .

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 4)$	4	$(4; +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	2	↗	4	↘	1	↗
		min		max		min	

Будуємо графік функції (рис. 5).

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

На рис. 6 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на \mathbf{R} . Користуючись графіком, укажіть властивості функції.

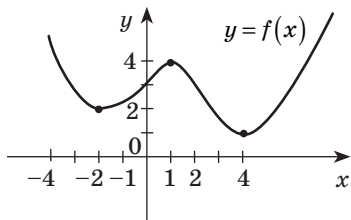


Рис. 5

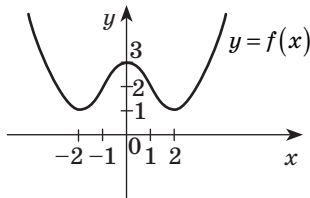


Рис. 6

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 10	[3]: § 8, п. 3
С	№ 364 (а)	№ 167 (4); с. 181, № 1
Д	№ 375 (а)	167 (1–3); с. 181, № 2
В	№ 376 (а)	169; с. 181, № 4

Індивідуально

Побудувати графік, попередньо дослідивши функцію:

а) $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 1$; б) $f(x) = 3x - x^3$; в) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

УРОК № 22

ТЕМА. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВИ ЇХ ГРАФІКІВ.

Мета уроку: відпрацювати навички дослідження функції та побудови графіків; розвивати культуру математичних записів, вміння аналізувати, застосовувати отримані знання для розв'язання завдань; виховувати акуратність, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні знати загальну схему дослідження функції та побудови її графіка й застосовувати цю схему під час виконання завдань.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за ескізами графіків, заздалегідь підготовленими вчителем на дошці. Під час перевірки учні відповідають на запитання вчителя, повторюють схему дослідження функції.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Відпрацьовуючи свої вміння, ми можемо досягти досконалості. Чим більше разів ми повторюємо той самий алгоритм, тим швидше справляємося із завданням. Зрозуміло одне — щоб отримати якісний результат, треба багато працювати.

IV. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

☑ **Коллективне виконання завдань під керівництвом учителя**

1. Дослідіть функцію $y = xe^{-x}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

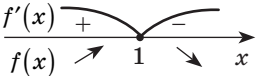
1) $D(y) = \mathbf{R}$.

2) Перетин з віссю Ox : $(0; 0)$.

Перетин з віссю Oy : $(0; 0)$.

3) Функція не є ані парною, ані непарною.

4) $y' = e^{-x} - e^{-x} \cdot x = e^{-x}(1 - x)$. $e^{-x}(1 - x) = 0$. $x = 1$ — критична точка.

5) 

$x_{\max} = 1$; $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{e} \approx 0,4$.

6) Будуємо графік функції (рис. 1).

2. Дослідіть функцію $y = \ln(4 - x^2)$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

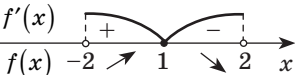
1) $D(y)$: $4 - x^2 > 0$; $-2 < x < 2$.

2) Перетин з віссю Ox : $\ln(4 - x^2) = 0$; $4 - x^2 = 1$; $x^2 = 3$; $x = \pm\sqrt{3}$.
 $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$.

Перетин з віссю Oy : $x = 0$; $y = \ln 4 \approx 1,2$. $(0; 1,2)$.

3) Функція парна.

4) $y' = \frac{-2x}{4 - x^2}$; $\frac{-2x}{4 - x^2} = 0$. $x = 0$ — критична точка.

5) 

$x_{\max} = 0$; $y_{\max} = \ln 4$

6) Будуємо графік функції (рис. 2).

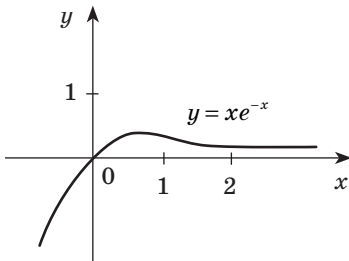


Рис. 1

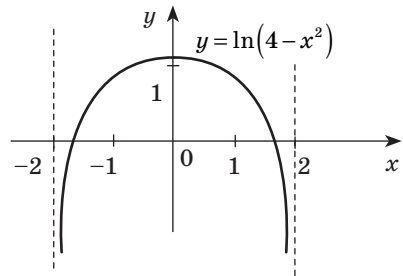


Рис. 2

V. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ, УМІТЬ І НАВИЧОК

☑ Самостійна робота

Варіант 1

Дослідіть функцію $y = -x^3 + 3x - 2$ і побудуйте її графік.

Варіант 2

Дослідіть функцію $y = x^4 - 2x^2 - 3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання до самостійної роботи

Варіант 1

- 1) $D(y) = \mathbf{R}$.
- 2) $x = 0$; $y = -2$. $(0; -2)$.
- 3) Функція є ані парною, ані непарною.
- 4) $y' = -3x^2 + 3$; $-3x^2 + 3 = 0$; $x = \pm 1$.

5)

$x_{\min} = -1$; $y_{\min} = -4$. $x_{\max} = 1$; $y_{\max} = 0$.

- 6) Будуємо графік функції (рис. 3).

Варіант 2

- 1) $D(y) = \mathbf{R}$.
- 2) $x = 0$, $y = -3$, $(0; -3)$.
 $y = 0$; $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$; $x = \pm\sqrt{3}$. $(\sqrt{3}; 0)$, $(-\sqrt{3}; 0)$.

3) Функція парна.

- 4) $y' = 4x^3 - 4x$; $4x^3 - 4x = 0$; $x(x^2 - 1) = 0$. $x = 0$; $x = 1$; $x = -1$ — критичні точки.

5)

$x_{\min} = -1$; $y_{\min} = -4$. $x_{\min} = 1$; $y_{\min} = -4$. $x_{\max} = 0$; $y_{\max} = -3$.

- 6) Будуємо графік функції (рис. 4).

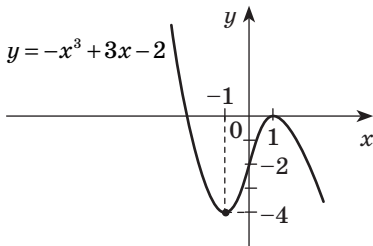


Рис. 3

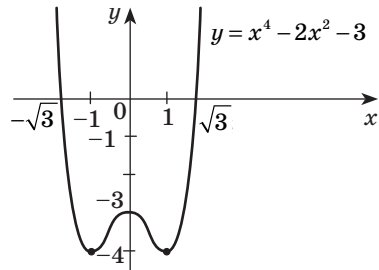


Рис. 4

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель роздає на парти зразки правильного виконання само-
стійної роботи і відповідає на запитання учнів.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 10	[3]: § 10
С	№ 364 (б)	№ 159
Д	№ 375 (б)	№ 161
В	№ 376 (б)	№ 168

Індивідуально

Дослідити функцію $y = 1 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

УРОК № 23

ТЕМА. **НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ.**

Мета уроку: сформувати в учнів поняття найбільшого і найменшого значень функції на проміжку, уміння застосовувати алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції; розвивати пам'ять, увагу; виховувати інтерес до знань.

Очікувані результати: учні повинні засвоїти алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції; розв'язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень реальних величин.

Основні поняття: найбільше і найменше значення функції.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель пропонує учням самостійно перевірити правильність виконання домашнього завдання за графіками, заздалегідь підготовленими на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальна бесіда за готовим рисунком

На рис. 1 зображено графік квадратичної функції $y = x^2$. Укажіть:

- а) найменше значення функції на проміжку: а) $[1; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; -1]$, і точки, у яких воно досягається;
- б) найбільше значення функції на проміжку: а) $[1; 2]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-2; -1]$, і точки, у яких воно досягається.

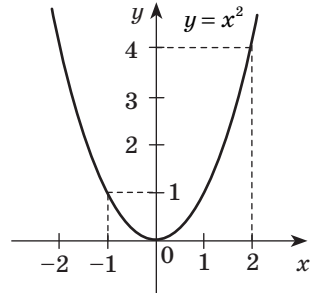


Рис. 1

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Уявіть, що організація отримала замовлення: розрахувати розміри відкритого басейну об'ємом 108 м^3 , що має квадратне дно. На облицювання стін і дна басейну має бути витрачено мінімальну кількість матеріалу. Сьогодні у вас є можливість навчитися виконувати такі розрахунки, застосовуючи алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Від максимуму і мінімуму функції слід відрізнити її найбільше і найменше значення на проміжку. Функція $f(x) = x^2$ на проміжку $[1; 2]$ має найменше значення $f(1) = 1$, а найбільше $f(2) = 4$. На проміжку $[-1; 1]$ $f(0) = 0$ — найменше значення, а $f(-1) = f(1) = 1$ — найбільше значення.

Для функції $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 2, $f(a)$ — найменше значення, $f(c)$ — найбільше значення на проміжку $[a; b]$. Як бачимо, найбільше і найменше значення функції можуть досягатися як у критичних точках, так і на кінцях проміжку.

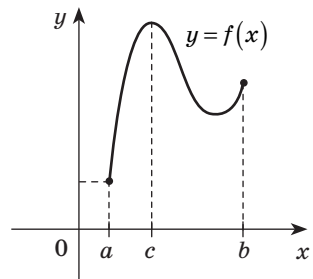


Рис. 2

Алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень для функції $y = f(x)$, диференційованої на проміжку $[a; b]$.

- 1) Знайти значення функції на кінцях проміжку, тобто числа $f(a)$ і $f(b)$.
- 2) Знайти значення критичних точок на проміжку $[a; b]$.
- 3) Знайти значення функції у вибраних критичних точках.
- 4) Зі знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Приклад. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$ на проміжку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Ця функція визначена й диференційована в кожній точці проміжку $[-2; 0]$.

- 1) $f(-2) = -1$; $f(0) = 1$.
- 2) $f'(x) = 3x^2 - 3x - 6$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x = 2$ і $x = -1$ — критичні точки функції. $2 \notin [-2; 0]$; $-1 \in [-2; 0]$.
- 3) $f(-1) = 4,5$.
- 4) $4,5 > 1 > -1$. Отже, $\max_{[-2; 0]} f(x) = f(-1) = 4,5$; $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = -1$.

Відповідь: 4,5; -1.



Якщо між кінцями відрізка $[a; b]$ розміщена тільки одна критична точка $c \in [a; b]$ і в ній функція має екстремум, то і без знаходження $f(a)$ і $f(b)$ можна стверджувати, що цей екстремум буде або найбільшим, або найменшим значенням функції на проміжку.

Велика кількість практичних задач зводиться до знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку. Під час розв'язування таких задач рекомендуємо діяти за такою схемою.

- 1) Вибрати «зручну» змінну x , через яку потрібну величину виразити як $f(x)$.
- 2) Знайти найбільше або найменше значення цієї функції на деякому проміжку.
- 3) З'ясувати, який практичний зміст мають отримані результати.

Повернемося до задачі з басейном. Тепер є можливість зробити необхідний розрахунок. Нехай довжина сторони квадрата (дна басейну) дорівнює x ($x > 0$), тоді його висоту можна виразити як $\frac{V}{x^2}$, тобто $\frac{108}{x^2}$. Нехай площа, що нас цікавить, S . Тоді

$S = x^2 + \frac{4 \cdot 108x}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$. Розглянемо функцію $S(x) = x^2 + \frac{432}{x}$.

$S'(x) = 2x - \frac{432}{x^2}$. Знайдемо критичні точки функції: $2x - \frac{432}{x^2} = 0$; $x^3 = 216$; $x = 6$.

Отримана точка $x=6$ є точкою мінімуму, єдиною для $S(x)$. Таким чином, у ній і буде найменше значення функції $S(x)$. Отже, найменші розміри басейну такі: $x=6$ м — сторона квадратного дна, $\frac{108}{36}=3$ м — висота. *Відповідь:* 6 м; 3 м.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

а) $y = x^4 - 8x^2 + 3$ на проміжку $[-2; 2]$;

б) $y = x + \sqrt{x}$ на проміжку $[1; 4]$.

2. Розбийте число 18 на два невід'ємні доданки так, щоб добуток квадрата одного з них на другий був найбільшим.

Розв'язання. Нехай одне із чисел $x \geq 0$, тоді друге число $18 - x$. Тобто $x \in [0; 18]$. Розглянемо функцію $f(x) = x^2(18 - x)$: вона визначена і диференційована на проміжку $[0; 18]$. $f'(x) = 36x - 3x^2 = 3x(12 - x)$. Критичні точки: $x=0$ і $x=12$. Оскільки в точці $x=12$ функція має максимум, то при цьому значенні x буде найбільшим значенням заданої функції. $f(12) = 864$. Отже, шукані числа 12 і $18 - 12 = 6$. *Відповідь:* $18 = 12 + 6$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

- Що нового ви дізналися на уроці?
- Опишіть алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку.
- Чи можна знайти найбільше (найменше) значення квадратичної функції, не застосовуючи методи математичного аналізу?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 11	[3]: § 10, п. 4
С	№ 387 (а), 389	№ 171 (1, 3)
Д	№ 398 (1)	№ 171 (5, 6)
В	№ 400 (а)	№ 171 (9)

Індивідуально

Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sin^2 x$ на проміжку $[0; 2\pi]$.

ТЕМА. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ НА ПРОМІЖКУ.

Мета уроку: сформувати вміння учнів розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільшого і найменшого значень функції; розвивати вміння створювати математичну модель прикладної задачі; виховувати інтерес до математики.

Очікувані результати: учні повинні вміти розв'язувати нескладні прикладні задачі на знаходження найбільших значень реальних величин.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання учнів, що виникли у них під час виконання домашнього завдання, і пропонує виконати завдання, аналогічні домашнім.

Фронтальне опитування

1. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = x^2 + 3x$ на проміжку $[-2; 0]$.
2. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = x + \frac{1}{x}$ на проміжку $[1; 2]$.
3. Знайдіть найменше і найбільше значення функції $y = 1 + \cos x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Відповіді:

1. $\min_{[-2; 0]} y(x) = y(-2) = -14$; $\max_{[-2; 0]} y(x) = y(0) = 0$.
2. $\min_{[1; 2]} y(x) = y(1) = 2$; $\max_{[1; 2]} y(x) = y(2) = 2,5$.
3. $\min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$; $\max_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]} y(x) = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1,5$.



Якщо на розглядуваному проміжку функція зростає або спадає, то найбільше і найменше значення досягаються на кінцях проміжку.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Робота в парах

1. Число 25 запишіть у вигляді добутку двох додатних чисел, сума яких є найменшою.
2. Як треба зігнути дрiт завдовжки 24 м, щоб утворився прямокутник найбільшої площі?
3. Ділянку прямокутної форми площею 9 га огорожено забором. Якими мають бути розміри ділянки, щоб її периметр був найменшим?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Бесіда

Нерідко нам доводиться чути, що треба знайти оптимальне розв'язання тієї або іншої задачі. Частина задач, пов'язаних зі знаходженням найменшого або найбільшого значень функції, можна розв'язати за допомогою методів математичного аналізу. Сьогодні ми будемо розв'язувати задачі прикладного характеру, застосовуючи вже відомі вам методи, удосконалювати вміння й навички.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Тіло, кинуте вертикально вгору, рухається за законом $h(t) = 6t - t^2$ (h — у метрах, t — у секундах). У який момент часу тіло досягне найбільшої висоти і яке буде її значення в цей момент?

Розв'язання. Знайдемо найбільше значення функції $h(t) = 6t - t^2$ для $t > 0$. $h'(t) = 6 - 2t$; $-2t + 6 = 0$; $t = 3$ — критична точка. Оскільки $t = 3$ — точка максимуму і вона єдина для $t \in (0; +\infty)$, то при $t = 3$ функція $h(t)$ набуває найбільшого значення, яке дорівнює $h(3) = 6 \cdot 3 - 9 = 9$. *Відповідь:* 3 с; 9 м.

2. Якими мають бути сторони прямокутної ділянки, щоб її площа була найбільшою? Периметр ділянки 120 м.

Розв'язання. Нехай одна зі сторін прямокутника має довжину x м, тоді друга сторона $(60 - x)$ м. Площа S прямокутної ділянки $S = x(60 - x) = 60x - x^2$.

Розглянемо функцію $S(x) = 60x - x^2$ на проміжку $(0; 60)$ і знайдемо її найбільше значення. $S'(x) = 60 - 2x$. Знайдемо критичні точки функції: $60 - 2x = 0$; $2x = 60$; $x = 30$. Оскільки $x = 30$ — точка максимуму і вона єдина для $S(x)$, то при $x = 30$ і буде

найбільше значення функції $S(x)$. Отже, сторони прямокутної ділянки дорівнюють 30 м і 30 м. Тобто ділянка буде квадратом зі стороною 30 м. *Відповідь:* 30 м.

3. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Якими мають бути катети, щоб площа квадрата, побудованого на його гіпотенузі, була найменшою?

Розв'язання. Нехай один із катетів прямокутного трикутника має довжину x м, тоді другий катет $(12-x)$ м, а площа квадрата, побудованого на гіпотенузі цього трикутника, дорівнює квадрату гіпотенузи, тобто $S = x^2 + (12-x)^2 = 2x^2 - 24x + 144$.

Знайдемо найменше значення функції $S(x) = 2x^2 - 24x + 144$ на проміжку $(0; 12)$. $S'(x) = 4x - 24$. Оскільки критична точка $x = 6$ єдина і є точкою мінімуму, то в ній досягається найменше значення функції $S(x)$. Тобто площа квадрата буде найменшою, якщо катети трикутника мають довжину по 6 см. *Відповідь:* 6 см; 6 см.

4. Знайдіть додатне число, подвоєний куб якого перевищує потроєний квадрат цього числа на найменше значення.

Розв'язання. Нехай x — дане додатне число. Тоді розглянемо функцію $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ при $x \in (0; +\infty)$: вона визначена і диференційована на розглядуваному проміжку. Маємо: $f'(x) = 6x^2 - 6x$; $x^2 - x = 0$; $x = 0$ і $x = 1$ — критичні точки. Оскільки $0 \notin (0; +\infty)$, то $x = 1$ — єдина критична точка на проміжку $(0; +\infty)$ і в ній досягається мінімум. Отже, найменше значення функції $f(x)$ і буде при $x = 1$. *Відповідь:* 1.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Рефлексія

- Що, на ваш погляд, було найважливішим на уроці?
- Чи досягнуто мети уроку?
- Що для вас було найскладнішим?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]	[3]: § 10, п. 4
С	№ 394	№ 171 (2, 4)
Д	№ 404	№ 171 (7, 8)
В	№ 424	№ 173

Індивідуально

Знайти найкоротшу відстань від точки $A(2; 0)$ до графіка функції $y = \sqrt{x}$. (*Відповідь:* $\frac{\sqrt{7}}{2}$.)

ТЕМА. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал з теми «Похідна та її застосування»; підготувати учнів до контрольної роботи; розвивати вміння аналізувати й узагальнювати вивчений матеріал, навички спілкування в групі; виховувати самостійність, взаємоповагу.

Очікувані результати: учні повинні розуміти значення поняття похідної для опису реальних процесів; знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці, швидкість зміни величини в точці; диференціювати функції; застосовувати похідні для дослідження функцій на монотонність і екстремуми; знаходити найбільше і найменше значення функцій.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель об'єднує учнів у гетерогенні групи.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Перевірка домашнього завдання здійснюється консультантами груп, які в разі потреби звертаються до вчителя. У процесі обговорення домашнього завдання учні повторюють правила диференціювання, алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значень функції, знаходження критичних точок.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ☑ **Слово вчителя**

Сьогодні знання з теми «Похідна та її застосування» будуть узагальнені. Це дозволить вам краще побачити, які з питань теми вимагають більшої уваги й корекції. Слід підготуватися до контрольної роботи максимально ретельно!

IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

☑ **Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»**

1. Дайте визначення похідної.
2. Що таке похідна з геометричної точки зору?
3. Що таке похідна з механічної точки зору?
4. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .
5. Сформулюйте визначення критичних точок функції.

6. Сформулюйте достатню умову зростання (спадання) функції; сталості функції.
7. Дайте визначення точок екстремуму функції та її екстремумів.
8. Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
9. Сформулюйте достатню умову існування екстремуму в точці.
10. За яким алгоритмом розв'язується задача на знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку $[a; b]$?

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна запропонувати роботу за карткою або скористатися посібником [4], СР 10.

Робота в групах

Після закінчення часу, який визначає вчитель, представник кожної групи «захищає» біля дошки розв'язання одного із завдань.

Картка для роботи групи

1. Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 4x$ у точці $x_0 = -2$.
2. Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 0,2t^5 - 4t^2 + 6$ (s — у метрах, t — у секундах). Знайдіть швидкість руху точки в момент часу $t = 2$.
3. Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x$ на монотонність і екстремуми та побудуйте схематично її графік.
4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^5 - 5x^4 + 30$ на проміжку $[-2; 1]$.

Розв'язання до картки

1. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

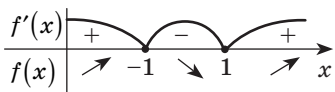
$$f'(x) = \frac{3}{6}x^2 + 4 = \frac{1}{2}x^2 + 4; \quad f'(-2) = \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 = 2 + 4 = 6;$$

$$f(-2) = \frac{1}{6}(-8) - 8 = -\frac{4}{3} - 8 = -9\frac{1}{3}; \quad y = 6(x + 2) - 9\frac{1}{3}; \quad y = 6x + 2\frac{2}{3}.$$

Відповідь: $y = 6x + 2\frac{2}{3}$.

2. Оскільки $v(t) = s'(t)$, то в цьому випадку $v(t) = t^4 - 8t$, а $v(2) = 16 - 16 = 0$. Відповідь: 0.

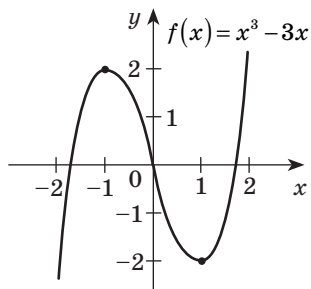
3. $f(x) = x^3 - 3x$; $D(f) = \mathbf{R}$; $f'(x) = 3x^2 - 3$;
 $D(f') = \mathbf{R}$; $3x^2 - 3 = 0$; $x^2 = 1$;
 $x = 1$, $x = -1$ — критичні точки.



$$x_{\max} = -1; y_{\max} = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2;$$

$$x_{\min} = 1; y_{\min} = 1^3 - 3 \cdot 1 = 1 - 3 = -2.$$

Будуємо графік функції (див. рисунок).



4. Функція $f(x) = x^5 - 5x^4 + 30$ визначена і диференційована на проміжку $[-2; 1]$.

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3; 5x^4 - 20x^3 = 0; 5x^3(x - 4) = 0; x = 0; x = 4.$$

$$4 \notin [-2; 1], 0 \in [-2; 1].$$

$$f(-2) = -32 - 5 \cdot 16 + 30 = -82; f(1) = 1 - 5 + 30 = 26; f(0) = 30;$$

$$-82 < 26 < 30. \min_{[-2; 1]} f(x) = f(-2) = -82; \max_{[-2; 1]} f(x) = f(0) = 30.$$

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

1. Чи подобається вам групова форма роботи?
2. Чи було досягнуто мети уроку?
3. На які завдання слід звернути більше уваги під час підготовки до контрольної роботи?
4. У чому причини труднощів на уроці? Як усунути виявлені прогалини у знаннях?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]	[3]
С		
Д	с. 77, СР № 2	с. 196–197, зразок КР № 3
В		

Індивідуально

Виконати домашню контрольну роботу.

1. (2 бали) Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, що проходить через точку $M(-1; 1)$, яка не належить даному графіку.
2. (4 бали) Дослідити функцію $y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ і побудувати її графік.
3. (1 бал) Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = t^4 + 3t$ (s — у метрах, t — у секундах). Визначити координати точки в момент, коли швидкість її руху дорівнює 7 м/с.
4. (2 бали) Подати число 12 у вигляді суми двох невід’ємних доданків так, щоб добуток куба одного з них на подвоєний другий був найбільшим.

УРОК № 26

ТЕМА. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Похідна та її застосування»; розвивати вміння мислити, застосовувати отримані знання у стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати самостійність, уміння самоорганізуватися.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати знання правил диференціювання, алгоритмів дослідження функції на монотонність і екстремуми, знаходження найбільшого і найменшого значень функції на проміжку, розуміння геометричного й фізичного змістів похідної.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель налаштовує учнів на написання контрольної роботи, звертає увагу на необхідність надання докладного пояснення завдань 7–9. В останньому завданні слід врахувати умову паралельності прямих.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна провести контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], КР 3 і КР 4.

Контрольна робота № 2

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

- Знайдіть похідну функції $y = -\sin x + \cos x$.
А $-\cos x - \sin x$ В $-\cos x + \sin x$
Б $\sin x + \cos x$ Г $\cos x - \sin x$
- Знайдіть похідну функції $y = \ln \cos x$.
А $-\operatorname{ctg} x$ Б $-\operatorname{tg} x$ В $\operatorname{ctg} x$ Г $\operatorname{tg} x$
- Тіло рухається за законом $s(t) = 3 + 3t^2$ (s — у метрах, t — у секундах). Обчисліть швидкість руху тіла в момент $t = 1$ с.
А 9 м/с Б 12 м/с В 6 м/с Г 18 м/с
- Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -2x^2 + 3x$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.
А -1 Б -7 В 1 Г 7
- Графік функції $y = f(x)$ заданий на проміжку $[-5; 2]$ (рис. 1). Користуючись графіком, укажіть проміжки, на яких $f'(x) < 0$.
А $(-5; -1)$ Б $(-1; 2)$ В $(-2; 3)$ Г $(0; 3)$
- Користуючись графіком функції $y = f(x)$ (рис. 2), укажіть найменше значення функції на проміжку $[-2; 5]$.
А -2 Б 5 В -3 Г -1

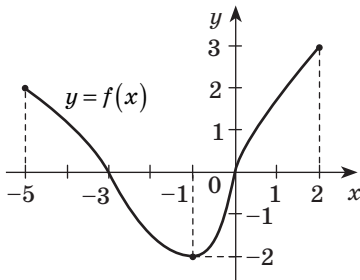


Рис. 1

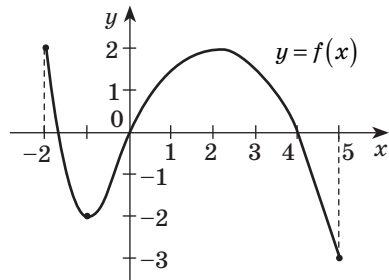


Рис. 2

Достатній рівень (3 бали)

7. Знайдіть точки екстремуму функції $y = x^4 - 2x^2$.
 8. Доведіть, що функція $f(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7$ на множині \mathbf{R} є спадною.

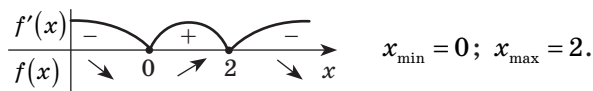
Високий рівень (3 бали)

9. На графіку функції $y = \frac{x-1}{x+1}$ знайдіть точки, у яких дотична паралельна прямій $y = 2x + 3$.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. А. 2. Б. 3. В. 4. А. 5. А. 6. В.

7. $y = 3x^2 - x^3$; $D(y) = \mathbf{R}$; $y' = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$; $D(y') = \mathbf{R}$; $6x - 3x^2 = 0$; $x = 0$, $x = 2$ — критичні точки.



8. $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 3x - 7$. $D(y) = \mathbf{R}$; $f'(x) = 10x^4 + 12x^2 + 3$. Оскільки при кожному $x \in \mathbf{R}$ $f'(x) > 0$, то $f(x)$ зростає на \mathbf{R} .

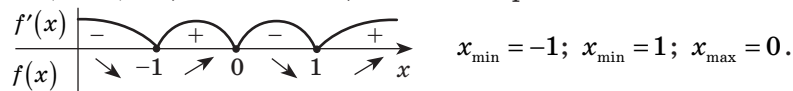
9. Оскільки прямі паралельні, якщо їхні кутові коефіцієнти рівні, то $y'(x_0) = 1$.

$$\text{Знайдемо } y': y'(x) = \frac{(x+2) - (x+1)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2}; y'(x_0) = 1; \frac{1}{(x_0+2)^2} = 1,$$

звідки $(x_0 + 2)^2 = 1$; $x_0 + 2 = 1$; $x_0 = -1$ або $x_0 + 2 = -1$; $x_0 = -3$. Отже, точками, у яких дотична паралельна прямій $y = x - 3$, будуть $(-1; 0)$ і $(-3; 2)$.

Варіант 2. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4. А. 5. А. 6. Г.

7. $y = x^4 - 2x^2$; $D(y) = \mathbf{R}$; $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $D(y') = \mathbf{R}$;
 $4x(x^2 - 1) = 0$; $x = 0$ і $x = 1$, $x = -1$ — критичні точки.



8. $f(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7$. $D(f) = \mathbf{R}$; $f'(x) = -2 - 3x^2 - 28x^6$. Оскільки при кожному $x \in \mathbf{R}$ $f'(x) < 0$, то $f(x)$ спадає на \mathbf{R} .

9. Оскільки прямі паралельні, якщо їхні кутові коефіцієнти рівні, то $y'(x_0) = 2$. Знайдемо $y': y'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$. $y'(x_0) = 2$;

$$\frac{2}{(x_0+1)^2} = 2; (x_0+1)^2 = 1; x_0+1 = 1; x_0 = 0 \text{ або } x_0+1 = -1; x_0 = -2. \text{Отже,}$$

точками, у яких дотична паралельна прямій $y = 2x + 3$, будуть $(0; -1)$ і $(-2; 3)$.

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Зібравши роботи, учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання роботи, й знайомить їх із відповідями, задалегідь підготовленими на дошці.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Повторити таблицю похідних елементарних функцій.
2. Підготувати коротке повідомлення про математиків, які внесли вклад у розвиток поняття похідної.

УРОК № 25*

ТЕМА. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ.

Мета уроку: систематизувати й узагальнити знання учнів з теми «Похідна та її застосування»; розвивати логічне мислення, культуру математичного мовлення й записів, уміння лаконічно висловлювати свою думку; стимулювати пізнавальну діяльність; сприяти формуванню системних знань; виховувати інтерес до предмета, уміння працювати в колективі, самостійно вибирати способи й методи роботи.

Очікувані результати: учні повинні розуміти значення поняття похідної для опису реальних процесів; знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці, швидкість зміни величини в точці; застосовувати похідну для знаходження проміжків монотонності й екстремумів функції.

Обладнання: підручник; портрети І. Ньютона, Г. Лейбніца, Ж. Лагранжа; папір; таблиця для підрахунку балів; картки із завданнями; сигнальна картка; призи.

Тип уроку: брейн-ринг (узагальнення й систематизація знань).

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пропонує учням об'єднатися в чотири команди і знайомить із правилами гри. У перших двох турах грають по дві команди, у третьому турі — переможці перших двох турів. У перших двох турах гра триває до того моменту, поки одна з команд не набере 3 бали, у третьому турі — 6 балів. Кожен із перших двох турів складається із трьох запитань, а третій тур — із 6 запитань.

За кожну правильну відповідь команда отримує 1 бал. Якщо жодна з команд правильно не відповіла, то за правильну відповідь на наступне запитання команда отримує 2 бали.

Підйом сигнальної картки означає готовність команди відповісти.

II. ГРА «БРЕЙН-РИНГ»

I тур

1. Які функції пропущено в таблиці? (Відповідь: $\cos x - x \sin x$; $-2 \sin x - x \cos x$)

$5x^4 - 3x$	$20x^3 - 3$	$60x^2$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$x \cos x$?	?

2. На рис. 1 зображено графік похідної функції $y = f'(x)$. Укажіть проміжки зростання функції. (Відповідь: $(-3; 3)$.)
3. На рис. 2 зображено графік функції $y = f(x)$ і дотична до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення $f'(x_0)$. (Відповідь: -1 .)

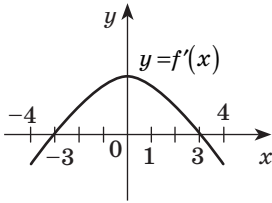


Рис. 1

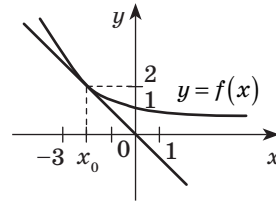


Рис. 2

II тур

1. У таблиці переплутано порядок запису в другому й третьому стовпчиках і відсутній запис у правому нижньому куті. Відновіть правильно заповнену таблицю.

$f(x) = 2x^3 - 3$	$f'(2)$	3
$f(x) = -5x^4 + 3x^3 - 7$	$f'(1)$	0
$f(x) = e^{3x}$	$f'(0)$	24
$f(x) = 2 \cos 4x$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$	

Правильно заповнена таблиця матиме такий вигляд:

$f(x) = 2x^3 - 3$	$f'(2)$	24
$f(x) = -5x^4 + 3x^3 - 7$	$f'(1)$	-11
$f(x) = e^{3x}$	$f'(0)$	3
$f(x) = 2 \cos 4x$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$	0

- На рис. 1 зображено графік похідної функції $y=f(x)$. Укажіть точки екстремуму функції. (Відповідь: $x_{\min} = -3$; $x_{\max} = 3$.)
- На рис. 3 зображено графік функції $y=f(x)$ і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0 . Знайдіть значення похідної в точці з абсцисою x_0 . (Відповідь: 1.)

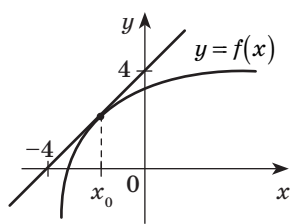


Рис. 3

III тур

- Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції, то чи обов'язково вона є критичною? (Відповідь: так.)
- У чому полягає достатня ознака спадання функції $y=f(x)$ на проміжку P ? (Відповідь: $f'(x) < 0$ для $x \in P$.)
- У чому полягає механічний зміст похідної? (Відповідь: $s'(t) = v(t)$.)
- Обчисліть $f'(1)$, якщо кут між дотичною, проведеною до графіка функції $y=f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$, і додатним напрямком осі Ox дорівнює 30° . (Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.)
- Обчисліть значення похідної функції $f(x) = 4x \ln x + 5$ при $x = e$. (Відповідь: 8.)
- Скільки точок екстремуму має функція $y=f(x)$, графік якої зображено на рис. 4? Укажіть мінімуми функції. (Відповідь: 3; -2 і -1 .)

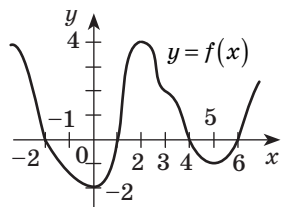


Рис. 4

III. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ ГРИ

Учитель підбиває підсумки гри, визначає команду-переможницю.

Примітка. Паузи між турами можна заповнити коротким повідомленням про математиків, які внесли вклад у розвиток поняття похідної.

Додатковий матеріал

Поняття похідної ввійшло в математику майже одночасно з поняттям функції, хоча внесок у її розвиток зробили П. Ферма, Г. В. Лейбніц, І. Ньютон та інші видатні вчені. П. Ферма показав, як розв'язувати екстремальні задачі, хоча й не ввів самого поняття похідної. Г. В. Лейбніц розглядав геометричний зміст похідної і майже одночасно з Ньютоном прийшов до поняття похідної. І. Ньютон раніше за Лейбніца увів поняття похідної, але роботи опублікував пізніше. До своїх відкриттів Лейбніц і Ньютон йшли незалежно один від одного. Ньютон виходив, в основному, із задач механіки, а Лейбніц — геометрії. Продовжив дослідження Ж. Л. Лагранж: він займався математичним аналізом, варіаційним обчисленням, теорією чисел. Саме Лагранж увів сучасне позначення похідної $f'(x)$.

ТЕМА 5. ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

УРОК № 27

ТЕМА. ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ.

Мета уроку: сформувати в учнів поняття первісної для функції та її основної властивості; ознайомити з таблицею первісних; розвивати увагу, пам'ять, культуру математичних записів, активність, інтерес до нових знань.

Очікувані результати: учні повинні знати визначення первісної для функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $(a; b)$; розуміти зміст операції інтегрування; знати загальний вигляд первісних для функції $y = f(x)$ та його геометричний зміст.

Основні поняття: інтегрування, первісна.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Учитель наводить статистичні результати контрольної роботи, аналізує типові помилки, яких припустилися учні під час її написання, і відповідає на запитання учнів.

III. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Назвіть функцію, похідна якої дорівнює:

а) x^2 ; б) $-\sin x$; в) $\frac{1}{x}$; г) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. Назвіть дві функції, похідні яких дорівнюють:

а) $\frac{1}{\cos^2 x}$; б) e^x ; в) $\cos x$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Бесіда

Кожна математична дія, що вивчалася в шкільному курсі математики, має обернену дію. Яка дія обернена до додавання; віднімання; ділення; множення; піднесення до степеня; логарифмування?

Яка операція буде оберненою до операції диференціювання функції? Чи можна, знаючи миттєву швидкість руху $v(t)$ точки, визначити пройдений нею шлях $s(t)$?

Сьогодні ви ознайомитеся з операцією, яка дозволяє, знаючи похідну функції, знайти функцію.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

1. Первісна для функції.

Первісною для даної функції $f(x)$ на заданому проміжку називається така функція $F(x)$, похідна якої дорівнює $f(x)$ для всіх x із цього проміжку, тобто $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$ є первісною для функції $f(x) = x^2$,

оскільки $F'(x) = \frac{3x^2}{3} = x^2$. Для функції $f(x) = x^2$ первісними будуть

функції $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2$ та $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2,3$, а також $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$, де C — стала величина.

Функція $F(x) = -\cos x + C$ є первісною для функції $f(x) = \sin x$, оскільки $F'(x) = \sin x = f(x)$.

Як бачимо, первісна визначається за заданою функцією неоднозначно. Якщо $F(x)$ — деяка первісна для функції $f(x)$, то $F(x) + C$, де C — довільна стала, також є первісною для вихідної функції.

2. Основна властивість первісних.

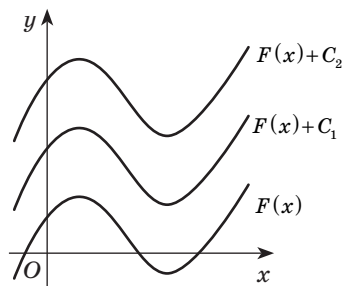
Будь-яка первісна для функції $f(x)$ на проміжку P може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$ на проміжку P , а C — довільна стала. $F(x) + C$ — загальний вигляд первісних для функції $f(x)$ на проміжку P .

3. Геометрична інтерпретація основної властивості первісних.

Графіки будь-яких двох первісних для функції $f(x)$ отримують один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy (див. рисунок).



Для даної функції $f(x)$ існує ціле сімейство первісних $F(x) + C$.



Для стислості в разі знаходження первісної функції $f(x)$ проміжок, на якому задана $f(x)$, зазвичай не вказують. На увазі маються проміжки якомога більшої довжини. Зокрема, якщо $f(x)$ визначено на множині \mathbf{R} і проміжок не вказаний, то мається на увазі, що $F(x)$ також розглядається на множині \mathbf{R} .

Знаходження первісної називається **операцією інтегрування**.

Користуючись таблицею похідних, можна скласти таблицю первісних для функцій, похідні яких відомі. Щоб обґрунтувати цю таблицю, треба диференціювати функції, які стоять у правій колонці.

Таблиця первісних

Функція	Загальний вигляд первісних
0	C
k (k — стала)	$kx + C$
x^n ($n \neq -1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Доведіть, що функція F є первісною для функції f .

а) $F(x) = \cos^2 x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in \mathbf{R}$;

б) $F(x) = 6 - \operatorname{ctg} 3x$, $f(x) = \frac{3}{\sin^2 3x}$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

2. Чи є функція $F(x) = 6 - \frac{1}{x^3}$ первісною для функції $f(x) = \frac{3}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$?
3. Доведіть, що функції $F_1(x)$ і $F_2(x)$ належать одному сімейству первісних, якщо $F_1(x) = (x-3)^2$, $F_2(x) = x^2 - 6x + 11$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування

- Сформулюйте визначення первісної функції $F(x)$ на заданому проміжку $(a; b)$.
- Сформулюйте основну властивість первісних.
- Що називають операцією інтегрування?
- Який загальний вигляд має первісна для функції $y = f(x)$? Який його геометричний зміст?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 13	[3]: § 9, п. 1
С	№ 445	с. 211, № 2–4, № 175
Д	№ 457	с. 211, № 5, 7; № 177
В	№ 466 (а)	с. 211, № 8, 9; № 182

Індивідуально

Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну, графік якої проходить через точку $K\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$.

УРОК № 28

ТЕМА. ПРАВИЛА ЗНАХОДЖЕННЯ ПЕРВІСНИХ.

Мета уроку: сформувати знання учнів про правила знаходження первісних; сформувати вміння знаходити первісні даних функцій, використовуючи правила знаходження первісних і таблицю первісних; розвивати пам'ять, математичну грамотність; виховувати самостійність, уміння розраховувати час.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити первісні за допомогою таблиці первісних і правил знаходження первісних; виділяти первісну, яка задовольняє задану умову.

Основні поняття: правила знаходження первісних.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Домашнє завдання перевіряється шляхом коментування з місця.

☑ Бліцопитування

1. Як довести, що функція $F(x) = 3x - \frac{4}{x}$ є первісною для функції $f(x) = 3 + \frac{4}{x^2}$, якщо $x \in (-\infty; 0)$?
2. Чи буде функція $F(x) = 3x - \frac{4}{x} + 0,2$ первісною для функції $f(x) = 3 + \frac{4}{x^2}$ на проміжку $(-\infty; 0)$? Відповідь обґрунтуйте.
3. Чому функція $F(x) = \frac{5}{x^2} - 8$ не є первісною для функції $f(x) = -\frac{10}{x^3}$ на проміжках $(-5; 5)$ і $(-\infty; 0]$?
4. Чи належить точка $M\left(-\frac{\pi}{3}; 1\right)$ графіку первісної функції $f(x) = \sin x$, якщо графік проходить через точку $K\left(\frac{\pi}{3}; 1\right)$?

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

☑ Математичний диктант

Запишіть первісну для функції:

- | | | | |
|----------------------|------------------------------|----------------------------|---------------------|
| а) x^9 ; | г) $\sqrt[7]{x}$; | ж) e^x ; | к) $-\sin x$; |
| б) $\frac{1}{x}$; | д) $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$; | з) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; | л) $\cos x$; |
| в) $\frac{1}{x^5}$; | е) 2^x ; | і) $-\frac{1}{\cos^2 x}$; | м) $x\sqrt[3]{x}$. |

Учні здійснюють взаємоперевірку за відповідями, підготовленими заздалегідь на відкидній дошці.

Відповідь: а) $\frac{x^{10}}{10} + C$; б) $\ln|x| + C$; в) $\frac{-1}{4x^4} + C$; г) $\frac{7}{8}x\sqrt[7]{x} + C$;

д) $\frac{5}{4}\sqrt[5]{x^4} + C$; е) $\frac{2^x}{\ln 2} + C$; ж) $e^x + C$; з) $\operatorname{ctg} x + C$; і) $-\operatorname{tg} x + C$; к) $\cos x + C$;

л) $\sin x + C$; м) $\frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Щоб працювати з будь-яким механізмом, приладом, правильно користуватися якоюсь складною річчю, потрібні інструкції, тобто правила, дотримуючись яких, отримуємо певний результат. Так само і в математиці. Сьогодні ви отримаєте інструкцію щодо знаходження первісних, а саме, три правила знаходження первісних.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учні працюють самостійно, консультуючи одне одного в парах, розглядають три правила знаходження первісних і обґрунтування цих правил за допомогою вже відомих правил знаходження похідних. Потім три пари учнів, вибраних учителем, переказують прочитане біля дошки, а решта записують правила в зошити.

Правила знаходження первісних

1. Якщо $F(x)$ і $G(x)$ є первісними для функцій $f(x)$ і $g(x)$ на деякому проміжку, то $F(x) \pm G(x)$ є первісною для функції $f(x) \pm g(x)$.

Наприклад, загальний вигляд первісної для функції $f(x) = x - \sin x$ — функція $F(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

2. Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а k — стала, то $kF(x)$ — первісна для функції $kf(x)$.

Наприклад, первісними для функції $f(x) = -2e^x + 3\cos x - 4x^3$ є функції вигляду $F(x) = -2e^x + 3\sin x - x^4 + C$.

3. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$, а k і b — сталі (числа), причому $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.

Наприклад, первісними для функції $f(x) = (5-2x)^6$ є функції вигляду $F(x) = -\frac{1}{2} \frac{(5-2x)^7}{7} + C = -\frac{(5-2x)^7}{14} + C$.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

а) $f(x) = 3x^8 - 9x^2$; д) $f(x) = \frac{10}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2 x}$;

б) $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{3}{x^5}$; е) $f(x) = e^x - 10^x$;

в) $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[5]{x}$; ж) $f(x) = 2\sin 3x - \frac{10}{\cos^2 3x}$;

г) $f(x) = 7\sqrt[6]{x} + \frac{2}{x\sqrt{x}}$; з) $f(x) = e^{4x} + \pi^{-3x+2}$.

Відповідь: а) $F(x) = \frac{x^9}{3} - 3x^3 + C$; б) $F(x) = 4\ln|x| - \frac{3}{4x^4} + C$;

в) $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 5x\sqrt[5]{x} + C$; г) $F(x) = 6x\sqrt[6]{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C$;

д) $F(x) = 10\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x + C$; е) $F(x) = e^x - \frac{10^x}{\ln 10} + C$;

ж) $F(x) = -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{10}{3}\operatorname{tg} 3x + C$; з) $F(x) = \frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{3}\frac{\pi^{-3x+2}}{\ln \pi} + C$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- Сформулюйте правила знаходження первісних.
- Швидкість руху точки задано рівнянням $v(t) = 2\sin t$. Як знайти рівняння руху цієї точки, якщо в момент часу $t=0$ вона перебувала на відстані 10 м від початкового положення?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 13	[3]: § 9
С	№ 451	№ 178 (1–4), 184 (5)
Д	№ 462	№ 178 (5), 184 (6)
В	№ 466 (б)	№ 181, 183 (13)

Індивідуально

Знайти первісну для функції $f(x) = 4e^{3x} - 8 \cdot 0,3^x + 5$.

ТЕМА. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ.

Мета уроку: ознайомити учнів із задачами, що приводять до поняття інтеграла, зокрема, із задачею про площу криволінійної трапеції; формувати поняття інтеграла; розвивати абстрактне мислення, пам'ять, увагу; виховувати акуратність, працьовитість, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні розуміти, що таке інтеграл, криволінійна трапеція; уміти знаходити площу криволінійної трапеції.

Основні поняття: криволінійна трапеція, інтеграл.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

На цьому етапі роботи можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 11.

Самостійна робота

Позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

Варіант 1

Варіант 2

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

$$f(x) = 5x + 2$$

$$f(x) = -3x + 6$$

- | | | | |
|-------------------|---------------------|--------------------|----------------------|
| А $5x + C$ | В $2,5x^2 + 2x + C$ | А $-3x + C$ | В $-1,5x^2 + 6x$ |
| Б $5x^2 + 2x + C$ | Г $2,5x^2 + 2x$ | Б $-3x^2 + 6x + C$ | Г $-1,5x^2 + 6x + C$ |

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

$$f(x) = \sin 2x$$

$$f(x) = \cos 2x$$

- | | | | |
|------------------------------|-----------------------------|------------------------------|----------------------------|
| А $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$ | В $-\cos 2x + C$ | А $-\frac{1}{2} \sin 2x + C$ | В $\sin 2x + C$ |
| Б $\frac{1}{2} \cos 2x + C$ | Г $-\frac{1}{2} \cos x + C$ | Б $\frac{1}{2} \sin 2x + C$ | Г $\frac{1}{2} \sin x + C$ |

Варіант 1

Варіант 2

3. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

$$f(x) = e^{3x}$$

$$f(x) = e^{-2x}$$

А $e^{3x} + C$

В $\frac{1}{3}e^x + C$

А $e^{-2x} + C$

В $-\frac{1}{2}e^{-2x} + C$

Б $3e^{3x} + C$

Г $\frac{1}{3}e^{3x} + C$

Б $-2e^{-2x} + C$

Г $-\frac{1}{2}e^{-x} + C$

4. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

$$f(x) = \frac{1}{6x+4}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-3}$$

А $\ln(6x+4) + C$

А $\frac{1}{2}\ln|2x-3| + C$

Б $\frac{1}{6}\ln|6x+4| + C$

Б $-\frac{1}{3}\ln|2x-3| + C$

В $6\ln|6x+4| + C$

В $2\ln|2x-3| + C$

Г $\ln|6x+4| + C$

Г $\ln|2x-3| + C$

5. Для функції $f(x) = 3x^2$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(0; 1)$.

А $x^3 - 1$

В $3x^3 - 1$

Б $x^3 + 1$

Г $3x^3 + 1$

5. Для функції $f(x) = 4x^3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(1; 0)$.

А $x^4 - 1$

В x^4

Б $x^4 + 1$

Г $4x^4 + 1$

6. Для функції $f(x) = \frac{1}{x^2}$ знайдіть первісну $F(x)$, якщо

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = -6.$$

А $-\frac{1}{x} - 2$

В $-\frac{1}{x} - 4$

Б $-\frac{1}{x} + 2$

Г $-\frac{1}{x} + 4$

6. Для функції $f(x) = \frac{1}{x^3}$ знайдіть первісну $F(x)$, якщо

$$F\left(-\frac{1}{2}\right) = 2.$$

А $-\frac{1}{2x^2} - 4$

В $-\frac{1}{2x^2} + 4$

Б $\frac{1}{2x^2} + 4$

Г $\frac{-1}{x^2} + 4$

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. В. 2. А. 3. Г. 4. Б. 5. Б. 6. В.

Варіант 2. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. А. 5. А. 6. В.

Учні самостійно перевіряють правильність виконання тестів за відповідями, які заздалегідь підготовлені на дошці.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Створення проблемної ситуації

Знайдемо площі заштрихованих фігур у кожному з випадків (рис. 1, а–д).

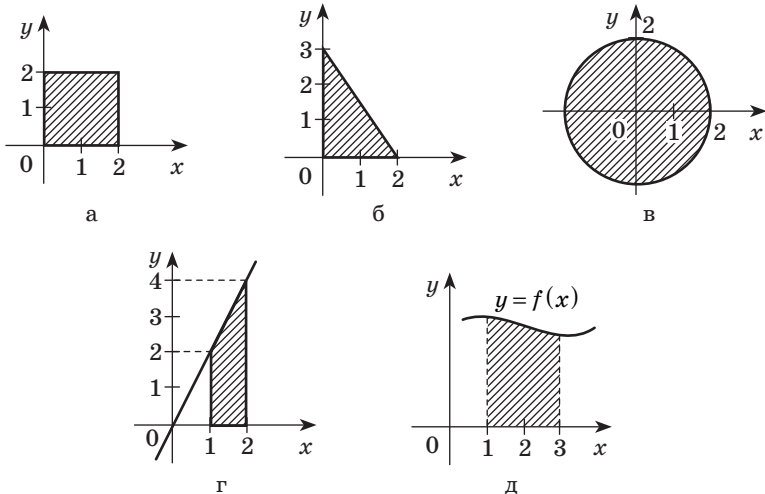


Рис. 1

Як бачимо, знань недостатньо, щоб знайти площу останньої фігури. Та й із такою геометричною фігурою ви ще не знайомі. Сьогодні ви з нею ознайомитеся, дізнаєтесь, як можна знаходити її площу. Більше того, ця фігура приведе вас до нового математичного поняття.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

1. Криволінійна трапеція.

Криволінійною трапецією називається фігура, обмежена графіком безперервної функції $y=f(x)$, що не змінює знак на проміжку $[a; b]$, прямими $x=a$ і $x=b$ і проміжком $[a; b]$ (рис. 2).

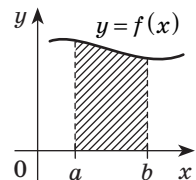



Рис. 2

Справедливою є така теорема: площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком безперервної й невід'ємної на проміжку $[a; b]$ функції $f(x)$, дорівнює $F(b)-F(a)$, де $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

 Значення виразу $F(b)-F(a)$ записують і так: $F(x) \Big|_a^b$.

Приклад. Знайти площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = 3x^2$, $x = 1$, $x = 4$ і $y = 0$.

Розв'язання. Оскільки для функції $y = 3x^2$ функція $F(x) = x^3$ є первісною, то шукана площа $S = x^3 \Big|_1^4 = 4^3 - 1^3 = 64 - 1 = 63$. Відповідь: 63.

2. Визначений інтеграл.

Нехай функція $f(x)$ безперервна на проміжку $[a; b]$ (рис. 3). Розіб'ємо $[a; b]$ на n відрізків: x_1, x_2, \dots, x_{n-1} — точки ділення. Нехай $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots$ — довжини цих відрізків. Нехай $C_k \in [x_{k-1}; x_k]$, де $k = 1, 2, \dots, n$. $x_0 = a$; $x_n = b$.

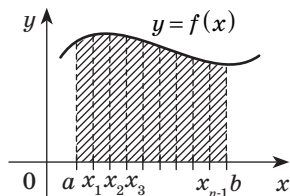


Рис. 3

Розглянемо суму $S_n = f(C_1) \cdot \Delta x_1 + f(C_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(C_n) \cdot \Delta x_n$. Суму S_n називають інтегральною сумою функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x) dx$. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$.

Числа a і b називають межами інтегрування, a — нижня межа, b — верхня межа; $f(x)$ — підінтегральна функція; змінна x — змінна інтегрування; $f(x) dx$ — підінтегральний вираз.

Таким чином, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Цей вираз називається формулою Ньютона — Лейбніца і є основною формулою математичного аналізу, яка дозволяє розв'язувати низку задач на обчислення меж інтегральних сум за допомогою первісної.

3. Властивості визначеного інтеграла.

Із властивостей первісної та формули Ньютона — Лейбніца випливає:

$$1) \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx;$$

$$2) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, k \in \mathbf{R};$$

$$3) \text{ якщо } c \in [a; b], \text{ то } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

$$4) \int_a^b f(kx + p) dx = \frac{1}{k} \int_{ka+p}^{kb+p} f(x) dx, p \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{R}.$$

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Обчисліть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

а) графіком функції $f(x) = x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = -1$;

б) графіком функції $f(x) = \cos x$ і прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$.

Розв'язання

а) Однією з первісних для функції $f(x) = x^2$ є функція $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\text{Тоді шукана площа: } S = F(-1) - F(-2) = -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} = \frac{7}{3};$$

б) однією з первісних для функції $f(x) = \cos x$ є функція $F(x) = \sin x$. Тоді шукана площа:

$$S = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{6} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = 1\frac{1}{2}.$$

Відповідь: а) $\frac{7}{3}$; б) $1\frac{1}{2}$.

2. Обчисліть:

$$\text{а) } \int_{-1}^3 (x+2) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 2x\right) \Big|_{-1}^3 = \left(\frac{9}{2} + 6\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 10\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 12;$$

$$\text{б) } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -2 \cos \frac{\pi}{2} - \left(-2 \cos \frac{\pi}{4}\right) = 0 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

- Що називають криволінійною трапецією?
- Як визначити площу криволінійної трапеції?
- Сформулюйте властивості визначеного інтеграла.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 14, 15	[3]: § 10, п. 1
С	№ 489, 513 (а)	с. 226, № 1–5; № 195 (1, 3, 5)
Д	№ 497 (а), 517 (а)	с. 227, № 7, 10; № 195 (6–9)
В	№ 532	№ 200 (12)

Індивідуально

Обчислити: $\int_0^{\frac{\pi}{24}} \operatorname{tg}^2 4x dx$. (Відповідь: $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{24}$.)

☑ Додатковий матеріал

Історія виникнення понять інтеграла й інтегрального обчислення пов'язана з потребою обчислювати площі будь-яких фігур і поверхонь та об'єми довільних тіл і сягає глибокої давнини. Ідеї, що стосуються інтегрального обчислення, зустрічаються в роботах давньогрецьких учених Евдокса Кнідського (бл. 408–355 до н. е.) і Архімеда (бл. 287–212 до н. е.). Математики XVII ст. вчилися на працях Архімеда. Німецький астроном Й. Кеплер використовував методи, схожі на методи Архімеда. Італійський математик Б. Кавальєрі пішов ще далі: подавши кожну фігуру як таку, що складена з «неподільних» плоскою фігурою відрізків, а тіло — із плоских фігур, він сформулював свої принципи, які вважав очевидними і приймав без доказів. Символ \int увів Г. Лейбніц, цей знак — змінена латинська буква S (summa). Саме слово «інтеграл» увів швейцарець Я. Бернуллі (1690 р.). Назва «первісна для функції», що застосовується зараз, замінила більш ранню назву «примітивна функція», яку ввів Ж. Лагранж (1797 р.). Позначення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ увів К. Фур'є.

У XVII ст. інтегрального обчислення практично ще не було. Зв'язок між операціями диференціювання й інтегрування, узагальнення ідей, на яких ґрунтується розв'язання багатьох задач, було здійснено І. Ньютоном і Г. Лейбніцем, які незалежно один від одного відкрили вираз, відомий зараз як формула Ньютона — Лейбніца.

Методи інтегрального обчислення активно розвивав Л. Ейлер. Великий внесок було зроблено російськими математиками XIX ст. М. В. Остроградським, В. Я. Буняковським і П. Л. Чебишевим.

У XX ст. було зроблено строгий виклад теорії інтегралів у роботах математиків О. Коші, Б. Рімана, Г. Дарбу.

Відповіді на чимало питань, пов'язаних з існуванням площі і об'ємів фігур, були отримані зі створенням теорії міри французьким математиком К. Жорданом.

УРОК № 30

ТЕМА. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ.

Мета уроку: сформувати в учнів уміння обчислювати інтеграл за допомогою первісної та її властивостей; знаходити площі криволінійних трапецій; розвивати обчислювальні навички, пам'ять, культуру математичного мовлення й записів; виховувати акуратність, наполегливість, інтерес до пізнання нового.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати інтеграли за допомогою таблиці первісних, знаходити площі криволінійних трапецій.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Один з учнів записує на дошці розв'язання завдання високого рівня складності, завдання середнього і достатнього рівнів коментуються з місця.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

☑ Бліцпитання

1. Які із заштрихованих фігур (рис. 1, а-г) є криволінійними трапеціями? (Відповідь: а і г.)

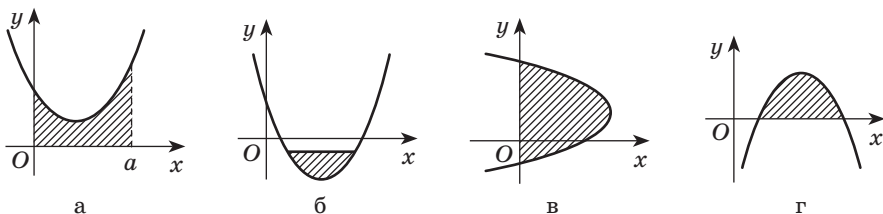


Рис. 1

2. Площа якої фігури виражається інтегралами: а) $\int_0^2 x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$?

Виконайте схематичний рисунок. (Відповідь: рис. 2, а, б.)

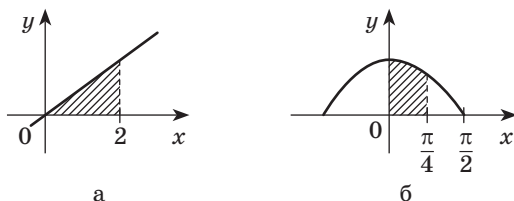


Рис. 2

3. Запишіть за допомогою інтеграла площі фігур, зображених на рис. 3, а, б. (Відповідь: а) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx$; б) $\int_0^3 e^x dx$.)

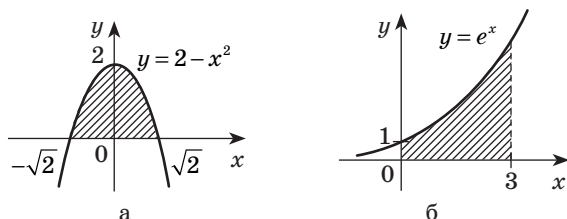


Рис. 3

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Сьогодні на уроці ви навчитеся застосовувати формулу Ньютона — Лейбніца для знаходження площ криволінійних трапецій, утворених графіками різних функцій. Ми отримуємо відповідь на запитання, чи обов'язково виконувати побудову графіків або ж можна обійтися без них.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в парах

Учні працюють із подальшою перевіркою розв'язань біля дошки.

1. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

а) $f(x) = x^2 + 5$, $x = -2$, $x = 0$, $y = 0$;

б) $f(x) = 1 + 2\sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$;

в) $f(x) = (x + 2)^4$, $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$.

2. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 9 - x^2$ і віссю Ox . (Відповідь: 36.)

3. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. (Відповідь: $\ln 2$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Рефлексія

Закінчіть речення.

1. Мені сподобалося сьогодні працювати в парі, оскільки...
2. Без допомоги партнера я міг би розв'язати...
3. Найпростішим для мене було завдання...
4. Найскладнішим виявилось завдання...
5. Під час підготовки до наступного уроку мені слід звернути увагу на...

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 15	[3]
С	№ 520	
Д	№ 530 (а, б)	
В	№ 536	

Індивідуально

Обчислити: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{8}} \cos 5x \cdot \cos 3x dx$.

ТЕМА. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, ЙОГО ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ.

Мета уроку: удосконалити навички учнів обчислювати визначений інтеграл і знаходити площі криволінійних трапецій; провести діагностику знань і вмінь учнів з даної теми; розвивати обчислювальні навички, уміння лаконічно й чітко формулювати думку; виховувати самостійність, толерантність, уміння працювати в групі.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати інтеграли за допомогою таблиці первісних і правил інтегрування; знаходити площі криволінійних трапецій.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Інтерактивна гра «Хто швидше»

Учні об'єднуються для роботи в гетерогенні групи. Учитель пропонує групам картку із завданням і дає на обмірковування відповіді 30 с. Група, яка першою дасть правильну відповідь, одержує 1 бал.

Картка для роботи групи

1. Обчисліть інтеграл:

а) $\int_0^1 x dx$; б) $\int_0^2 x^2 dx$; в) $\int_1^e \frac{2}{x} dx$; г) $\int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx$.

2. Відомо, що $\int_a^b f(x) dx = -5$. Знайдіть $\int_b^a f(x) dx$.

3. Відомо, що $\int_a^c f(x) dx = 7$, $\int_c^b f(x) dx = 3$. Знайдіть $\int_a^b f(x) dx$.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Важливо не просто вивчити формулу, але й навчитися правильно застосовувати її.

Важливо не тільки знати й уміти, а й демонструвати свої знання й уміння в потрібний момент із найкращого боку. Сьогодні вам випаде така можливість.

IV. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Завершивши роботу над картою, учні демонструють розв'язання біля дошки.

Картка для роботи групи

- Обчисліть інтеграл: а) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{\pi}{3} - 3x \right) dx$; б) $\int_{-2}^0 \frac{dx}{3x-2}$.
- Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$.
- Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Відповідь: 1. а) $-\frac{4\pi^2}{9}$; б) $-\frac{1}{3} \ln 4$. 2. $1\frac{1}{2}$. 3. $14\frac{2}{3}$.

V. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 12.

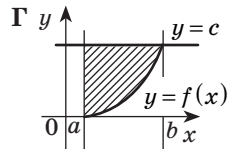
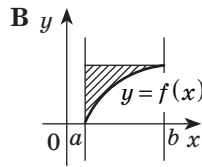
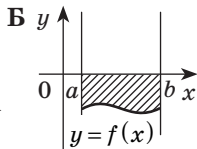
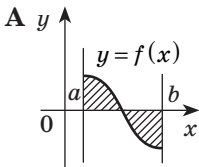
Самостійна робота

Варіант 1

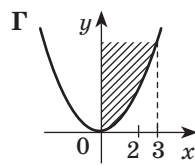
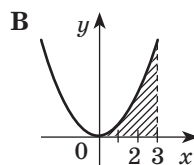
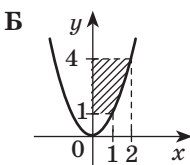
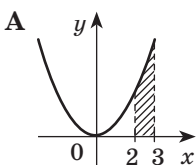
Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

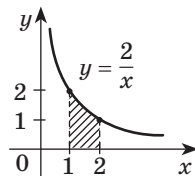
- Які із заштрихованих фігур, зображених на рисунках, є криволінійними трапеціями?



- Виберіть криволінійну трапецію, обмежену графіками функцій $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.



3. Укажіть вираз для знаходження площі фігури, зображеної на рисунку, за допомогою інтеграла.



А $\int_{-2}^{-1} -\frac{2}{x} dx$ Б $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x} dx$ В $\int_1^2 \frac{2}{x} dx$ Г $\int_{-2}^{-0.5} \frac{2}{x} dx$

Достатній рівень (3 бали)

4. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{4x+5}}$.

Високий рівень (3 бали)

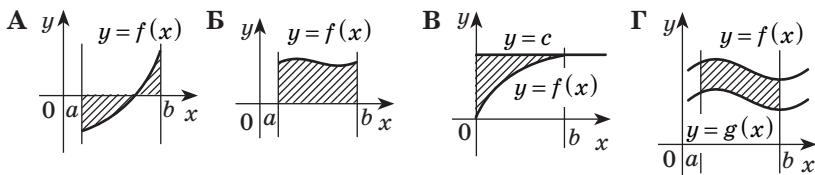
5. Обчисліть інтеграл $\int_{-4\pi}^0 2\cos^2 \frac{x}{8} dx$.

Варіант 2

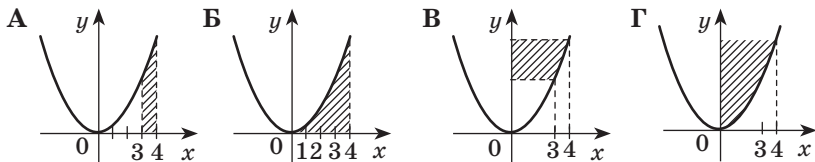
Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

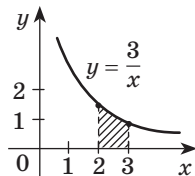
1. Які із заштрихованих фігур, зображених на рисунках, є криволінійними трапеціями?



2. Виберіть криволінійну трапецію, обмежену графіками функцій $y = x^2$, $y = 0$, $x = 3$, $x = 4$.



3. Укажіть вираз для знаходження площі фігури, зображеної на рисунку, за допомогою інтеграла.



А $\int_{-3}^{-2} -\frac{3}{x} dx$ Б $\int_{-3}^{-2} \frac{3}{x} dx$ В $\int_2^3 -\frac{3}{x} dx$ Г $\int_2^3 \frac{3}{x} dx$

Достатній рівень (3 бали)

4. Обчисліть інтеграл $\int_0^6 \frac{dx}{\sqrt{4-\frac{x}{2}}}$.

Високий рівень (3 бали)

5. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2 2x$.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. 1. 5. 4π .

Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. 4. 5. $\frac{\pi}{4}$.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання самостійної роботи, знайомить з правильними відповідями.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 15	[3]: § 10
С	№ 523 (а, б)	№ 195 (2, 4), 200 (1, 3, 5)
Д	№ 528	№ 200 (7–10)
В	№ 535	№ 200 (13)

Індивідуально

Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$.

УРОК № 32

ТЕМА. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР.

Мета уроку: формувати в учнів вміння застосовувати інтеграл до знаходження площ плоских фігур; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, математичну грамотність; виховувати акуратність, наполегливість, інтерес до вивчення математики.

Очікувані результати: учні повинні виконувати нескладні завдання на обчислення площ плоских фігур.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

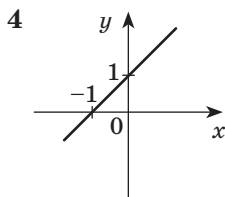
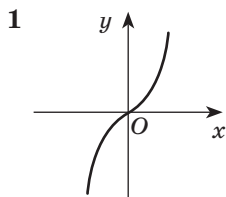
II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за записами, заздалегідь підготовленими вчителем на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Самостійна робота

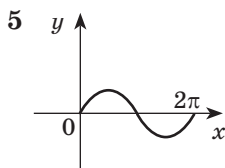
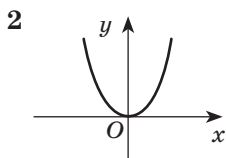
1. Установіть відповідність між графіком і функцією.



А $y = \frac{1}{x}$

Б $y = x + 1$

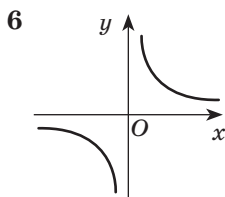
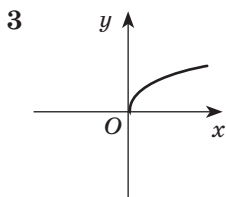
В $y = \frac{1}{x^2}$



Г $y = x^2$

Д $y = \sqrt{x}$

Е $y = x^3$



Ж $y = \sin x$

2. Запишіть у вигляді суми або різниці площ криволінійних трапецій площу заштрихованих фігур (рис. 1, а-в).

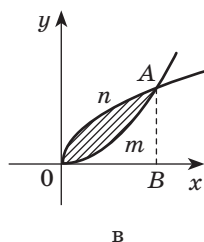
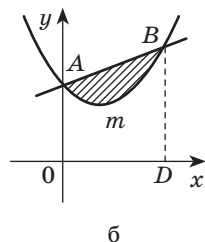
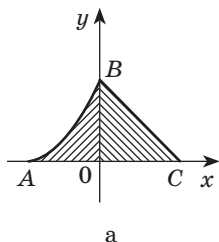


Рис. 1

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

На практиці часто доводиться обчислювати площі фігур, які не є криволінійними трапеціями. Як це зробити, застосовуючи вже отримані знання про площу криволінійної трапеції? Сьогодні ви навчитесь обчислювати площі таких плоских фігур.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Розглянемо фігуру, обмежену графіками функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$. Можливі різні випадки розміщення графіків.

1) Якщо $f_2(x) > f_1(x)$ і $f_2(x) > 0$, $f_1(x) > 0$, то

$$S = S_{ABCD} - S_{AKMD} = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (\text{рис. 2}).$$

2) Якщо $f(x) < 0$, то $S = -\int_a^b f(x) dx$ (рис. 3).

3) Якщо $f_2(x) > f_1(x)$ і $f_1(x) < 0$; $f_2(x) < 0$, то

$$S = -\int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (\text{рис. 4}).$$

4) Якщо $f_2(x) > f_1(x)$ і $f_2(x) > 0$, $f_1(x) < 0$, то

$$S = \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx \quad (\text{рис. 5}).$$

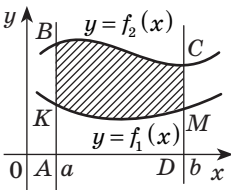


Рис. 2

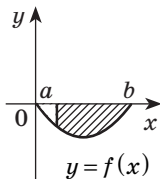


Рис. 3

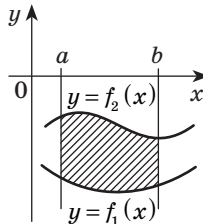


Рис. 4

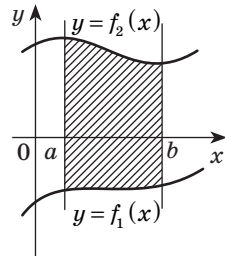


Рис. 5

Отже, площа фігури, обмеженої кривими $y=f_2(x)$, $y=f_1(x)$, де $f_2(x) > f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, і прямими $x=a$, $x=b$, обчислюється за формулою $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$.

У випадку якщо ліва межа $x=a$ або права межа $x=b$ вироджується в точку перетину кривих $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, то величини a і b визначаються як абсциси точок перетину цих кривих (рис. 6).

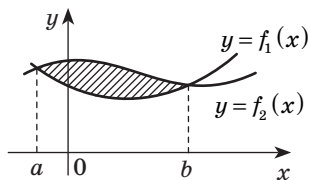


Рис. 6

Приклад 1. Обчислити, попередньо виконавши рисунок, площу фігури, обмеженої лініями $y=2-x^3$, $y=1$, $x=-1$, $x=1$.

Розв'язання. Виконаємо рис. 7. Тоді

$$S = \int_{-1}^1 (2-x^3-1) dx = \int_{-1}^1 (1-x^3) dx = \left(x - \frac{x^4}{4}\right) \Big|_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \left(-1 - \frac{1}{4}\right) = 2.$$

Відповідь: 2.

Приклад 2. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2$ і прямою $y=2x$.

Розв'язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіків заданих функцій, розв'язавши рівняння: $x^2 = 2x$; $x^2 - 2x = 0$; $x(x-2) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.

Виконаємо рис. 8. Тоді

$$S = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - 0 = 4 - 2\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $1\frac{1}{3}$.

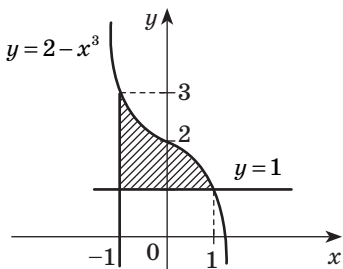


Рис. 7

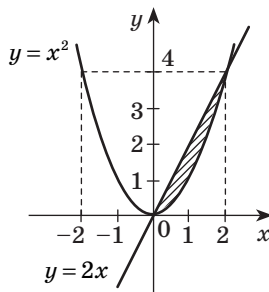


Рис. 8

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 4$ і $y = 4 - x$.

(Відповідь: $\frac{1}{6}$.)

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$ і $y = x$.

(Відповідь: $\frac{1}{6}$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

Укажіть формулу, за допомогою якої можна обчислити площу фігури (рис. 9, а-в).

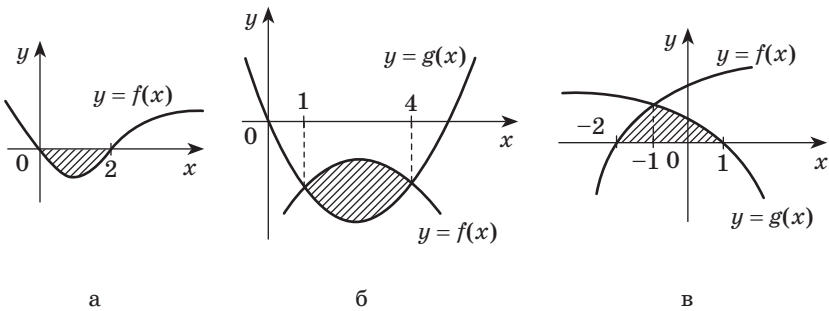


Рис. 9

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 15	[3]: § 10, 11
С	№ 523 (в, г)	№ 197 (2, 4–6), 206 (1)
Д	№ 530	№ 207 (1, 3)
В	№ 537	№ 208

Індивідуально

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = -x^2 + 6x - 2$,
 $y = x^2 - 2x + 4$.

ТЕМА. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПЛОСКИХ ФІГУР.

Мета уроку: формувати вміння учнів застосовувати інтеграл до обчислення площ плоских фігур; розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення, уміння ланічно й математично грамотно висловлювати свою думку; виховувати акуратність, інтерес до математики.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати площі плоских фігур, застосовуючи інтеграл.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

☑ **Бесіда**

Учитель ставить учням запитання за домашнім завданням, коригуючи в разі потреби їхні відповіді.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

☑ **Бліцопитування**

1. За якою формулою можна знайти абсцису вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$?
2. Як знайти абсциси точок перетину графіків функцій $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$?
3. Як визначити напрямок віток параболи $y = ax^2 + bx + c$?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ☑ **Слово вчителя**

Для майбутнього випускника вміння використовувати інтеграл для знаходження площ плоских фігур — одна зі складових успішного вступу до вузу. Мабуть, жодне ЗНО не обходиться без таких задач або елементів, наявних у задачах на знаходження площ плоских фігур. Сьогоднішній урок — крок, що наближає вас до успішного складання ЗНО.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

☑ **Робота в парах**

Пара, яка першою виконає завдання, запише розв'язання на дошці.

1. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 2x + 2$ і $y = 2 + 4x - x^2$.

Розв'язання. $x^2 - 2x + 2 = 2 + 4x - x^2$; $2x^2 - 6x = 0$; $2x(x - 3) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. Виконаємо рис. 1. Тоді

$$S = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 3x^2 \right) \Big|_0^3 = 9.$$

Відповідь: 9.

2. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \frac{7}{x}$ і $x + y = 8$.

Розв'язання. $\frac{7}{x} = 8 - x$; $8x - x^2 = 7$; $x^2 - 8x + 7 = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 7$.

Виконаємо рис. 2. Тоді

$$S = \int_1^7 \left(8 - x - \frac{7}{x} \right) dx = \left(8x - \frac{x^2}{2} - 7 \ln |x| \right) \Big|_1^7 = (56 - 24,5 - 7 \ln 7) - \left(8 - \frac{1}{2} - 7 \ln 1 \right) = 48 - 24 - 7 \ln 7 = 24 - 7 \ln 7.$$

Відповідь: $24 - 7 \ln 7$.

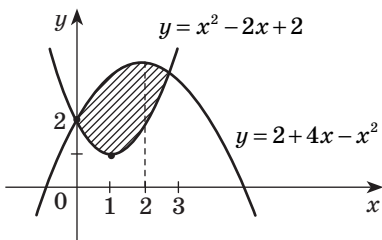


Рис. 1

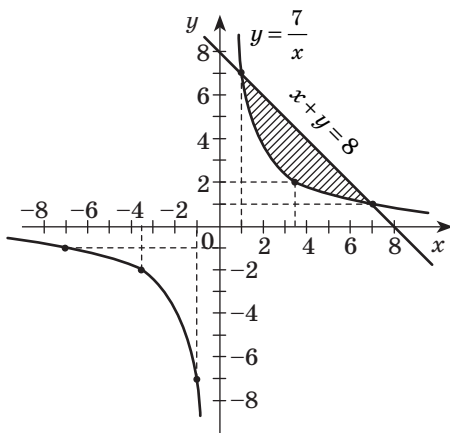


Рис. 2

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ, УМІТЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 13.

Самостійна робота

Варіант 1

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

Початковий і середній рівні (6 балів)

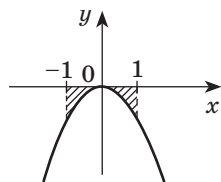
1. Укажіть вираз для знаходження площі заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.

А $\int_{-1}^1 x^2 dx$

В $-\int_0^1 x^2 dx$

Б $-\int_{-1}^1 x^2 dx$

Г $\int_{-1}^1 (1-x^2) dx$



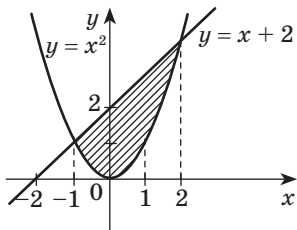
2. Укажіть формулу для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку.

А $\int_{-1}^2 (2+x-x^2) dx$

В $\int_{-1}^2 (2-x-x^2) dx$

Б $\int_{-1}^2 (x^2-x-2) dx$

Г $\int_{-1}^2 (x-2-x^2) dx$



3. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $f(x) = x^3$, $x = 1$, $x = 2$.

А $\frac{15}{4}$

Б 15

В 17

Г $\frac{11}{4}$

Достатній рівень (3 бали)

4. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 4x + 4$, $y = x + 4$.

Високий рівень (3 бали)

5. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

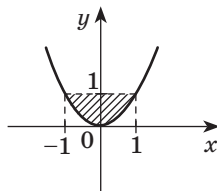
1. Укажіть вираз для знаходження площі заштрихованої фігури, зображеної на рисунку.

А $\int_{-1}^1 x^2 dx$

В $\int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx$

Б $\int_{-1}^1 (1 - x^2) dx$

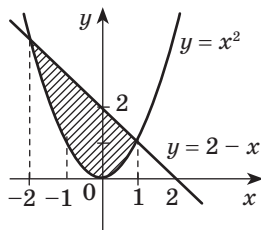
Г $\int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx$



2. Укажіть формулу для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку.

А $\int_{-2}^1 (2-x-x^2) dx$ В $\int_{-2}^1 (x^2-2-x) dx$

Б $\int_{-2}^1 (2+x-x^2) dx$ Г $\int_{-2}^1 (x-2-x^2) dx$



3. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $f(x) = -x^3$, $x = 2$, $x = 1$.

А 13

Б $\frac{15}{4}$

В $\frac{9}{4}$

Г 15

Достатній рівень (3 бали)

4. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = 2x^2 + x$, $y = -2x + 2$.

Високий рівень (3 бали)

5. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = -\sin x$, $y = -\cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. А. 2. А. 3. А. 4. 4,5. 5. $2 - \sqrt{2}$.

Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. Б. 4. $5\frac{5}{24}$. 5. $2 - \sqrt{2}$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів, і пропонує провести самоперевірку за відповідями.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 15	[3]: § 11
С	№ 522 (в, г)	№ 206 (2-4)
Д	№ 529 (в, г)	№ 207 (10)
В	№ 531 (г)	№ 207 (12)

Індивідуально

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$ і $y = 9 - 2^{3-x}$.

(Відповідь: $27 - \frac{14}{\ln 2}$.)

ТЕМА. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛА В ФІЗИЦІ Й ТЕХНІЦІ.

Мета уроку: ознайомити учнів із застосуванням інтеграла в фізиці й техніці; розвинути уявлення учнів про математику як про прикладну науку; виховувати інтерес до математики.

Очікувані результати: учні повинні мати уявлення про можливість застосування інтеграла для розв'язання задач з фізики й техніки.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні роблять самоперевірку завдань середнього і високого рівнів складності за відповідями, а високого — за розв'язанням, заздалегідь підготовленим на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

Установіть відповідність між формулою і фізичними величинами, які вона пов'язує.

- | | |
|----------------------|------------------------------------|
| 1 $s = v(t) \cdot t$ | А Робота і потужність |
| 2 $A = N(t) \cdot t$ | Б Сила струму і електричний заряд |
| 3 $q = I(t) \cdot t$ | В Швидкість руху і переміщення |
| 4 $Q = c(t) \cdot t$ | Г Лінійна густина і маса стрижня |
| | Д Кількість теплоти і теплоємність |

Відповідь: 1–В. 2–А. 3–Б. 4–Д.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

За допомогою інтеграла визначають не тільки площі плоских фігур, а й багато інших величин, значення яких виражаються за допомогою інтегральних сум. Оскільки криволінійна трапеція, обмежена графіком функції $y = f(x)$, є математичною моделлю кожної такої величини, то обчислення меж інтегральних сум здійснюється за формулою Ньютона.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Учитель пропонує учням ознайомитися з таблицею, заздалегідь підготовленою на дошці, і, користуючись нею, розв'язати прикладні задачі із застосуванням інтеграла.

№ з/п	Фізична величина	Співвідношення між величинами	Знаходження величин за допомогою інтеграла
1	s — переміщення, v — швидкість руху	$s = vt$	$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$
2	A — робота, F — сила	$A = F \cdot \Delta x$	$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx$
3	q — електричний заряд, I — сила струму	$q = I \cdot t$	$q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

- Тіло рухається прямолінійно. Залежність швидкості його руху від часу задається формулою $v(t) = 3 + 3t^2$ (м/с). Знайдіть шлях, пройдений тілом за перші п'ять секунд. (Відповідь: 140 м.)
- Під дією сили, що дорівнює 2 Н, пружина розтягнулася на 4 см. Яку роботу треба виконати, щоб пружина подовжилася ще на 4 см? (Відповідь: 0,04 Дж.)
- Визначте електричний заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за 5 с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = (2t + 1)$ (А). (Відповідь: 30 Кл.)
- Знайдіть масу стрижня завдовжки 20 см, якщо залежність його лінійної густини від довжини задається формулою $\rho(l) = 2l^2 + 1$ (кг/м). (Відповідь: $\frac{77}{375}$ кг.)

Робота в парах

Учні працюють над задачами й звіряють відповіді із відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем на дошці.

- При розтягуванні пружини на 5 см виникає сила пружності 3 Н. Яку роботу треба зробити, щоб розтягнути пружину на 5 см? *Розв'язання.* За законом Гука сила F , яка розтягує пружину на величину x , обчислюється за формулою $F = kx$, де k — жорсткість пружини. З умови задачі випливає, що $3 = k \cdot 0,05$; $k = 60$ і $F = 60x$, а за формулою $A = \int_0^{0,05} 60x dx = 30x^2 \Big|_0^{0,05} = 0,075$ (Дж).
Відповідь: 0,075 Дж.

2. Визначте електричний заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за 6 с, якщо сила струму змінюється за законом $I(t) = (6t - 5)$ (А).

Розв'язання. $q = \int_0^6 (6t - 5) dt = (3t^2 - 5t) \Big|_0^6 = 78$ (Кл).

Відповідь: 78 Кл.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель просить учнів перелічити відомі їм типи задач з фізики й техніки, які були розв'язані за допомогою інтеграла на уроці.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 16	[3]: § 11
С	№ 546	№ 213–215
Д	№ 553	№ 217
В	№ 557	№ 211, 216

Індивідуально

Тіло рухається прямолінійно. Залежність швидкості руху від часу задається формулою $v(t) = t + 6t^2$ (м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за третю секунду від початку руху.

УРОК № 35

ТЕМА. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.

Мета уроку: систематизувати й узагальнити матеріал, вивчений з теми «Інтеграл та його застосування»; підготувати учнів до контрольної роботи; розвивати вміння узагальнювати, робити висновки; виховувати наполегливість, уміння обстоювати свою думку, працювати в групі.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити первісну; виділяти первісну, яка задовольняє початкову умову; обчислювати інтеграл за допомогою таблиці первісних; знаходити площі плоских фігур.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Учитель пропонує учням об'єднатися в гетерогенні групи і перевірити домашнє завдання. Разом з цим у групах повторюється таблиця первісних, правила знаходження первісних та обчислення визначених інтегралів.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Мотивація природно «впливає» із місця уроку в темі. Оскільки це останній урок перед контрольною роботою, то бажано підготуватися до неї якнайкраще.

IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Бесіда за технологією «Мікрофон»

1. У якому випадку $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку? Наведіть приклад.
2. Сформулюйте основну властивість первісних і проілюструйте її на прикладах.
3. Сформулюйте правила знаходження первісних.
4. Чому дорівнюють первісні функції: $kx+b$; x^α ($\alpha \neq -1$); $\frac{1}{x}$; $\sin x$; $\cos x$; $\frac{1}{\cos^2 x}$; $\frac{1}{\sin^2 x}$; e^x ; a^x ($a > 0$; $a \neq 1$)?
5. Поясніть, як можна знайти площу криволінійної трапеції.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Учні працюють за картками, після чого здають виконані групою роботи на перевірку вчителю, заздалегідь поставивши запитання, якщо є потреба.

Картка для роботи групи

1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції:

а) $f(x) = (2x - 5)^7$; б) $f(x) = \frac{1}{16x - 5}$; в) $f(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{3} - 2\right)}$.

2. Для функції $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(-1; 4)$.

3. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 e^{2x} dx$.

4. Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями $y = 2 + x^2$ і $y = 4 + x$.

5. Залежність швидкості руху точки від часу задано рівнянням $v(t) = 3t^2 + 2t - 1$ (м/с). Знайдіть шлях, який пройде тіло за 10 с після початку руху.

Відповіді до картки

1. а) $\frac{(2x-5)^8}{16} + C$; б) $F(x) = \frac{1}{16} \ln|16x-5| + C$; в) $F(x) = 3 \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} - 2\right) + C$.

2. $F(x) = 2x^2 - \frac{1}{x} + 1$. 3. $\frac{e^2 - 1}{2}$. 4. $4\frac{1}{2}$. 5. 1090 м.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

1. Які труднощі виникли в ході роботи групи?
2. На які типи завдань слід звернути увагу під час виконання домашнього завдання?
3. Що слід повторити під час підготовки до контрольної роботи?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 16	[3]: § 10, 11
С		
Д	с. 127, СР № 4	с. 247, завдання для самостійної роботи
В		

ТЕМА. **КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3.**

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Інтеграл та його застосування»; розвивати логічне мислення, уміння застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати самостійність.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати знання правил знаходження первісних, таблиці первісних деяких функцій, уміння обчислювати інтеграли за допомогою таблиці первісних; знаходити площі криволінійних трапецій.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ**

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

**III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

Учитель налаштовує учнів на написання контрольної роботи, акцентує їхню увагу на необхідності надати докладне пояснення до завдань 7–9, а в останньому завданні — перетворити підінтегральну функцію до вигляду, зручного для інтегрування.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], КР 5.

 Контрольна робота № 3

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Для функції $f(x) = 4x^3$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(2; 18)$.

А $x^4 - 2$

Б $x^4 + 2$

В $x^4 + 1$

Г $x^4 - 1$

2. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції

$$f(x) = e^x - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

А $e^x + \operatorname{tg} x + C$

Б $e^x - \operatorname{tg} x + C$

В $e^x + \operatorname{ctg} x + C$

Г $e^x - \operatorname{ctg} x + C$

3. За допомогою якого виразу можна обчислити площу заштрихованої фігури (рис. 1)?

А $\int_0^1 (1-x^3) dx$

В $\int_0^1 x^3 dx$

Б $-\int_0^1 x^3 dx$

Г $\int_0^1 (x^3-1) dx$

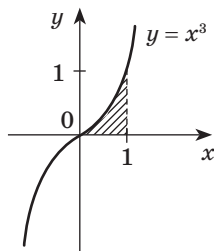


Рис. 1

4. Обчисліть інтеграл $\int_1^4 (4-2x) dx$.

А 5

Б -5

В 3

Г -3

5. Обчисліть площу заштрихованої фігури (рис. 2).

А $4 \ln 2$

В $4 \ln 3$

Б $4 \ln 2 + 1$

Г $4 \ln 3 - 4$

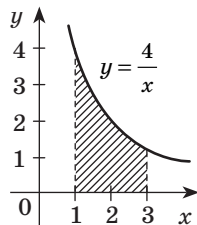


Рис. 2

6. Обчисліть інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$.

А -1

Б 2

В 1

Г -2

Достатній рівень (3 бали)

7. Обчисліть інтеграл $\int_0^6 \frac{5 dx}{\sqrt{0,5x+1}}$.

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 + 2x + 2$ і $y = 2x + 3$.

Високий рівень (3 бали)

9. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 \frac{x^2 + e^x}{x^2 e^x} dx$.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Для функції $f(x) = 5x^4$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $A(1; 3)$.

А $x^5 + 2$

Б $x^5 - 2$

В $x^5 + 1$

Г $x^5 - 1$

2. Знайдіть загальний вигляд первісних

для функції $f(x) = e^x + \frac{1}{\sin^2 x}$.

А $e^x + \text{ctg } x + C$ В $e^x + \text{tg } x + C$

Б $e^x - \text{ctg } x + C$ Г $e^x - \text{tg } x + C$

3. За допомогою якого виразу можна обчислити площу заштрихованої фігури (рис. 3)?

А $\int_{-1}^0 x^3 dx$ В $\int_{-1}^0 (-1 - x^3) dx$

Б $-\int_{-1}^0 x^3 dx$ Г $\int_{-1}^0 (-x^3 + 1) dx$

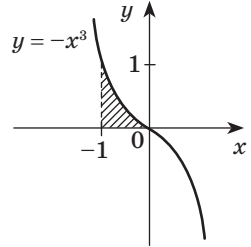


Рис. 3

4. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^1 (6x - 2) dx$.

А 17 Б 15 В -17 Г -15

5. Обчисліть площу заштрихованої фігури (рис. 4).

А $4 \ln 2 - 1$

Б $4 \ln 3$

В $4 \ln 2$

Г $-4 \ln 3$

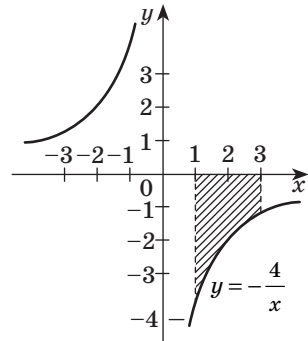


Рис. 4

6. Обчисліть інтеграл $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

А -1

Б -2

В 1

Г 2

Достатній рівень (3 бали)

7. Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^4 \frac{3dx}{2\sqrt{3x+4}}$.

8. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = x^2 - 4x + 5$ і $y = 5 - x$.

Високий рівень (3 бали)

9. Обчисліть інтеграл $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x} dx$.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. Б. 3. В. 4. Г. 5. В. 6. В.

$$7. \int_0^6 \frac{5dx}{\sqrt{0,5x+1}} = \frac{5\sqrt{0,5x+1}}{\frac{1}{4}} \Big|_0^6 = 20\sqrt{0,5x+1} \Big|_0^6 = 40 - 20 = 20.$$

8. $y = x^2 + 2x + 2$. $x^2 + 2x + 2 = 2x + 3$; $x^2 = 1$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ (рис. 5).

$$S = \int_{-1}^1 (2x + 3 - x^2 - 2x - 2) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

$$9. \int_1^2 \frac{x^2 + e^x}{x^2 e^x} dx = \int_1^2 (e^{-x} + x^{-2}) dx = \left(-e^{-x} - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \left(-e^{-2} - \frac{1}{2} \right) - \left(-e^{-1} - 1 \right) =$$

$$= -\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2}.$$

Варіант 2. 1. А. 2. Б. 3. Б. 4. Г. 5. Б. 6. В.

$$7. \int_{-1}^4 \frac{3dx}{2\sqrt{3x+4}} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{3x+4}}{2 \cdot 3} \Big|_{-1}^4 = \sqrt{3x+4} \Big|_{-1}^4 = 4 - 1 = 3.$$

8. $x^2 - 4x + 5 = 5 - x$; $x^2 - 3x = 0$; $x(x - 3) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (рис. 6).

$$S = \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^3 = -9 + 13,5 = 4,5.$$

$$9. \int_{-2}^{-1} \frac{e^x - x^3}{x^3 e^x} dx = \int_{-2}^{-1} (x^{-3} - e^{-x}) dx = \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{e^x} \right) \Big|_{-2}^{-1} = \left(-\frac{1}{2} + e \right) - \left(-\frac{1}{8} + e^2 \right) =$$

$$= e - e^2 - \frac{3}{8}.$$

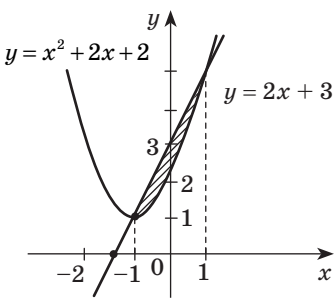


Рис. 5

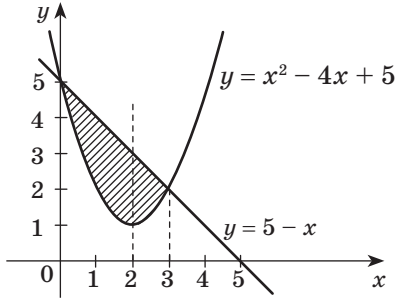


Рис. 6

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель збирає роботи й відповідає на запитання учнів, потім знайомить їх із правильними відповідями, заздалегідь підготовленими на дошці.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Підготувати повідомлення про виникнення теорії ймовірностей і статистики та застосування цих наук у різних сферах життя.

УРОК № 35*

ТЕМА. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ.

Мета уроку: ознайомити учнів із формулою для обчислення об'ємів тіл обертання; показати застосування цієї формули для обчислення об'ємів кулі, конуса, циліндра, можливість застосування інтеграла в різних галузях фізики, економіки й техніки; розвивати самостійність, уміння працювати в групі, працьовитість, наполегливість, відповідальність.

Очікувані результати: учні повинні розуміти зв'язок інтеграла з реальними процесами життя; уміти застосовувати інтеграл під час розв'язування прикладних задач.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: наукова конференція (застосування знань, умінь і навичок).

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учні об'єднуються в гетерогенні групи (теоретиків, практиків, фізиків, економістів).

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель збирає зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Теоретичний текст

Учитель роздає кожній групі текст, призначений для перевірки ступеня засвоєння обов'язкового теоретичного матеріалу. У тексті пропущено слова, які учні вписують, а потім здійснюють взаємоперевірку між групами з подальшим зачитуванням правильних відповідей.

1. Формула Ньютона — Лейбніца: $\int_a^b f(x)dx = \dots$, де $F(x) — \dots$

2. Задачі, у яких використовуються нематематичні поняття, називають...

3. Рівняння $x^2 + y^2 = R^2$ задає ... із центром ..., де R — ...
4. Пряма, яка проходить через початок координат, задається рівнянням $y = \dots$
5. Пряма, паралельна осі Ox , задається рівнянням $y = \dots$
6. Шлях, пройдений тілом за інтервал часу $[t_1; t_2]$, виражається через інтеграл так: $s = \dots$
7. Роботу змінної сили $F(x)$ під час переміщення тіла із точки a в точку b можна знайти за формулою $A = \dots$
8. Електричний заряд, що проходить через поперечний переріз провідника за проміжок часу від t_1 до t_2 , можна знайти за формулою $q = \dots$

Примітка. За тиждень до уроку групи отримали завдання повторити рівняння кола та прямої на площині, знайти матеріал, на прикладі якого можна продемонструвати застосування інтеграла у фізиці.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Кожна група мотивує необхідність удосконалювати вміння обчислювати інтеграли для розв'язування прикладних задач (завдання підготувати такий матеріал групи отримали заздалегідь).

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Група «теоретиків»

Група «теоретиків», яка отримала завдання підготувати теоретичну базу для обчислень об'ємів тіл обертання, робить своє повідомлення.

Повідомлення може мати такий вигляд.

Нехай дано тіло, обмежене замкненою поверхнею і двома площинами $x = a$, $x = b$, перпендикулярними до осі Ox . Відомо, що S — площа перерізу. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n рівних частин, через кожен проведемо площину, перпендикулярну до осі Ox . $S(x_0), S(x_1), \dots$. Ці площини ділять тіло на n тіл (рис. 1, а). Об'єм тіла, що міститься між площинами α_{k-1} і α_k , за умови досить великих n приблизно дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на висоту тіла Δx (рис. 1, б). Тому $V \approx S(x_0)\Delta x + S(x_1)\Delta x + \dots + S(x_{n-1})\Delta x = V_n$.

Таким чином,
$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

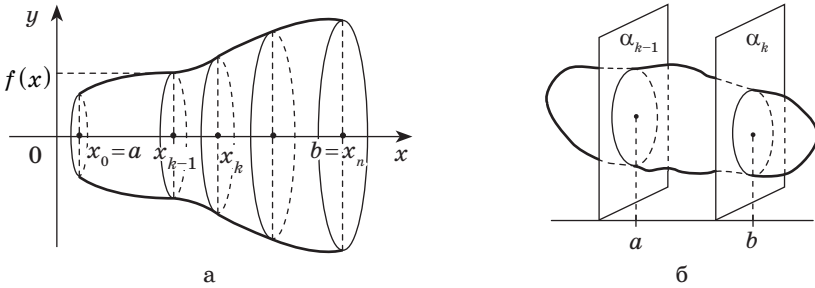


Рис. 1

Якщо тіло утворене обертанням криволінійної трапеції з основою $[a; b]$, обмеженої кривою $y = f(x)$, навколо осі Ox , то площа перерізу кола дорівнює $\pi f^2(x)$.

Таким чином,
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Група «практиків»

Три групи практиків працюють над розв'язанням задач на обчислення: об'єму кулі; об'єму циліндра; об'єму конуса з подальшим поясненням біля дошки.

1. Об'єм кулі.

$x^2 + y^2 = R^2$, $y^2 = R^2 - x^2$. Якщо $y > 0$, то $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = 1$$

$$= \pi \left(2R^2 - \frac{2}{3} R^3 \right) = \pi \frac{6R^3 - 2R^3}{3} = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ (рис. 2).}$$

Таким чином,
$$V_{\text{к}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2. Об'єм циліндра

Циліндр — тіло, отримане обертанням прямокутника $OABC$ навколо осі Ox .

Складемо рівняння твірної циліндра AB . $y = R$.

$$V = \pi \int_0^H R^2 dx = \pi R^2 x \Big|_0^H = \pi R^2 H \text{ (рис. 3). Таким чином, } V_{\text{ц}} = \pi R^2 H.$$

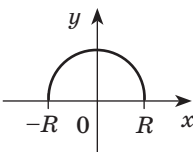


Рис. 2

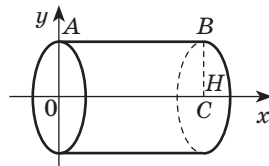


Рис. 3

3. Об'єм конуса

Трикутник OAB обертається навколо осі Ox . Складемо рівняння твірної конуса OA : $y = kx$, де $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{H}$.

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} x \right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H \quad (\text{рис. 4}).$$

Таким чином,
$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Група «фізиків»

Група «фізиків» працює над розв'язанням задачі з фізики з подальшим поясненням біля дошки.

Задача. Робота сили $F(x)$ під час переміщення тіла із точки a в точку b дорівнює $A = \int_a^b F(x) dx$. Обчисліть роботу, яку треба виконати для викачування води з ями завглибшки 10 м, яка має квадратний переріз зі стороною 4 м. Густина води $\rho = 10^3$ кг/м³.

Розв'язання. Напрямимо вісь Ox уздовж діючої сили $F(x)$ (рис. 5).

Сила $F(x)$, яка діє на переріз прямокутного паралелепіпеда площею 16 м², дорівнює вазі шару води, що перебуває над цим перерізом. Тоді $F(x) = 16\rho g(10 - x)$, де $x \in [0; 10]$; $g = 9,8$ м/с².

$$A = \int_0^4 16\rho g(10 - x) dx = 16\rho g \int_0^{10} (10 - x) dx = 16\rho g \left(10x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{10} =$$

$$= 16\rho g(100 - 50) = 16 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 50 = 7,84 \cdot 10^6 \quad (\text{Дж}).$$

Відповідь: $7,84 \cdot 10^6$ Дж.

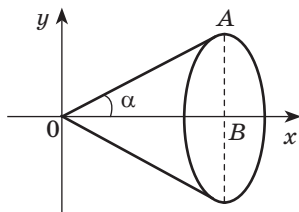


Рис. 4

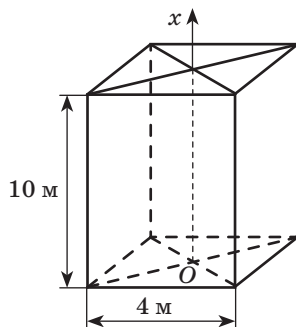


Рис. 5

Група «економістів»

Група «економістів» працює над розв'язанням задачі економічного змісту з подальшим поясненням біля дошки.

Задача. Продуктивність праці робітника приблизно виражається формулою $f(t) = -0,0033t^2 - 0,089t + 20,96$, де t — робочий час (у годинах). Обчисліть обсяг продукції, випущеної протягом місяця, вважаючи, що робочий день триває 8 годин, а на місяць припадає 22 робочі дні.

Розв'язання. Об'єм випуску продукції протягом робочого дня є первісною від функції, яка виражає продуктивність праці. Тому

$$\begin{aligned} V &= 22 \int_0^8 f(t) dt = 22 \int_0^8 (-0,0033t^2 - 0,089t + 20,96) dt = \\ &= 22 \left(-0,0033 \frac{t^3}{3} - 0,089 \frac{t^2}{2} + 20,96t \right) \Big|_0^8 = \\ &= 22(-0,001 \cdot 512 - 2,848 + 167,68) = 22 \cdot 164,27 \approx 3614 \text{ (од.)}. \end{aligned}$$

Відповідь: 3614 (од.).

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учні рецензують виступи груп. Учитель відзначає найбільш вдалі виступи груп і окремих учнів та ще раз акцентує увагу на значенні визначеного інтеграла для розв'язування прикладних задач.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Розв'язати задачі.

Д

1. У воду вертикально занурено трикутну пластину ABC з основою AC і висотою BD , що відповідно дорівнюють 9 м і 2 м. Обчислити силу тиску води на пластину, якщо її вершина B лежить на вільній поверхні води, а AC лежить паралельно їй.
2. Продуктивність праці бригади робітників протягом зміни визначається формулою $f(t) = -2,53t^2 + 24,75t + 111,1$, де t — робочий час (у годинах). Визначити обсяг продукції, виготовленої бригадою за два робочі дні, вважаючи, що робочий день триває 8 годин.

ТЕМА 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

УРОК № 37

ТЕМА. **ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ВІДНОСНА ЧАСТОТА ПОДІЇ. ЙМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ.**

Мета уроку: формувати в учнів поняття про випадкову подію, частоту й відносну частоту випадкової події, поняття про ймовірність випадкової події; дати класичне визначення ймовірності; учити знаходити ймовірність рівноможливих подій у найпростіших випадках; розвивати абстрактне мислення, розуміння того, що розділ теорії ймовірностей має прикладний характер; виховувати інтерес до пізнання нового.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати відносну частоту подій і ймовірність подій, застосовуючи визначення ймовірності.

Основні поняття: випадкова подія, вірогідна подія, неможлива подія, частота й відносна частота випадкової події, ймовірність випадкової події.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Учитель повідомляє статистичні дані контрольної роботи, коротко зупиняється на типових помилках, яких припустилися учні під час її написання.

III. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Учні роблять повідомлення, підготовлені вдома (див. додатковий матеріал). Потім, працюючи в парах, згадують матеріал, пов'язаний з теорією ймовірностей, яку вивчали в 6-му класі: наводять приклади випадкових, вірогідних, неможливих, рівноможливих подій.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Якщо ви азартні та любите ризикувати!

Якщо ви вважаєте себе сучасною людиною!

Якщо ви хочете бути успішним у бізнесі!

І навіть якщо ви маєте відношення до літератури, то вивчення даної теми вам необхідне!

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Випадковою називається подія, що може відбутися, а може й не відбутися в процесі спостереження чи експерименту в тих самих умовах.

Наприклад, випадковими є події «виграш або програш за лотерейним квитком у певному накладі»; «влучення або промах у разі одного пострілу»; «випадання двох очок під час підкидання грального кубика».

Якщо за незмінних умов проведено n випадкових експериментів і в $n(A)$ випадках відбулася подія A , то число $n(A)$ називається частотою події A .

Відносною частотою випадкової події називається відношення числа настання цієї події до загального числа експериментів: $\frac{n(A)}{n}$.

Як приклад розглянемо таблицю експериментів з підкидання гудзика та знайдемо відносну частоту випадкової події «гудзик упав вушком униз» у кожній серії експериментів.

Число експериментів	19	20	24	100
Число падінь гудзика вушком униз	10	11	13	46

Маємо: 1) $\frac{10}{19} \approx 0,53$; 2) $\frac{11}{20} \approx 0,55$; 3) $\frac{13}{24} \approx 0,54$; 4) $\frac{46}{100} = 0,46$.

Вірогідною називається подія, яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту.

Наприклад, вірогідними є події «вийняли яблуко з кошика, у якому лежать тільки яблука»; «наступив Новий рік після 31 грудня».

Неможливою називається подія, яка не відбувається ні за якого повторення експерименту.

Наприклад, неможливими є події «вийняли яблуко з кошика, у якому лежать тільки вишні», «випало 9 очок під час підкидання грального кубика».

Для рівноможливих елементарних подій **імовірність події A** — це відношення числа сприятливих для неї подій (m) до числа всіх рівноможливих подій (n) у зазначеному експерименті:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Отже, **імовірність** — це числова характеристика ступеня можливості будь-якої випадкової події за тих чи інших визначених умов, які можуть повторюватися необмежене число раз.



$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Імовірність вірогідної події I : $P(I) = 1$.

Імовірність неможливої події O : $P(O) = 0$.

Приклад. Знайдемо ймовірність того, що в разі виймання навмання з коробки, у якій міститься 4 білі, 3 чорні та 4 червоні кулі, буде вийнято чорну кулю.

Розв'язання. Усього 14 куль, вийманню чорної кулі сприяє $m = 3$, тобто $P(A) = \frac{3}{14}$. A — подія, що полягає у вийманні чорної кулі.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учні в парах виконують завдання, які потім обговорюються колективно.

- У коробці лежать 18 фломастерів, з яких 5 жовтих, а решта зелені. Знайдіть імовірність того, що навмання вийнятий фломастер буде зеленим. (*Відповідь: 0,72.*)
- Серед натуральних чисел від 1 до 20 учень називає навмання одне. Якою є ймовірність того, що це число буде дільником числа 20? (*Відповідь: 0,3.*)
- У коробці лежать різнокольорові кулі, з яких 10 білих, 5 чорних, решта червоні. Скільки червоних куль лежить у коробці, якщо ймовірність випадкового вибору червоної кулі дорівнює 0,8? (*Відповідь: 60.*)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

- З якими поняттями ви ознайомилися на уроці?
- Які події називають випадковими; вірогідними; неможливими?
- За якою формулою обчислюють імовірність випадкової події A ?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 22	[3]: § 20
С	№ 727	№ 363
Д	№ 740	№ 367
В	№ 747	№ 370

Індивідуально

Підкинули три монети. Якою є ймовірність того, що: а) гербів випало більше, ніж цифр; б) гербів випало не більше одного? (Відповідь: а) 0,5; б) 0,5.)

☑ Додатковий матеріал

Ще за часів Стародавніх Єгипту, Греції та Рима поставали питання, які пізніше були віднесені до теорії ймовірностей. Цей період — передісторії теорії ймовірностей — закінчується в XVI ст. У роботах італійських математиків Д. Кардано, Н. Тарталья, Г. Галілея, пов'язаних з іграми, уже фігурує поняття ймовірності.

У XVII ст. питаннями теорії ймовірностей зацікавилися видатні французькі вчені П. Ферма та Б. Паскаль. Нідерландський математик Х. Гюйгенс у 1657 р. видав трактат «Про розрахунки в азартних іграх». У XVIII ст. великий внесок у застосування теорії ймовірностей у демографії зробив видатний математик Л. Ейлер. Велику роль у поширенні ідей теорії ймовірностей у Росії та Україні в XIX ст. відіграли математики В. Я. Буняковський і М. В. Остроградський. У XX ст. теорія ймовірностей поступово перетворюється на строгу аксіоматичну теорію. Вирішальним етапом у розвитку теорії ймовірностей стала робота математика А. М. Колмогорова «Основні поняття теорії ймовірностей», видана в 1937 р., після якої теорія ймовірностей посіла рівноправне місце серед математичних дисциплін.

УРОК № 38

ТЕМА. ВИПАДКОВА ПОДІЯ. ІМОВІРНІСТЬ ПОДІЇ.

Мета уроку: формувати вміння застосовувати формулу класичної ймовірності для обчислення ймовірностей випадкових подій; розвивати пам'ять, увагу; виховувати акуратність, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні знати формулу класичної ймовірності та вміти застосовувати її під час розв'язування задач.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні з місця коментують розв'язання задач середнього і достатнього рівнів складності, розв'язання задачі високого рівня розглядається більш докладно.

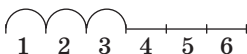
III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Графічний диктант

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так» \cap , «ні» — , а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

Чи є правильним твердження, що:

- 1) подія «після літа настане зима» неможлива;
- 2) подія «завтра піде дощ» випадкова;
- 3) подія «вода закипить за температури 100°C » вірогідна;
- 4) імовірність того, що у простого числа два дільники, дорівнює 0;
- 5) імовірність вибрати парне число серед дільників числа 15 дорівнює $\frac{1}{3}$;
- 6) імовірність випадання непарного числа у разі підкидання одного кубика дорівнює $\frac{1}{6}$?

Ключ-відповідь: 

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Уже в кам'яному віці люди розуміли, що ймовірність перемоги над звіром більша у 15-ти вояків, ніж у 9-ти. Але наші пращури були дуже далекі від теорії ймовірностей, із набуттям досвіду вони намагалися планувати випадкові події, класифікувати їх наслідки. І помітили, що випадками часто керують об'єктивні закономірності.

Може, у когось виникло запитання, до чого ж отут математика? Але ви вже знаєте, що ймовірність можна обчислити, що ми сьогодні на уроці й будемо робити.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Підкидають два кубики. Знайдіть імовірність таких подій:
 - A — «сума очок дорівнює 8»;
 - B — «добуток очок, що випали, дорівнює 8»;
 - C — «сума очок, що випали, більша за їх добуток».

Розв'язання. Оскільки одночасно підкидають 2 кубики, то всього варіантів $n = 36$. Із них події A сприяють такі: $2+6=8$; $6+2=8$; $3+5=8$; $5+3=8$; $4+4=8$, тобто $m = 5$. Отже, $P(A) = \frac{5}{36}$.

Події B сприяють дві події: $4 \cdot 2 = 8$; $2 \cdot 4 = 8$.

Отже, $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Події C сприяють: $1+1=2 > 1 \cdot 1$; $1+2=3 > 1 \cdot 2 = 2$; $2+1=3 > 2 \cdot 1$; $4+1=5 > 4 \cdot 1$; $1+4 > 1 \cdot 4$; $1+3 > 1 \cdot 3$; $3+1 > 3 \cdot 1$; $5+1 > 5 \cdot 1$; $1+5 > 1 \cdot 5$; $6+1 > 6 \cdot 1$; $1+6 > 1 \cdot 6$, тобто $m = 11$. Отже, $P(C) = \frac{11}{36}$.

Відповідь: $\frac{5}{36}$; $\frac{1}{18}$; $\frac{11}{36}$.

2. Із набору для гри в доміно, який має 28 кісточок, навмання беруть одну кісточку, і вона виявилася не дублем. Знайдіть імовірність таких подій:

A — «друга, навмання взята кісточка — дубль»;

B — «друга, навмання взята кісточка — не дубль».

Розв'язання. Набір для гри в доміно містить 7 дублів. Залишилося 27 кісточок. Тоді ймовірність події A дорівнює $P(A) = \frac{7}{27}$,

а ймовірність події B становить $P(B) = \frac{27-7}{27} = \frac{20}{27}$.

Відповідь: $\frac{7}{27}$; $\frac{20}{27}$.

Інтерактивна вправа «Мозковий штурм»

Учні об'єднуються в малі групи для розв'язання задачі.

Задача. Куб, усі грані якого пофарбовані, розрізали на 27 рівних кубиків. Знайдіть імовірність того, що взятий навмання кубик: а) має 3 пофарбовані грані; б) має 2 пофарбовані грані; в) має одну пофарбовану грань; г) не має пофарбованих граней.

Розв'язання

- а) Три пофарбовані грані можуть мати тільки кубики, які розміщені у вершинах куба. Таких кубиків 8 (у куба 8 вершин). Усього варіантів 27. Отже, $P(A) = \frac{8}{27}$.

- б) Дві пофарбовані грані мають кубики, які розміщені у середині кожного ребра (у куба 12 ребер). Отже, $P(B) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$.
- в) Одну пофарбовану грань мають кубики, які розміщені у середині кожної грані (у куба 6 граней). Отже, $P(C) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$.
- г) Жодна грань не пофарбована в кубика, який розміщений усередині куба. Такий кубик лише один. Отже, $P(D) = \frac{1}{27}$.

Відповідь: а) $\frac{8}{27}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{2}{9}$; г) $\frac{1}{27}$.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель звертає увагу учнів на те, що в деяких задачах підрахунок сприятливих варіантів здійснювався простим перебором можливих варіантів, що займає досить багато часу. Іноді зручно користуватися спеціальними формулами, які будуть вивчені далі.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 22	[3]: § 20
С	№ 725	№ 364, 366
Д	№ 743	№ 368
В	№ 748 (а, б)	№ 379

Індивідуально

На десяти однакових картках написано цифри від 0 до 9. Із цих карток навмання склали двоцифрове число. Знайти ймовірність таких подій:

- A — «це число кратне 3»;
 B — «це число є дільником числа 99»;
 C — «це число ділиться на 11».

(Відповідь: $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{30}$; $P(C) = 0$.)

**ТЕМА. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ.
КОМБІНАТОРНІ ПРАВИЛА СУМИ
Й ДОБУТКУ.**

Мета уроку: ознайомити учнів з тим, що вивчає комбінаторика, і комбінаторними правилами суми й добутку; дати схему розв'язування комбінаторних задач; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати математичну грамотність, наполегливість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати, що вивчає комбінаторика; розуміти, як застосовувати правила суми й добутку; мати уявлення про множину, підмножину.

Основні поняття: множина, підмножина, елемент множини, порожня множина, упорядкована множина.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ**

Учитель відповідає на запитання, які виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ **Фронтальна бесіда**

1. Поясніть зміст словосполучень: «рій бджіл», «букет квітів».
2. Чи є правильним твердження, що в кожному з випадків завдання 1 присутня об'єднуюча характеристична властивість?
3. Наведіть приклади сукупностей у математиці, які об'єднані тією самою властивістю.

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ** **Слово вчителя**

У житті часто доводиться що-небудь вибирати з великої кількості всіляких варіантів. Наприклад, скількома способами можна розташувати в турнірній таблиці 10 футбольних команд, якщо жодні дві з них не набрали порівну очок? Скількома способами можна скласти розклад на день із 6 навчальних предметів для одного класу, якщо в класі вивчається 12 предметів? Для таких задач існують загальні методи розв'язування, що вивчає комбінаторика як розділ математики.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Множина — поняття первинне, йому не дається визначення. Наприклад, множина учнів класу, множина літер алфавіту, множина натуральних чисел тощо.

Об'єкт, який належить множині, називається **елементом множини**.

Множину прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту, а її елементи — маленькими. Іноді для позначення множини використовують фігурні дужки.

Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою**, позначається символом \emptyset . Множини бувають **скінченні** і **нескінченні** (за числом елементів).

Скінченна упорядкована множина — така множина, для якої визначений порядок розміщення її елементів.

Комбінаторика — розділ математики, присвячений розв'язанню задач про вибір і розміщення елементів скінченної множини відповідно до заданих правил.

Ці правила визначають спосіб побудови деякої конструкції — комбінаторної сполуки.

В основі класичної комбінаторики лежать **комбінаторні правила суми та добутку**.

Правило суми

Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а інший об'єкт B — n способами, то вибір «або A , або B » можна здійснити $(m+n)$ способами.

Наприклад, на тарілці лежать 5 яблук і 9 груш. Один плід можна вибрати $5+9=14$ (способами).

Правило добутку

Якщо деякий об'єкт A можна вибрати m способами, а після такого вибору об'єкт B можна вибрати n способами, то пару об'єктів A і B можна вибрати mn способами.

Наприклад, із 6 видів конвертів без марок і 5 видів марок один конверт і одну марку можна вибрати $6 \cdot 5 = 30$ (способами).

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. У класі 15 хлопців і 12 дівчат. Скількома способами можна вибрати: а) хлопця; б) дівчину; в) одного учня цього класу; г) двох учнів — хлопця й дівчину?

Розв'язання. а) Хлопця можна вибрати 15 способами; б) дівчину можна вибрати 12 способами; в) за правилом суми або дівчину, або хлопця можна вибрати $15+12=27$ (способами); г) за правилом добутку вибрати двох учнів — хлопця й дівчину — можна $15 \cdot 12=180$ (способами). *Відповідь:* а) 15; б) 12; в) 27; г) 180 способами.

2. У класі, де навчаються 15 хлопців і 12 дівчат, вибрали одного учня. Скількома способами після цього можна вибрати дівчину і хлопця?

Розв'язання. Якщо один учень уже вибраний, то можливі два варіанти: а) якщо був вибраний хлопець, то хлопців залишилося 14 і існує 14 варіантів вибору, а для дівчат є 12 варіантів, тоді хлопця і дівчину можна вибрати $14 \cdot 12=168$ (способами); б) якщо була вибрана дівчина, то дівчат залишилося 11 і тоді способів вибору $11 \cdot 15=165$. Отже, за правилом суми хлопця і дівчину можна вибрати $168+165=333$ (способами). *Відповідь:* 333 способами.

3. Скількома способами можна пошити триколірний прапор, якщо є тканини 5 різних кольорів?

Розв'язання. Перший колір можна вибрати п'ятьма способами, другим — чотирма, третій — трьома. За правилом добутку триколірний прапор можна зшити $5 \cdot 4 \cdot 3=60$ (способами). *Відповідь:* 60.

4. У коробці лежать 12 білих і 16 чорних куль. Скількома способами можна вибрати: а) одну кулю будь-якого кольору; б) дві різнокольорові кулі?

Розв'язання. а) За правилом суми одну кулю будь-якого кольору можна вибрати $12+16=28$ (способами); б) за правилом добутку дві різнокольорові кулі можна вибрати $16 \cdot 12=192$ (способами). *Відповідь:* а) 28; б) 192.

5. Скільки чотирицифрових чисел, що діляться на 5, можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3 і 5, якщо в кожному числі жодна із цифр не повторюється?

Розв'язання. Остання цифра складеного числа має бути 0 або 5 (ознаки подільності на 5). Тоді вибрати останню цифру можна двома способами. Першу цифру можна вибрати чотирма способами, другу — трьома, третю — двома. Тож чотирицифрових чисел буде $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2=48$, при цьому необхідно виключити ті, які починаються нулем, а отже, закінчуються п'ятіркою. Другу цифру в них можна вибрати трьома способами, третю — двома. Тобто буде $2 \cdot 3=6$ (чисел). Отже, чисел, що задовольняють умову, буде $48-6=42$. *Відповідь:* 42 числа.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Що вивчає комбінаторика?
2. Сформулюйте правило суми й правило добутку, на які спирається розв'язування комбінаторних задач. Наведіть приклади.
3. Яку множину вважають упорядкованою? Наведіть приклад упорядкованої скінченної множини.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 18	[3]: § 21, пп. 1, 2
С	№ 603	с. 431, № 1, 2, 4
Д	№ 625	с. 431 № 3, 5
В	№ 627	с. 435, № 1–5

Індивідуально

Скількома способами можна розставити 4 книжки з алгебри і 3 з геометрії так, щоб усі книжки з геометрії стояли підряд?
(Відповідь: 720 способами.)

УРОК № 40

ТЕМА. ПЕРЕСТАНОВКИ, РОЗМІЩЕННЯ, КОМБІНАЦІЇ.

Мета уроку: ознайомити учнів з видами комбінаторних сполук, формулами для обчислення числа перестановок, розміщень і комбінацій; учити використовувати ці формули під час розв'язування задач; розвивати пам'ять, логічне мислення, увагу; виховувати наполегливість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розрізняти перестановки, розміщення, комбінації, застосовуючи формули комбінаторних сполук під час розв'язування найпростіших задач.

Основні поняття: перестановки, розміщення, комбінації, факторіал.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за записами, заздалегідь підготовленими на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Складіть усі можливі варіанти розташування літер a і b . Скільки існує таких варіантів?
2. Складіть усі можливі варіанти розташування літер a , b і c . Скільки існує таких варіантів?
3. Чому дорівнює добуток усіх натуральних чисел від 1 до 4?
4. Чим розрізняються комбінації ab і ba ; abc і cba ?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Давайте розглянемо кілька задач. 1. Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються? 2. Скільки трицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри в числі не повторюються? 3. Скількома способами можна вибрати дві різні цифри із цифр 1, 2, 3, 4, 5?

Подумайте, що спільного у всіх цих задачах? У чому полягає відмінність? Сьогодні на уроці ми будемо це з'ясувати.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Факторіалом називають добуток n послідовних натуральних чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n!$ (n -факторіал). $0! = 1$, $1! = 1$.

Наприклад, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$; $2! = 1 \cdot 2 = 2$; $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Перестановкою з n елементів називають будь-яку впорядковану множину з n елементів.

$P_n = n!$ — формула числа перестановок без повторень (тобто кожен елемент, що входить у комбінацію, поданий у єдиному екземплярі).

Повернемося до задачі 1. Кількість різних п'ятицифрових чисел, які можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, не повторюючи цифри в одному числі, дорівнює $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Розміщенням з n елементів по k називають будь-яку впорядковану множину з k елементів, складену з елементів n -елементної множини.

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ — формула числа розміщень без повторень.

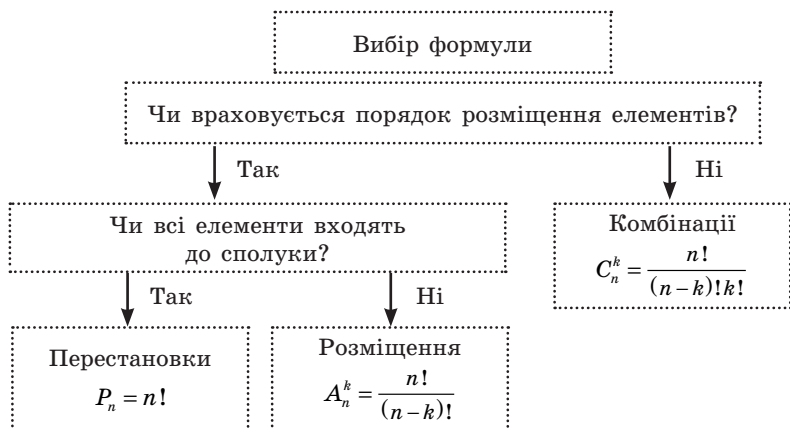
Розглянемо задачу 2. Кількість трицифрових чисел, які можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що цифри не повторюються, дорівнює $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$.

Комбінацією без повторень із n елементів по k називають будь-яку k -елементну підмножину n -елементної множини.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{— формула числа комбінацій без повторень.}$$

Повернемося до задачі 3. У цій задачі не має значення порядок розміщення двох цифр, які вибираємо із даних п'яти цифр, тобто способів вибору двох цифр буде $C_5^2 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10$.

Під час розв'язування комбінаторних задач зручно користуватися такою схемою.



VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

- Скількома способами можна скласти список із 6 учнів?
Розв'язання. Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_6 = 6! = 720$ (способами). *Відповідь:* 720 способами.
- Скількома способами можна розмістити 8 осіб за столом, біля якого стоїть 8 стільців?
Розв'язання. Оскільки порядок розміщення елементів враховується і всі елементи входять до сполуки, то $P_8 = 8! = 40\,320$ (способами). *Відповідь:* 40 320 способами.

3. Скільки існує трицифрових чисел, у яких усі цифри непарні й різні?

Розв'язання. Усього непарних цифр 5. Оскільки порядок розміщення елементів враховується й до сполуки входять не всі цифри, а тільки три, то таких чисел буде $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 60$.

Відповідь: 60.

4. Скільки існує трицифрових чисел, у яких усі цифри парні й різні?

Розв'язання. Усього парних цифр 5. Тоді можна скласти трицифрових чисел усього A_5^3 , але серед них будуть і ті, що мають нуль на першому місці. Таких «неправильних» чисел буде A_4^2 . Отже, чисел, що нас цікавлять, буде $A_5^3 - A_4^2 = \frac{5!}{2!} - \frac{4!}{2!} = \frac{5! - 4!}{2!} = \frac{120 - 24}{2} = \frac{96}{2} = 48$. *Відповідь:* 48.

5. Скількома способами можна вибрати із 28 учнів класу трьох учасників спортивних змагань?

Розв'язання. Оскільки порядок розміщення елементів не враховується, то $C_{28}^3 = \frac{28!}{3! \cdot 25!} = \frac{26 \cdot 27 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3276$ (способами). *Відповідь:* 3276 способами.

6. Скількома способами можна вибрати трьох чергових із 20 учнів класу?

Розв'язання. Оскільки порядок розміщення елементів не має значення, то $C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$ (способами). *Відповідь:* 1140 способами.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування

Укажіть формули, які будуть застосовані для розв'язування таких задач.

1. Скількома способами із 9 членів комісії можна вибрати голову, заступника й секретаря? (*Відповідь:* A_9^3)
2. Скількома способами групу із 20 осіб можна розбити на дві підгрупи по 10 осіб? (*Відповідь:* C_{20}^{10})
3. Скількома способами можна скласти розклад із 6 уроків на день за умови, що жоден урок не стоїть у розкладі двічі? (*Відповідь:* P_6 .)

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 19	[3]: § 21, п. 3
С	№ 647 (а, б), 651	с. 438, № 1, 2; № 383, 385
Д	№ 662	с. 438, № 3–5; № 384
В	№ 664 (а)	№ 390, 395

Індивідуально

Команда із 5 осіб виступає у змаганнях, у яких беруть участь ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови що жодне місце на змаганнях не може бути поділено? (Відповідь: $A_{25}^5 = 6\,375\,600$.)

УРОК № 41

ТЕМА. ЗАСТОСУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ КОМБІНАТОРИКИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПОДІЙ.

Мета уроку: показати учням можливість використання формул комбінаторики для обчислення ймовірності подій; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, обчислювальні навички; виховувати інтерес до математики, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні обчислювати ймовірність події, застосовуючи комбінаторні схеми.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Самостійна робота

Варіант 1

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть: $\frac{P_3 + P_5}{P_4}$.

А $\frac{3}{4}$

Б $5\frac{1}{4}$

В 2

Г 24

2. Обчисліть: C_7^5 .
 А 21 Б 42 В 1 Г 2
3. Обчисліть: A_6^4 .
 А 24 Б 6 В 4 Г 360
4. Скільки «слів» можна скласти із літер, що входять до слова «лікар», шляхом їх перестановки?
 А 4 Б 8! В 6! Г 5!
5. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 1; 3; 4; 7; 8?
 А 5! Б 4! В 5 Г 120
6. Скількома способами з коробки, у якій лежать 6 однакових куль, можна витягти 4 кулі?
 А 4 Б 20 В 15 Г 6

В а р і а н т 2

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть: $\frac{P_2 + P_3}{P_4}$.
 А 5 Б 2 В $\frac{1}{3}$ Г 6
2. Обчисліть: C_8^6 .
 А 56 Б 28 В 1 Г 2
3. Обчисліть: A_5^3 .
 А 6 Б 2 В 20 Г 60
4. Скільки «слів» можна скласти із літер, що входять до слова «річка», шляхом їх перестановки?
 А 5! Б 4 В 4! Г 5
5. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти із цифр 2; 3; 4; 6; 9?
 А 120 Б 5! В 60 Г 24
6. Скількома способами з коробки, у якій лежать 6 однакових куль, можна витягти 3 кулі?
 А 120 Б 20 В 30 Г 3

Відповіді до самостійної роботи

В а р і а н т 1. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. Г. 5. Г. 6. В.

В а р і а н т 2. 1. В. 2. Б. 3. Г. 4. А. 5. А. 6. Б.

Учні здійснюють взаємоперевірку за відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Розглянемо задачу. У коробці лежать 20 куль, із яких 12 білих, решта зелені. Із коробки навмання виймають дві кулі. Якою є ймовірність того, що вони білі?

Що необхідно знати для обчислення ймовірності цієї події? Як обчислити загальну кількість елементарних подій експерименту; кількість елементарних подій, які сприяють події «вийняти дві білі кулі»? Отут на допомогу теорії ймовірностей і приходить комбінаторика. Сьогодні розглянемо приклади розв'язування таких задач.

IV. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Повернемося до обговорюваної нами задачі й розв'яжемо її.

Розв'язання. Загальна кількість елементарних подій дорівнює числу способів, якими можна з 20 куль вибрати дві. Оскільки порядок розміщення елементів не має значення, то

$$n = C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190.$$

Кількість елементарних подій, які сприяють події «вийняти 2 білі кулі», дорівнює числу способів, якими можна вийняти 2 білі кулі з 12 білих куль, тобто числу комбінацій із 12 елементів по 2.

Отже, $m = C_{12}^2 = \frac{12!}{2! \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$. Тоді подія A — «вийняти 2 білі

кулі» — настане з імовірністю $P(A) = \frac{66}{190} = \frac{33}{95}$. *Відповідь:* $\frac{33}{95}$.

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. З коробки, у якій лежать 8 білих і 12 чорних куль, навмання виймають 5 куль. Якою є ймовірність того, що 2 вийняті кулі чорні, а 3 — білі?

Розв'язання. Усього в коробці $8+12=20$ (куль). Загальна кількість елементарних подій дорівнює числу способів, якими можна з 20 куль вибрати 5, тобто

$$n = C_{20}^5 = \frac{20!}{5! \cdot 15!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 16 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 3.$$

Число способів, якими можна вибрати з 12 чорних дві кулі, дорівнює $C_{12}^2 = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$, а число способів, якими мож-

на вибрати з 8 білих куль три, дорівнює $C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{1 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$.

Оскільки треба, щоб одночасно було вийнято 2 чорні та 3 білі кулі, то кількість елементарних подій, які сприяють події «вийняти дві чорні та три білі кулі», дорівнює $C_{12}^2 \cdot C_8^3$; $m = 66 \cdot 56$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{56 \cdot 66}{16 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 3} = \frac{77}{323}. \text{ Відповідь: } \frac{77}{323}.$$

2. Набираючи номер телефону, абонент забув три останні цифри. Тож, пам'ятаючи, що цифри в наборі різні, набрав їх навмання. Якою є ймовірність того, що номер набрано правильно?

Розв'язання. Загальна кількість елементарних подій дорівнює числу способів, якими можна вибрати три цифри з 10, з огляду на порядок, у якому взято цифри, тобто числу розміщень із 10 елементів по 3. $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$. Кількість елементарних подій, які сприяють події «номер набрано правильно», дорівнює 1; $m = 1$. Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{720}$. Відповідь: $\frac{1}{720}$.

3. Користуючись цифрами 1; 2; 3; 4; 5 учень склав невідоме вам п'ятизначне число. Якою є ймовірність того, що ви одразу вгадаєте це число?

Розв'язання. Усього п'ятицифрових чисел $n = P_5 = 5! = 120$. Тільки одне з них буде правильно вгаданим, тобто $m = 1$. Отже,

$$P(A) = \frac{1}{120}. \text{ Відповідь: } \frac{1}{120}.$$

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ



При підрахунку ймовірності події доцільно застосовувати формули комбінаторних сполук.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 22	[3]: § 21, п. 3
С	№ 734	№ 387
Д	№ 746	№ 392
В	№ 748 (в)	№ 394

Індивідуально

У коробці лежать 15 червоних, 9 синіх і 6 зелених куль однакового розміру. Навмання виймають 6 куль. Якою є ймовірність того, що вийнято 1 зелену, 2 сині та 3 червоні кулі? (Відповідь: $\frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{24}{145}$.)

$$\text{відь: } \frac{C_{15}^3 \cdot C_9^2 \cdot C_6^1}{C_{30}^6} = \frac{24}{145}.)$$

ТЕМА. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИСТИКУ.

Мета уроку: ознайомити учнів з поняттями вибірки, статистичного ряду, об'єму вибірки, частоти й відносної частоти вибірки, зі способами подачі статистичних даних; розвивати уявлення про математичну статистику як розділ математики; виховувати інтерес до пізнання нового.

Очікувані результати: учні повинні знати основні поняття математичної статистики й способи подачі статистичних даних.

Основні поняття: статистичний ряд, вибірка, об'єм вибірки, варіаційний ряд, частота, відносна частота вибірки, варіанта.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ**

Учитель збирає зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ **Фронтальна бесіда**

1. Що вивчає математична статистика?
2. Які поняття пов'язані у вас із цим розділом математики?

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ** **Слово вчителя**

У повсякденному житті кожен з нас якоюсь мірою стикається зі збиранням інформації та її опрацюванням. Щоденний облік відсутніх у класі, облік успішності за семестр, анкетування, реєстрація цін на продукти, телефонне анкетування — усе це приклади статистичних спостережень, які опрацьовує математична статистика. На цьому і кількох наступних уроках ви згадаєте відомості про математичну статистику та набудете нових знань.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ **Фронтальне опитування**

Учні самостійно вивчають матеріал за підручником і потім відповідають за таким планом.

1. Що вивчає математична статистика?
2. Основні поняття математичної статистики: генеральна сукупність, вибірка, варіанта, варіаційний ряд, об'єм вибірки, частота, відносна частота.
3. Способи подання статистичних даних.

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Із партії, що складається з 1000 деталей, для контролю якості взяли 300. Визначте: а) об'єм генеральної сукупності; б) об'єм вибірки. (Відповідь: а) 1000 деталей; б) 300 деталей.)
2. Економіст, аналізуючи тарифні розряди робітників цеху, виписав тарифні розряди 20-ти осіб: 4; 4; 3; 2; 5; 2; 3; 5; 4; 3; 3; 2; 5; 4; 5; 4; 6; 3; 4; 5. Запишіть статистичний ряд цієї вибірки й складіть таблицю розподілу робітників за тарифними розрядами.
Розв'язання. Статистичний ряд: 2; 2; 2; 3; 3; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5; 5; 6.

Статистична таблиця

Тарифний розряд x_i	2	3	4	5	6
Кількість робітників n	3	5	6	5	1

3. Користуючись статистичною таблицею до завдання 2, визначте: а) варіанти ряду; б) частоту варіанти 4; в) відносну частоту робітників третього розряду. (Відповідь: а) 2; 3; 4; 5; 6; б) 6; в) 25 %).

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учні розв'язують задачі в парах із подальшим обговоренням розв'язань колективно.

1. Взуттєвий цех має випустити 2000 пар жіночих туфель певної моделі. Для визначення того, скільки пар взуття необхідно випустити і якого розміру, було встановлено розмір взуття у 100 жінок, вибраних випадково. Розподіл розміру взуття за частотами подано в таблиці.

Розмір взуття	34	35	36	37	38	39	40	41
Частота	3	5	18	24	22	17	8	3

Скільки туфель різного розміру треба виготовити цеху?

Розв'язання. Обчислимо відносну частоту кожної варіанти.

Розмір взуття	34	35	36	37	38	39	40	41
Частота	3	5	18	24	22	17	8	3
Відносна частота	$\frac{3}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{24}{100}$	$\frac{22}{100}$	$\frac{17}{100}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{3}{100}$
Кількість пар взуття	60	100	360	480	440	340	160	60

2. Молокозавод випускає молоко, що має різний вміст жиру. У магазині було проведено опитування 75 покупців, вибраних випадково, про те, молоку якої жирності вони віддають перевагу. Результати опитування подано в таблиці.

Жирність молока, %	0	0,5	1	2	2,5	3,2	5
Частота	8	4	5	22	25	8	3

Дайте рекомендації молокозаводу щодо обсягу випуску молока різної жирності, якщо молокозавод повинен випускати 3000 л молока щодня.

Розв'язання. Обчислимо відносну частоту кожної варіанти.

Жирність молока, %	0	0,5	1	2	2,5	3,2	5
Частота	8	4	5	22	25	8	3
Відносна частота	$\frac{8}{75}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{5}{75}$	$\frac{22}{75}$	$\frac{25}{75}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{3}{75}$
Кількість молока, л	320	160	200	880	1000	320	120

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

1. Які задачі розв'язує математична статистика?
2. Як ви розумієте терміни «генеральна сукупність», «вибірка»?
3. Що таке варіанта?
4. Як обчислюється відносна частота?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 20	[3]: § 22, п. 1
С	№ 679	№ 398 (1)
Д	№ 685	№ 400 (1)
В	№ 689	№ 399 (1–4)

Індивідуально

Серед випадковим чином вибраних 50 хлопців, які носять бейсболки, провели опитування про колірні переваги для цього виду головних уборів. Результати опитування подано в таблиці.

Колір	Чорний	Білий	Червоний	Жовтий	Синій	Зелений
Частота	13	10	9	3	7	8

Надати рекомендації швейній фабриці щодо кількості випуску бейсболок кожного кольору, якщо фабрика має випустити 10 000 бейсболок.

УРОК № 43

ТЕМА. **ГРАФІЧНЕ ПОДАННЯ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ВИБІРКУ.**

Мета уроку: показати учням можливість подання статистичної інформації у вигляді полігона й гістограми; учити будувати полігон частот для заданого статистичного розподілу вибірки; розвивати уявлення про математику як прикладну науку; виховувати працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розуміти, як подавати інформацію у вигляді полігона й гістограми; уміти пояснити подану в графічному вигляді статистичну інформацію, будувати полігон і гістограму.

Основні поняття: полігон, гістограма.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні коментують з місця розв'язання домашнього завдання і здійснюють взаємоперевірку теорії.

Орієнтовні запитання

1. Що таке вибірка; генеральна сукупність?
2. Що називають об'ємом сукупності?
3. Що таке варіанта?
4. Що називають варіаційним рядом?
5. Як знайти відносну частоту варіанти?

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Статистичні відомості часто зображують за допомогою стовпчастих і кругових діаграм. Це зручно і наочно, і ви вже вмієте будувати такі діаграми. Проте, крім цих способів графічного зображення статистичних даних, існують й інші — з ними ви сьогодні й ознайомитеся.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учні самостійно вивчають, як будуються полігон частот і гістограма, що означають ці терміни, у яких випадках доцільно використовувати гістограму, а в яких полігон частот.

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

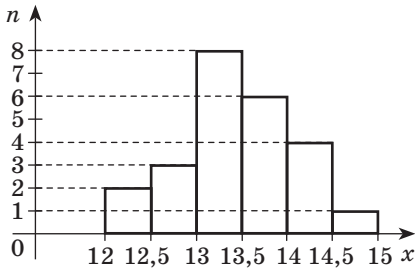
Робота в парах

Учні розв'язують задачі в парах, а потім звіряють розв'язання зі зразком, наданим учителем.

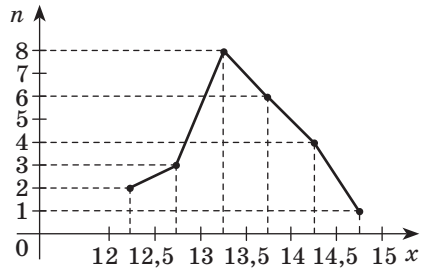
1. Побудуйте гістограму й полігон частот, заданих таблицею з наведеними результатами забігу на 100 м, у якому взяли участь 24 учні 11-го класу.

Час, витрачений на подолання 100 м, с	12–12,5	12,5–13	13–13,5	13,5–14	14–14,5	14,5–15
Кількість учнів	2	3	8	6	4	1

Розв'язання. На осі абсцис відкладемо інтервали $x_{i+1} - x_i = 0,5$. Над кожним з інтервалів побудуємо прямокутник, висота якого дорівнюватиме відповідній частоті, і отримаємо гістограму (рис. 1, а). Послідовно сполучивши середини верхніх основ прямокутників ламаюю, отримаємо полігон частот (рис. 1, б).



а



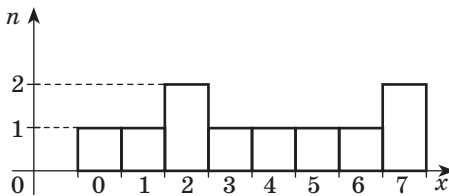
б

Рис. 1

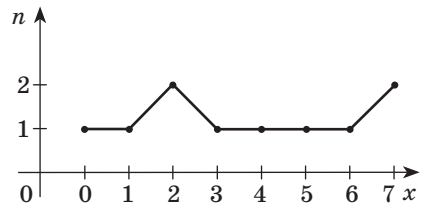
2. Задано вибірку 4; 5; 3; 2; 1; 2; 0; 7; 7; 6. Складіть частотну таблицю й таблицю відносних частот. Побудуйте гістограму й полігон частот (рис. 2, а, б).

Розв'язання

Варіанта	0	1	2	3	4	5	6	7
Частота	1	1	2	1	1	1	1	2
Відносна частота	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$



а



б

Рис. 2

3. У таблиці наведено результати виконання домашнього завдання, заданого на канікули. Проілюструйте полігоном заданий розподіл частот.

Кількість розв'язаних задач	2	3	4	6	8
Кількість учнів, що розв'язали задачі	10	6	1	3	1

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Що таке полігон? Як його побудувати?
2. Як побудувати гістограму?
3. У яких випадках рекомендується подавати статистичну інформацію в гістограмі?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 21	[3]: § 22, п. 2
С	№ 700	№ 398 (3)
Д	№ 705	№ 400 (2)
В	№ 712	№ 400

УРОК № 44

ТЕМА. **ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИБІРКИ: РОЗМАХ ВИБІРКИ, МОДА, МЕДІАНА, СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ.**

Мета уроку: ознайомити учнів з поняттями розмаху вибірки, моди, медіани й середнього значення вибірки; сформувані вміння знаходити для вибірки її центральні тенденції; розвивати пам'ять, увагу; виховувати інтерес до статистики.

Очікувані результати: учні повинні вміти пояснювати зміст середніх показників і характеристик вибірки; знаходити числові характеристики вибірки даних.

Основні поняття: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення вибірки.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання, та пропонує виконати самоперевірку за записами, підготовленими заздалегідь на відкидній дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальна бесіда

1. Що називають середнім арифметичним кількох чисел? Як його знайти?
2. Запишіть формулу середнього геометричного чисел a і b .
3. Чи в будь-якому варіаційному ряді можна вказати найбільше і найменше значення випадкової величини?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

У таблиці наведено результати опитування юнаків з метою виявлення розміру взуття, що користується найбільшим попитом.

Розмір взуття	38	39	40	41	42	43	44
Кількість пар взуття	2	6	18	16	10	5	3

Як бачимо, найчастіше зустрічається взуття 40-го розміру. Тобто виробник випускатиме найбільшу кількість взуття саме 40-го розміру. Що це характеризує вибірку? Або, як кажуть, що є центральними тенденціями вибірки? Ви дізнаєтеся про все це сьогодні на уроці.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Розмах вибірки — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.

Наприклад, якщо ряд даних має вигляд 2; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 7; 9, то розмах вибірки буде $R = 9 - 2 = 7$.

Мода — це значення випадкової величини, що зустрічається частіше за інші.

Наприклад, у ряді 2; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 7; 9 найчастіше зустрічається цифра 3. Отже, мода вибірки $Mo = 3$.

Медіана — це серединне значення впорядкованого ряду значень випадкової величини.

Наприклад, у ряді 2; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 7; 9, у якому дев'ять членів, медіана — це число 5, що стоїть посередині, а в ряді 2; 3; 3; 3; 5; 6; 6; 7; 9; 12, у якому 10 членів, медіана — це середнє арифметичне

двох чисел, що стоять посередині, тобто $Me = \frac{5+6}{2} = 5,5$.

Середнім значенням вибірки (позначають \bar{X}) називається середнє арифметичне всіх чисел ряду даних вибірки.

Наприклад, нехай величина X задана таблицею розподілу за частотами.

x_i	3	4	5	7
n_i	5	2	2	1

$$\text{Тоді } \bar{X} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1}{10} = \frac{15 + 8 + 10 + 7}{10} = 4.$$

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в малих групах

Учні розв'язують задачі з подальшим усним обговоренням результатів.

- Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення ряду даних деякої випадкової величини X : 1; 1; 2; 2; 2; 3; 4; 4; 5.

Розв'язання.

Розмах: $R = 5 - 1 = 4$. Мода: $Mo = 2$. Медіана: $Me = 2$.

$$\text{Середнє значення: } \bar{X} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{9} = \frac{24}{9} = 2\frac{2}{3}.$$

- Знайдіть розмах, моду, медіану й середнє значення сукупності значень випадкової величини X , заданої таблицею розподілу за частотами.

x_i	-1	3	4	5	7
n_i	2	3	4	4	1

Розв'язання.

$$R = 7 - (-1) = 8; Mo_1 = 4, Mo_2 = 5; Me = \frac{4+4}{2} = 4;$$

$$\bar{X} = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 + 7 \cdot 1}{14} = \frac{50}{14} = 3\frac{4}{7}.$$

- На уроці фізкультури учениці 11-го класу, стрибаючи у висоту, показали такі результати (у см): 90; 125; 125; 130; 130; 135; 135; 135; 140; 140; 140. Знайдіть моду, медіану й середнє значення цієї сукупності даних.

Розв'язання.

$$Mo_1 = 135; Mo_2 = 140; Me = 135;$$

$$\bar{X} = \frac{90 + 125 \cdot 2 + 130 \cdot 2 + 135 \cdot 3 + 140 \cdot 3}{11} = \frac{1425}{11} = 129\frac{6}{11}.$$

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Що таке мода? Як її визначають? Де застосовують?
2. Де використовується мода?
3. Що таке медіана? Як визначають медіану даної вибірки?
4. Що таке середнє значення вибірки?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 20	[3]: § 22, п. 3
С	№ 674	№ 398 (2), 399 (3)
Д	№ 682	№ 401
В	№ 686	№ 402

УРОК № 45

ТЕМА. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал з теми «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики»; підготувати учнів до контрольної роботи; розвивати самостійність, пам'ять, увагу, уміння аналізувати, виконувати роботу за визначений час; виховувати наполегливість, уміння працювати в групі.

Очікувані результати: учні повинні вміти пояснювати зміст середніх показників і характеристик вибірки; знаходити числові характеристики вибірки.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

На цьому етапі уроку можна провести самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], СР 15.

☑ Самостійна робота

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

Варіант 1

Варіант 2

1. Знайдіть моду для вибірки, заданої рядом:

6; 7; 3; 2; 1; 2; 0; 4; 5; 6; 9

2; 8; 1; 4; 0; 3; 2; 1; 2; 3

А 9 Б 2 В 0 Г 9 і 6

А 2 Б 8 В 0 Г 3 і 2

2. Знайдіть медіану для вибірки, заданої рядом:

5; 1; 2; 4; 0; 2; 6; 4; 9; 1; 3

6; 6; 4; 3; 2; 3; 1; 8; 8; 9

А 3 Б 4 В 2 Г 6

А 6 Б 5 В 9 Г 8

3. Знайдіть середнє значення сукупності даних для вибірки, заданої статистичним рядом:

x	3	4	5	7
n	5	4	6	5

x	5	8	8	9
n	6	3	7	4

А 4,6 Б 4,7 В 4,8 Г 5

А 7 Б 7,2 В 7,4 Г 7,3

Достатній і високий рівні (6 балів)

4. Побудуйте: а) полігон частот; б) гістограму для вибірки, заданої статистичним рядом:

x	1	3	5	7
n	6	8	9	2

x	1	3	5	7
n	7	2	5	8

Учні здійснюють взаємоперевірку в парах за відповідями, підготовленими заздалегідь учителем на дошці.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. Див. рис. 1, а, б.

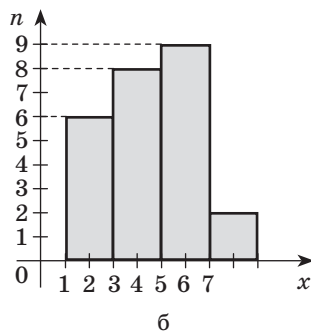
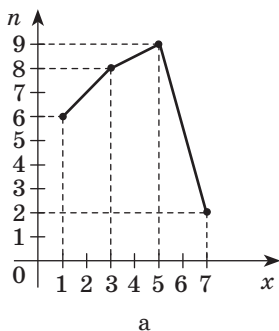


Рис. 1

Варіант 2. 1. А. 2. Б. 3. Г. 4. Див. рис. 2, а, б.

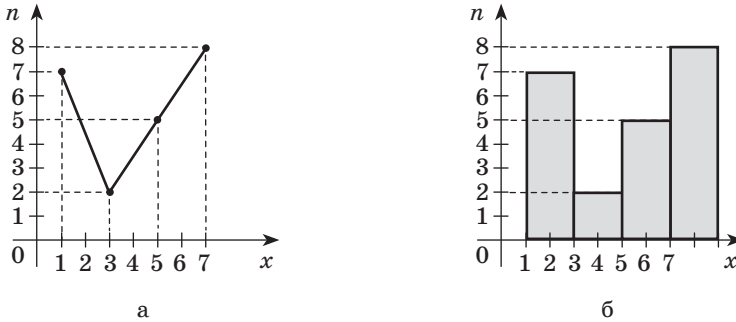


Рис. 2

III. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Робота в групах

Учні об'єднуються для подальшої роботи в гетерогенні групи. Групи ставлять одна одній запитання з теорії, заздалегідь підготовлені вдома. Якщо група, яка отримала запитання, не може відповісти на нього, то відповідає група, яка поставила це запитання.

Орієнтовні запитання

Теорія ймовірностей

1. Яку подію називають випадковою? Наведіть приклад.
2. Наведіть приклади вірогідних подій; неможливих подій.
3. Що називають частотою події A ?
4. Що називають відносною частотою події A ?
5. Дайте класичне визначення ймовірності події A .

Елементи комбінаторики

1. Сформулюйте правило суми.
2. Сформулюйте правило добутку.
3. Запишіть формулу числа перестановок P_n .
4. Запишіть формулу числа розміщень A_n^k .
5. Запишіть формулу числа комбінацій C_n^k .

Математична статистика

1. Що називають вибіркою?
2. Що називають розмахом вибірки?
3. Що таке мода вибірки?
4. Що таке медіана вибірки?
5. Що називають середнім значенням вибірки?

IV. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Групи отримують картки з однаковими завданнями, над якими працюють протягом визначеного вчителем часу, а потім пояснюють біля дошки розв'язання хоча б одного завдання.

Картка для роботи групи

- У ящику лежать 10 однакових за розміром кульок: 5 зелених, 2 червоні, 3 білі. Якою є ймовірність того, що навмання взята кулька є: а) червоною; б) небілою?
- Серед 40 кавунів 15 кавунів спілих. Вибрали два кавуни. Якою є ймовірність того, що вибрані кавуни спілі?
- Для вибірки, заданої рядом 4; 5; 3; 2; 1; 2; 0; 7; 7; 8, складіть статистичний ряд, знайдіть моду, медіану, середнє значення й побудуйте полігон частот.

Розв'язання до картки

- Оскільки всього кульок 10, то загальна кількість елементарних подій $n = 10$. Тоді:
 - червоних кульок 2, звідси кількість елементарних подій, які сприяють події A — «взяли червону кульку», буде $m = 2$.
Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{10} = 0,2$;
 - небілих кульок 7, звідси $m = 7$ і $n = 10$, якщо подія B — «взяли небілу кульку», то $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{7}{10} = 0,7$.

Відповідь: а) 0,2; б) 0,7.

- Вибрати 2 кавуни із сорока можна C_{40}^2 способами, тобто $n = C_{40}^2$. Вибрати два спілі кавуни із 15 можна C_{15}^2 способами, тобто $m = C_{15}^2$. Тоді ймовірність події A — «вибрані два кавуни

$$\text{спілі} \text{» — буде } P(A) = \frac{C_{15}^2}{C_{40}^2} = \frac{15! \cdot 2! \cdot 38!}{13! \cdot 2! \cdot 40!} = \frac{\overset{7}{14} \cdot \overset{1}{15}}{\underset{13}{39} \cdot \underset{4}{40}} = \frac{7}{52}.$$

Відповідь: $\frac{7}{52}$.

3.

x	0	1	2	3	4	5	7	8
n	1	1	2	1	1	1	2	1

0; 1; 2; 2; 3; 4; 5; 7; 7; 8. $Mo_1 = 2$; $Mo_2 = 7$; $Me = \frac{3+4}{2} = 3,5$.

$$\bar{X} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1}{10} = 3,9.$$

Полігон частот (рис. 3).

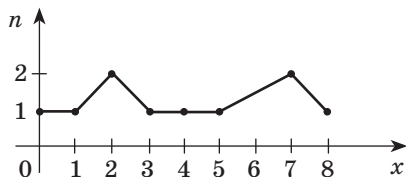


Рис. 3

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Групи рецензують відповіді одна одної.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 23	[3]: § 22
С	с. 181, СР 5	с. 464, зразок КР 7
Д		
В		

УРОК № 46

ТЕМА. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики»; розвивати розумову діяльність, уміння застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати самостійність, організованість.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати відносну частоту події, ймовірність події, користуючись її визначенням і комбінаторними схемами; пояснювати зміст середніх показників і характеристик вибірки; знаходити числові характеристики вибірки даних.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель налаштовує учнів на написання контрольної роботи, звертає увагу на необхідність надати докладне пояснення до розв'язання завдань 7–9, а в останньому завданні застосувати комбінаторні схеми й формули.

На цьому етапі уроку можна провести контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [4], КР 6.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

Контрольна робота № 4

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. У коробці лежать 5 чорних, 6 червоних, 9 зелених кульок. Із коробки навмання виймають одну кульку. Знайдіть імовірність того, що вона буде чорною.

А $\frac{5}{14}$

Б $\frac{1}{4}$

В $\frac{1}{3}$

Г $\frac{5}{11}$

2. Підкидають гральний кубик двічі. Знайдіть імовірність того, що в сумі випаде більше ніж 9 очок.

А $\frac{1}{6}$

Б $\frac{4}{9}$

В $\frac{5}{36}$

Г $\frac{1}{9}$

3. У вазі лежать 5 шоколадних цукерок і 8 карамельних. Скількома способами можна вибрати шоколадну або карамельну цукерку?

А 3

Б 45

В 13

Г 40

4. Знайдіть розмах для вибірки, заданої рядом 4; 8; 9; 3; 2; 3; 2; 11.

А 7

Б 8

В 15

Г 9

5. Знайдіть медіану для вибірки, заданої рядом 5; 6; 4; 4; 10; 12; 8; 9; 8; 2.

А 7

Б 8

В 6

Г 10

6. Знайдіть моду для вибірки, заданої рядом 2; 3; 3; 6; 7; 9; 3; 7.

А 3

Б 7

В 9

Г 2

Достатній рівень (3 бали)

- У коробці лежать цукерки, з яких 21 цукерка у зелених обгортках, а решта — у червоних. Знайдіть кількість цукерок у червоних обгортках, якщо ймовірність витягти навмання цукерку в червоній обгортці дорівнює 0,3.
- Середній вік 11 футболістів команди становить 21 рік. Під час гри одного футболіста вивели з поля, після чого середній вік решти гравців становив 20 років. Скільки років футболісту, який залишив поле?

Високий рівень (3 бали)

- У вазі стоять 10 білих і 5 червоних троянд. Визначите, скількома способами можна вибрати букет, що складається із двох білих і однієї червоної троянди.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

- У коробці лежать 5 чорних, 6 червоних, 9 зелених кульок. Із коробки навмання виймають одну кульку. Знайдіть імовірність того, що вона буде червоною.

А $\frac{3}{7}$ Б $\frac{2}{3}$ В $\frac{3}{10}$ Г $\frac{2}{15}$

- Підкидають гральний кубик двічі. Знайдіть імовірність того, що в сумі випаде менше ніж 5 очок.

А $\frac{7}{36}$ Б $\frac{1}{9}$ В $\frac{5}{9}$ Г $\frac{1}{6}$

- У вазі лежать 5 шоколадних цукерок і 8 карамельних. Скількома способами можна взяти одну шоколадну й одну карамельну цукерки?

А 40 Б 13 В 3 Г 45

- Знайдіть розмах для вибірки, заданої рядом 4; 3; 5; 10; 9; 6; 7; 12.

А 8 Б 9 В 2 Г 16

- Знайдіть медіану для вибірки, заданої рядом 4; 6; 8; 6; 2; 14; 8; 8; 12; 2.

А 8 Б 6 В 10 Г 7

- Знайдіть моду для вибірки, заданої рядом 4; 6; 7; 6; 5; 7; 7; 4; 5.

А 5 Б 7 В 4 Г 1

Достатній рівень (3 бали)

7. У коробці лежать різнокольорові кулі, з яких 60 червоних, а решта білі. Скільки білих куль у коробці, якщо ймовірність витягти навмання білу кулю дорівнює $\frac{1}{3}$?
8. Середній вік 8 шахістів становить 18 років. Коли один із шахістів занедужав, то середній вік решти спортсменів становив 16 років. Скільки років шахісту, що захворів?

Високий рівень (3 бали)

9. У вазі стоять 10 білих і 5 червоних троянд. Визначте, скількома способами з вази можна вибрати букет, що складається із двох червоних і однієї білої троянди.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

В а р і а н т 1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. Г. 5. А. 6. А.

7. Нехай у червоних обгортках x цукерок, тоді всього $(21+x)$ цукерок. $n = 21+x$; $m = x$. Нехай подія A — «витягли цукерку в червоній обгортці», тоді $P(A) = \frac{m}{n}$; $\frac{3}{10} = \frac{x}{21+x}$; $3x+63=10x$; $7x=63$; $x=9$. *Відповідь:* 9 куль.

8. Нехай вік футболіста, якого вивели з поля, x років. Оскільки загальний вік 11 футболістів $21 \cdot 11 = 231$ (рік), то загальний вік решти футболістів буде $(231-x)$ років, а середній вік становить 20 років. Звідси одержуємо: $231-x=20 \cdot 10$; $231-x=200$; $x=31$. *Відповідь:* 31 рік.

9. Дві білі троянди можна вибрати C_{10}^2 способами, а одну червону — C_5^1 способами. Отже, букет можна скласти $C_{10}^2 \cdot C_5^1$ способами.
 $C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$; $C_5^1 = 5$. $C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 45 \cdot 5 = 225$.

Відповідь: 225 способами.

В а р і а н т 2. 1. В. 2. Г. 3. А. 4. Б. 5. Г. 6. Б.

7. Нехай у коробці x білих куль. Тоді всього $(60+x)$ куль. $n = 60+x$, $m = x$. Нехай подія A — «витягли білу кулю», тоді $P(A) = \frac{m}{n}$; $\frac{1}{3} = \frac{x}{60+x}$; $60+x=3x$; $2x=60$; $x=30$.

Відповідь: 30 способами.

8. Нехай шахісту, який захворів, x років. Оскільки загальний вік 8 шахістів $18 \cdot 8 = 144$ (роки), то загальний вік решти шахістів буде $(144-x)$ років, а середній вік становить 16 років. Звідси одержимо: $144-x=16 \cdot 7$; $144-x=112$; $x=32$. *Відповідь:* 32 роки.

9. Дві червоні троянди можна вибрати C_5^2 способами, а одну білу — C_{10}^1 способами. Отже, букет можна скласти $C_5^2 \cdot C_{10}^1$ способами.

$$C_{10}^1 = 10; C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10; C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10 \cdot 10 = 100.$$

Відповідь: 100 способами.

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи, відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання завдань, та дає можливість ознайомитися з відповідями, заздалегідь підготовленими на відкидній дошці.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Повторити матеріал теми «Показова й логарифмічна функції».

УРОК № 45*

ТЕМА. ЕЛЕМЕНТИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.

Мета уроку: удосконалити вміння учнів застосовувати методи математичної статистики для розв'язування прикладних задач; розвивати інтелектуальні здібності учнів, ділові якості, уміння аналізувати й узагальнювати результати, працювати в групі; виховувати інтерес до знань, відповідальність.

Очікувані результати: учні пояснюють зміст середніх показників і характеристик вибірки; знаходять числові характеристики вибірки даних.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: ділова гра (застосування знань, умінь і навичок).

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель знайомить учнів із правилами ділової гри, пропонує об'єднатися в групи по 5–6 осіб. Групи мають надати допомогу, необхідну приватним підприємцям для відкриття підприємства з пошиття одягу. Кожна група проводить статистичні дослідження для одного з п'яти підприємств.

II. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Кожен підприємець зацікавлений в ефективній роботі свого підприємства й отриманні максимального прибутку, тому потребує проведення статистичних досліджень. Сьогодні кожна група продемонструє свої вміння.

III. СТАТИСТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ (ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ І ВМІНЬ)

Підприємство 1. У відділі кадрів підприємства підготували перелік деяких даних про працівників підприємства (див. таблицю).

№ з/п	Посада	Кількість працівників	Освіта
1	Директор	1	Вища
2	Заступник директора	1	Вища
3	Юрист	1	Вища
4	Головний бухгалтер	1	Вища
5	Бухгалтер	2	Вища
6	Касир	1	Середня спеціальна
7	Прасувальник	5	Середня
8	Швачка	25	Середня спеціальна
9	Швачка	15	Середня
10	Прибиральниця	2	Середня
11	Підсобний робітник	3	Середня
12	Закрійник	2	Середня спеціальна
13	Модельєр	2	Вища
14	Інженер-механік	1	Вища
15	Наладник швацьких машин	3	Середня спеціальна

Побудуйте статистичний ряд розподілу: а) за професією (посади); б) за рівнем освіти. Обчисліть у відсотках відносну частоту в ряді розподілу за рівнем освіти. Зробіть висновки, відомості подайте головному бухгалтеру для розрахунку заробітної плати.

Підприємство 2. На два робочі місця претендують три швачки. Для них установили випробний термін — тиждень, протягом якого кожна швачка виготовляє однакові вироби. Результати роботи швачок подано в таблиці.

День тижня	Кількість виготовлених виробів, шт.		
	Перша швачка x	Друга швачка y	Третя швачка z
Понеділок	54	40	55
Вівторок	52	61	53
Середа	50	50	51
Четвер	46	44	47
П'ятниця	48	55	49

Виконайте необхідні розрахунки; зробіть висновки, кому зі швачок слід віддати перевагу і запропонувати роботу.

Підприємство 3. Протягом тижня було продано пробну партію із 25 чоловічих сорочок таких розмірів: 39; 41; 42; 41; 40; 44; 41; 41; 42; 40; 41; 42; 43; 39; 40; 40; 40; 40; 41; 42; 40; 41; 43; 41; 41. Складіть варіаційний ряд, зробіть статистичний розподіл даних і побудуйте полігон частот. Зробіть висновки.

Підприємство 4. Три магазини спеціалізуються на продажу суконь. У таблиці подано відомості про ціну й кількість проданого товару. Визначте середню ціну реалізованого товару. Зробіть висновки.

	Магазин		
	перший	другий	третій
Ціна товару, грн	300	400	360
Кількість суконь, шт.	35	24	36

Підприємство 5. Для визначення попиту на чоловічі костюми проведено опитування, результати якого наведено в таблиці. Заповніть таблицю, визначте моду розміру костюма. Зробіть висновки.

Розмір костюма	46	48	50	52	54	56	58	60	62
Кількість костюмів	3	7	23	32	54	50	22	6	3
Кількість костюмів, %									

IV. ЗВІТ ГРУП (УЗАГАЛЬНЕННЯ Й СИСТЕМАТИЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОБОТИ)

Кожна група звітує про виконану роботу і надає рекомендації з розвитку певного підприємства.

Підприємство 1.

а) Статистичний ряд за професією:

Директор	Заступник директора	Юрист	Головний бухгалтер	Бухгалтер	Касир	Прасувальник	Швачка	Прибиральниця	Підсобний робітник	Закрійник	Модельєр	Інженер-механік	Наладник швацьких машин
1	1	1	1	2	1	5	40	2	3	2	2	1	3

б) Статистичний ряд за рівнем освіти:

	Освіта		
	вища	середня спеціальна	середня
<i>n</i>	9	31	25
<i>P</i> %	13,8	47,7	38,5

Висновки. Штат співробітників не виправдано великий: 65 осіб для невеликого підприємства забагато. З огляду на освіту співробітників, штат можна дещо скоротити. Наприклад, бухгалтер може поєднувати свої обов'язки з обов'язками касира. Напевно, що швачка з фаховою освітою працюватиме якісніше, отже, можливі скорочення робочих місць серед швачок, які фахової освіти не мають.

Підприємство 2. Дослідження показують, що перша й друга швачки за п'ять робочих днів виготовили 250 виробів, а третя — 255. Відповідно продуктивність перших двох — по 50 виробів за день, а третьої — 51 виріб за день. Тож варто прийняти на роботу третю швачку. Але оскільки треба взяти двох працівниць, слід вибрати ще одну швачку з перших двох.

Розглянемо відхилення від середнього показника в кожній зі швачок і обчислимо суму квадратів відхилень від середнього.

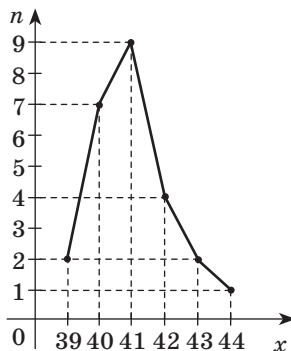
День тижня	Кількість виготовлених виробів		Відхилення від середнього		$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$
	x	y	$x - 50$	$y - 50$		
Понеділок	52	61	2	11	4	121
Вівторок	54	40	4	-10	16	100
Середа	50	50	0	0	0	0
Четвер	48	55	-2	5	4	25
П'ятниця	46	44	-4	-6	16	36
Сума	250	250	0	0	40	282

Висновки. У першій швачки сума квадратів відхилень дорівнює 40, а у другій — 282, отже, перша швачка працює стабільніше. Отже, слід взяти на вільні робочі місця першу і третю швачок.

Підприємство 3.

Розміри сорочки, x	39	40	41	42	43	44
Кількість сорочок, n	2	7	9	4	2	1

Полігон частот (див. рисунок).



Висновки. Найбільшим попитом користуються сорочки 40-го і 41-го розмірів. Їх і слід виготовляти в найбільшій кількості.

Підприємство 4. Середня ціна реалізованого товару — середнє арифметичне даних величин:

$$\frac{300 \cdot 35 + 400 \cdot 24 + 360 \cdot 36}{35 + 24 + 36} = \frac{10\,500 + 9\,600 + 12\,960}{95} = \frac{33\,060}{95} = 348 \text{ (грн)}.$$

Висновки. У третьому магазині, очевидно через його вдале розташування в центрі міста, ціну товару можна не змінювати. У другому магазині можна знизити ціну на виріб до 350 грн, а в першому магазині — підвищити до 330 грн.

Підприємство 5.

Розмір костюма	46	48	50	52	54	56	58	60	62
Кількість чоловіків	3	7	23	32	54	50	22	6	3
Кількість костюмів, %	1,5	3,5	11,5	16	27	25	11	3	1,5

Висновки. $M_0 = 54$, тобто найбільшим попитом користуються костюми 54-го розміру, які й треба виготовляти в більшій кількості.

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Представник підприємців — учитель — дякує групам за виконану роботу й відзначає, що висновки, зроблені кожною групою, дуже важливі для роботи підприємств.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Придумати три задачі прикладного характеру, для розв'язання яких необхідно використовувати елементи математичної статистики.

РЕЗЕРВНИЙ ЧАС І ПОВТОРЕННЯ

УРОКИ 47–54

Резерв навчального часу вчитель може використати на свій розсуд: для повторення окремих тем курсу, які викликали затруднення, для розв'язання задач під час підготовки до ДПА.

ГЕОМЕТРІЯ

(РІВЕНЬ СТАНДАРТУ)

ТЕМА 3. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

УРОК № 1

ТЕМА. ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ В ПРОСТОРИ.

Мета уроку: сформувати в учнів уявлення про декартову прямокутну систему координат у просторі; розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, порівняння; виховувати акуратність, зацікавленість у пізнанні нового.

Очікувані результати: учні повинні мати уявлення про декартові координати в просторі.

Основні поняття: координатні площини, вісь аплікату, апліката.

Обладнання: підручник, модель прямокутного паралелепіпеда.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель знайомить учнів зі структурою підручника, розповідає про особливості вивчення геометрії в 11-му класі, підкреслює необхідність ретельного вивчення цього предмета.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Якщо учні отримували завдання на літні канікули, то вчитель збирає зошити з розв'язаннями.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

- Що називається координатними осями; координатною площиною?
- Накресліть координатні осі та позначте точки $M(3; 2)$, $B(-2; -1)$, $C(0; -3)$, $A(-2; 0)$.
- Назвіть координати точок (рис. 1).

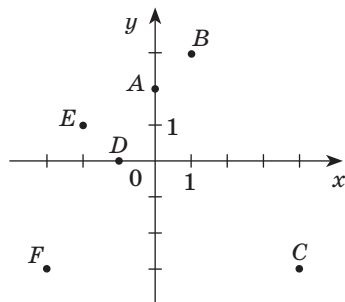


Рис. 1

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

☑ Слово вчителя

Поміркуємо, скільки чисел необхідно знати, щоб однозначно визначити положення точки на прямій? (Відповідь: одне.) Скільки чисел необхідно знати, щоб визначити положення точки на площині? (Відповідь: два.) Тобто під час руху по прямій треба знати, скільки пройти праворуч-ліворуч, під час руху по площині треба знати, скільки пройти праворуч-ліворуч і вперед-назад. Зрозуміло, що для визначення розташування точки в просторі необхідно мати три числа. Пташка, наприклад, пересувається в просторі не тільки вперед-назад і праворуч-ліворуч, а й угору-вниз. Щоб говорити про координати точки, треба насамперед ввести систему координат.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Розглянемо три взаємно перпендикулярні прямі (координатні осі) Ox , Oy , Oz зі спільною точкою O — початком координат. Ox — вісь абсцис; Oy — вісь ординат, Oz — вісь аплікат (рис. 2). Через кожну пару цих прямих проведемо координатні площини Oxy , Oxz , Oyz . Утворену в такий спосіб систему координат називають прямокутною декартовою системою координат у просторі.

Для визначення координат довільної точки A простору проведемо перпендикуляри AA_x , AA_y , AA_z до осей Ox , Oy , Oz відповідно (рис. 3).

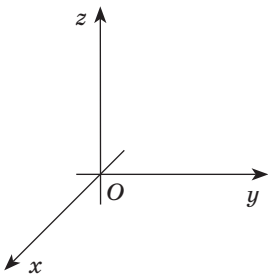


Рис. 2

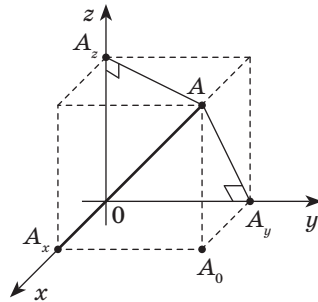


Рис. 3

Тоді координати x , y , z точок A_x , A_y , A_z на осях Ox , Oy , Oz відповідно і будуть координатами точки A у цій системі координат: $A(x; y; z)$; x — абсциса, y — ордината, z — апліката.

Для визначення координат точки A можна також провести перпендикуляр AA_0 до площини Oxy , а потім із точки A_0 провести

перпендикуляри A_0A_x і A_0A_y до осей Ox і Oy відповідно. Отримані в такий спосіб координати A_x і A_y є абсцисою й ординатою точки A . Аналогічно можна виконати побудову для аплікати.

Отже, у прямокутній декартовій системі координат кожній точці простору відповідає єдина впорядкована трійка чисел (x, y, z) , а кожній трійці чисел (x, y, z) відповідає єдина точка простору.

☑ Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Запишіть координати будь-якої точки, що належить площині:
 - а) Oxy ; б) Oxz ; в) Oyz . (Відповідь: а) $A(x; y; 0)$; б) $B(x; 0; z)$; в) $C(0; y; z)$.)
2. Якою є особливість точок, що належать осям координат? (Відповідь: вони мають дві нульові координати: наприклад, точка на осі Oy має координати $(0; y; 0)$.)
3. Назвіть координати початку координат.



У точок, які лежать у площині Oxy , апліката дорівнює нулю; у точок, що лежать у площині Oxz , ордината дорівнює нулю; у точок, які лежать у площині Oyz , абсциса дорівнює нулю.

На осі абсцис точки мають нульову ординату й аплікату; на осі ординат — нульову абсцису й аплікату; на осі аплікат — нульову абсцису й ординату.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Колективне виконання завдань під керівництвом учителя

1. Дано точки $A(2; -3; 4)$, $B(0; -3; 5)$, $C(0; 0; 3)$, $D(2; 8; 0)$. Які з них лежать у площині: а) Oxy ; б) Oyz ; в) Oxz ? Які з них лежать на осі: а) Ox ; б) Oy ; в) Oz ?
2. Дано точку $A(5; 6; 1)$. Знайдіть основи перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні осі й площини. (Відповідь: $(5; 0; 0)$; $(0; 6; 0)$; $(5; 6; 0)$; $(5; 0; 1)$; $(0; 6; 1)$; $(0; 0; 1)$.)
3. Знайдіть відстані від точки $A(1; 2; 3)$ до координатних площин, осей і початку координат.

Розв'язання. Нехай проєкціями точки A на площини Oxy , Oxz , Oyz будуть відповідно точки A_{xy} , A_{xz} , A_{yz} (рис. 4). Тоді $AA_{xy} = |z| = 1$; $AA_{xz} = |y| = 2$, $AA_{yz} = |x| = 5$. За теоремою Піфагора $AA_x = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$; $AA_y = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$, $AA_z = \sqrt{y^2 + x^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$; $AO = \sqrt{(x^2 + y^2) + z^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$.

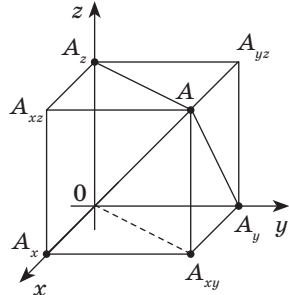


Рис. 4



Відстань від даної точки простору до початку координат дорівнює квадратному кореню із суми квадратів координат цієї точки.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Дано точку $M(2; 5; -8)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.
2. Дано точку $F(-1; 3; 7)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні осі.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 24	[3]: § 5, п. 1
С	№ 776	с. 102, запитання № 1–3, 5
Д	№ 777	с. 102, запитання № 4, 6
В	№ 778	с. 102, запитання № 7

Індивідуально

1. Знайдіть відстань від точки $A(-3; -1; 2)$ до початку координат.
2. Дано точки $A(1; -2; 6)$, $B(1; -5; -2)$ і $C(1; 0; 4)$. Якій координатній площині паралельна площина ABC ?

УРОК № 2

ТЕМА. ВІДСТАНЬ МІЖ ТОЧКАМИ В ПРОСТОРИ. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА.

Мета уроку: ознайомити учнів із формулами для знаходження відстані між двома точками в просторі та знаходження середини відрізка; сформулювати вміння застосовувати ці формули до розв'язування задач; розвивати пам'ять, увагу, просторову уяву; виховувати акуратність, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні знати формулу відстані між точками й формули координат середини відрізка та вміти їх застосовувати в найпростіших випадках.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП


II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Графічний диктант

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так» \cap , «ні» $_$, а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

Чи є правильним твердження?

1. Точка $A(0; 1; 5)$ лежить у площині Oyz .
2. Точка $B(0; 0; 5)$ лежить на осі Oy .
3. Точка $C(3; 0; 0)$ лежить на осі Ox .
4. Відстань від точки $A(2; 3; 4)$ до площини Oxy дорівнює 4.
5. Відстань від точки $A(-3; -4; 3)$ до осі Ox дорівнює 5.
6. Відстань від точки $A(1; 1; 1)$ до початку координат дорівнює 3.

Ключ-відповідь: 

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Робота в парах

Робота виконується усно з подальшою перевіркою.

1. Знайдіть відстань між точками площини: а) $M(-1; 2)$ і $N(3; 6)$; б) $P(-1; -7)$ і $F(5; 1)$; в) $A(a; b)$ і $B(c; d)$.
2. Знайдіть координати середини відрізка AB , якщо $A(2; 7)$, $B(-2; 3)$.
3. Знайдіть відстань від початку координат до точки $D(-1; 2; -2)$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Ви вже вмієте знаходити відстань від точки простору до початку координат та між двома точками площини. Сьогодні ви познайомитесь із формулою для знаходження відстані між двома точками та формулою середини відрізка в просторі.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учитель пропонує учням самостійно знайти в підручнику відповіді на такі запитання.

1. За допомогою якої формули можна знайти координати середини відрізка з кінцями в точках $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$?
2. Користуючись відповідними формулами, знайдіть: а) координати середини відрізка, обмеженого точками $F(-3; 0; 2)$ і $L(5; -4; -7)$; б) відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$; в) $M(-9; -1; 3)$ і $N(-7; 1; 4)$.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(-4; 0; 2)$, $B(-1; -2; -3)$, $C(3; -2; -6)$, $D(0; 0; -1)$.
2. Відрізок BM — медіана трикутника ABC . Знайдіть координати точки C , якщо $A(2; -9; 0)$, $M(-1; -2; -3)$. (Відповідь: $C(-4; 5; -6)$.)
3. На осі Oy знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-2; 1; 4)$ і $B(1; 2; 2)$. (Відповідь: $(0; -6; 0)$.)

Робота в парак

Учні заповнюють таблицю, ураховуючи, що точка K — середина відрізка AD .

Точка	Координати точки		
A	$(-3; 1; 5)$	$(-8; 2; 1)$	
D	$(-1; -3; 8)$		$(-9; 2; -6)$
K		$(-4; 6; -1)$	$(1; 2; 3)$

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

На цьому етапі уроку можна провести бесіду або скористатися посібником [5], СР 1.

Фронтальна бесіда

1. Як знайти відстань між двома точками в просторі?
2. Відстань від точки M до початку координат дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Якими можуть бути координати точки M ? Наведіть кілька варіантів відповіді.
3. Знайдіть координати середини відрізка BD , якщо $B(-6; 3; 0)$, $D(0; -7; -4)$.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 24	[3]: § 5, п. 3
$\square C$	№ 779 (1)	с. 111, № 1, 6
$\square D$	№ 785 (6)	№ 114
$\square B$	№ 797	с. 111, № 4

Індивідуально

Довести, що чотирикутник $ABCD$ — ромб, якщо $A(0; 2; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 2)$.

ТЕМА. **ВЕКТОРИ В ПРОСТОРИ.**

Мета уроку: сформувати поняття вектора в просторі та пов'язані з ним поняття абсолютної величини, напрям, рівності векторів; розглянути дії над векторами; розвивати просторову уяву, пам'ять, уміння проводити аналогії; виховувати наполегливість, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні розрізняти векторні і скалярні величини; знати, що таке абсолютна величина й напрям вектора, наводити означення рівних векторів; уміти виконувати операції над векторами в просторі.

Основні поняття: вектор у просторі, рівність векторів, абсолютна величина вектора, співнапрямлені та протилежно напрямлені вектори.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ;
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ**

На цьому етапі уроку можна провести бліцопитування або скористатися посібником [5], СР 2.

 Бліцопитування

1. Що називається вектором на площині?
2. Наведіть приклади векторних величин.
3. Що таке абсолютна величина вектора; напрям вектора?
4. Які вектори називаються рівними?
5. Сформулюйте правила додавання двох векторів на площині.
6. Який вектор називають різницею двох векторів?

**III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ** **Слово вчителя**

Поміркуйте над змістом приказки «Сила без голови шаліє, а розум без сили мліє». Так, якщо є сила, то треба знати, куди її спрямувати. Від цього залежить, чи буде пружина стискатися або розтягуватися, чи полетить м'яч у ворота противника або у власні та багато іншого. Вам уже, звісно, зрозуміло, що сьогодні мова йтиме про вектори, причому про вектори в просторі.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Вектор — напрямлений відрізок. Його напрям від початку до кінця позначають на рисунку стрілкою (рис. 1).

Нульовий вектор — це вектор, початок і кінець якого збігаються. На рисунку нульовий вектор позначають точкою, на письмі — символом $\vec{0}$.

Модулем вектора (абсолютною величиною) \overline{AB} називають довжину відрізка AB і позначають $|\overline{AB}|$.

Модуль нульового вектора вважають таким, що дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Ненульові вектори називають **колінеарними**, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.

Нульовий вектор вважається колінеарним будь-якому вектору.

Якщо промені AB і CD співнапрямлені, то ненульові вектори \overline{AB} і \overline{CD} співнапрямлені.

Позначення співнапрямлених векторів: $\overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$.

Якщо промені \overline{AB} і \overline{CD} протилежно напрямлені, то вектори \overline{AB} і \overline{CD} також протилежно напрямлені.

Позначення протилежно напрямлених векторів: $\overline{AB} \uparrow\downarrow \overline{CD}$.

Ненульові вектори називають **рівними**, якщо їхні модулі рівні, а вони співнапрямлені. Будь-які два нульові вектори рівні.

У просторі, як і на площині, виконуються **правило трикутника** (рис. 2, а) і **правило паралелограма** (рис. 2, б).

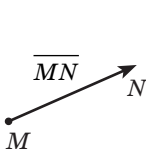
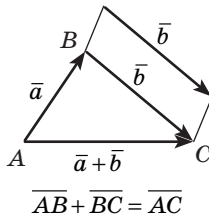
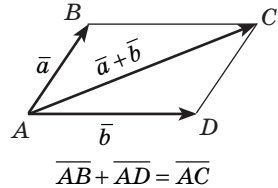


Рис. 1



а



б

Рис. 2

Узагальненням правила трикутника для додавання декількох векторів є **правило многокутника** (рис. 3).



Особливість застосування правила трикутника в просторі полягає в тому, що вектори-доданки можуть не належати одній площині — многокутник може бути просторовим (рис. 4).

У просторі для додавання векторів, які не лежать в одній площині, зручно користуватися **правилом паралелепіпеда**. Нехай вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} не лежать в одній площині та відкладені від їхнього спільного початку — точки O . Побудуємо паралелепіпед так, щоб відрізки OA , OB і OC , які зображують вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} відповідно, були його ребрами (рис. 5). Тоді за правилом паралелограма $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OE}$, $\vec{OE} + \vec{OC} = \vec{OD}$, тобто $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{OD}$. Отже, вектор-сума зображується діагоналлю паралелепіпеда, побудованого на векторах-доданках.

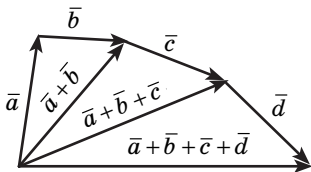


Рис. 3

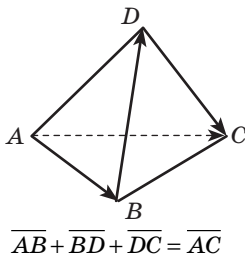


Рис. 4

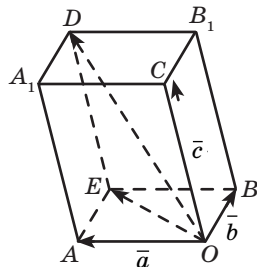


Рис. 5

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Виконання усних вправ

1. Дано прямокутний паралелепіпед (рис. 6). Назвіть співнапрямлені вектори; протилежно напрямлені вектори.
2. Дано куб (рис. 7) із ребром 2 см. Знайдіть $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

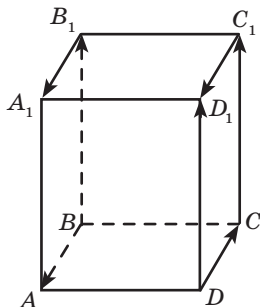


Рис. 6

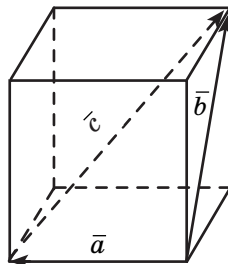


Рис. 7

- Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 8). Назвіть вектори, що дорівнюють векторам \overline{AB} , $\overline{D_1 D}$, $\overline{BA_1}$.
- Відомо, що $\overline{KL} = \overline{PN}$. Визначте, як можуть розміщуватися: а) прями KP і LN ; б) точка N і площина, яка проходить через точки K , L і P .

Розв'язання. а) Оскільки вектори \overline{KL} і \overline{PN} рівні, то вони співнаправлені й мають рівні модулі. Отже, точки K , L , P , N лежать в одній площині, прями KP і LN можуть перетинатися або збігатися; б) точка N лежить у площині KLP .

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

- У просторі дано точки A , B , C , D . Знайдіть вектор із початком і кінцем у цих точках, який дорівнює: а) $\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AD}$; б) $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{BA} - \overline{CD}$. (Відповідь: а) \overline{BD} ; б) \overline{BC} .)
- Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 9). Знайдіть вектор із початком і кінцем у вершині куба, який дорівнює: а) $\overline{B_1 B} + \overline{AC_1}$; б) $\overline{AD_1} - \overline{BC}$.

Розв'язання.

а) Оскільки $\overline{B_1 B} = \overline{C_1 C}$, то $\overline{B_1 B} + \overline{AC_1} = \overline{AC_1} + \overline{C_1 C} = \overline{AC}$; б) оскільки $\overline{BC} = \overline{AD}$, то $\overline{AD_1} - \overline{BC} = \overline{AD_1} - \overline{AD} = \overline{DD_1}$.

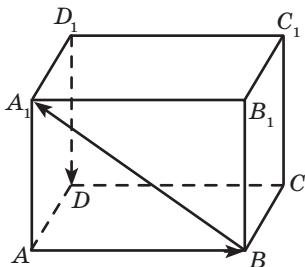


Рис. 8

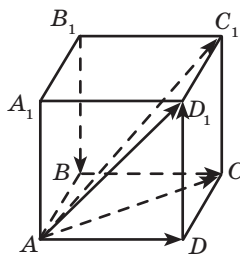


Рис. 9

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- Що називають вектором?
- Чи виконуються правило паралелограма й правило трикутника у випадку додавання векторів у просторі?
- Сформулюйте правило паралелепіпеда для додавання векторів у просторі.
- Які вектори називають рівними?
- Які вектори називають співнаправленими в просторі; протилежно напрямленими в просторі?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 25	[3]: § 4, п. 2
С	№ 807	с. 78, № 4–6; с. 93, № 80
Д	№ 819 (а, б)	с. 78, № 7, 8
В	№ 827	с. 78, № 9, 10 с. 93, № 85

Індивідуально

На рис. 10 $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, ребро якого 3 см. Запишіть вектор, який дорівнює вектору:

- а) $\overline{DC} + \overline{C_1 B_1} + \overline{DD_1}$;
 б) $\overline{B_1 A_1} + \overline{B_1 C_1} + \overline{D_1 D}$;
 в) $|\overline{B_1 D}|$.

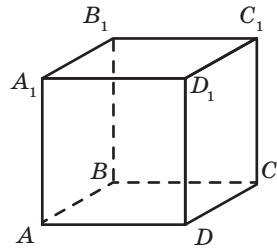


Рис. 10

УРОК № 4

ТЕМА. ВЕКТОРИ В ПРОСТОРІ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ.

Мета уроку: розглянути дію множення вектора на число в просторі; формувати вміння виконувати дії над векторами, заданими в геометричній формі; розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, робити висновки.

Очікувані результати: учні повинні вміти виконувати дії над векторами, заданими геометрично.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні, користуючись заздалегідь підготовленим на дошці рисунком, відповідають на запитання до задачі з домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування за готовим рисунком

Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1).

Назвіть:

- вектор із початком у точці D_1 , який дорівнює вектору \overline{AB} ;
- суму векторів $\overline{C_1 A_1}$ і $\overline{A_1 A}$;
- різницю векторів $\overline{B D_1}$ і $\overline{B_1 D_1}$;
- вектор $\vec{c} = \overline{AD} - \overline{AB} + \overline{D D_1}$.

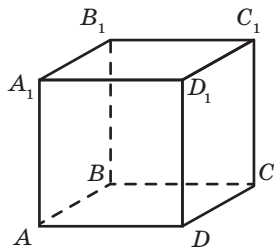


Рис. 1

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Розглянемо задачу. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 1). Укажіть вектори: а) $\overline{AA_1} + \overline{AD}$; б) $\overline{AA_1} + \overline{DC}$; в) $\frac{1}{2}\overline{CD_1} - \frac{1}{2}\overline{CA_1}$. Якщо у випадках а і б ви можете дати відповідь без труднощів, то у випадку в конкретно відповісти поки що не в змозі, адже ми ще не розглядали операцію множення вектора на число в просторі. Сьогодні ми поговоримо про це.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Фронтальна бесіда

Учитель пропонує учням згадати, як виконується множення вектора на число на площині, і дати аналогічне визначення для множення вектора на число в просторі.

Отже, добутком ненульового вектора \vec{a} на число k , відмінне від нуля, називають такий вектор \vec{b} , що:

- $|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;
- якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow \vec{a}$, якщо $k < 0$, то $\vec{b} \updownarrow \vec{a}$.

Математичний запис добутку ненульового вектора \vec{a} на число k :
 $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$. Із визначення випливає, що $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.



Із визначення добутку вектора на число випливає, що коли $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні.

VI. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Учитель пропонує повернутися до задачі, що була розглянута на початку уроку. (Розв'язання. $\frac{1}{2}(\overline{CD_1} - \overline{CA_1}) = \frac{1}{2}\overline{A_1D_1}$ (рис. 1)).

☑ Робота в малих групах

Учні працюють над розв'язуванням задач. Перша із груп, яка розв'язала задачу 3, коментує її розв'язання біля дошки.

1. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка O — точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, точки M і N — середини відрізків AA_1 і BB_1 відповідно (рис. 2). Побудуйте вектор із початком у точці A_1 , який дорівнює вектору \overline{MO} .

Розв'язання. Розглянемо прямокутник AA_1O_1O (точка O_1 — точка перетину діагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$). Нехай точка O_2 — середина відрізка O_1O . Проведемо $A_1O_2 \parallel MO$. Тоді $\overline{A_1O_2} \uparrow \uparrow \overline{MO}$, і з рівності MO і A_1O_2 (протилежних сторін паралелограма MA_1O_2O) випливає, що $\overline{MO} = \overline{A_1O_2}$.

2. Користуючись рис. 3, виразіть вектор \overline{AN} через \overline{a} , \overline{b} і \overline{c} , якщо $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, а точка N — середина ребра C_1C .

Розв'язання. За правилом трикутника $\overline{AN} = \overline{AC} + \overline{CN}$, за правилом паралелограма $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{AB} = \overline{b} + \overline{c}$. Із рівності $\overline{a} = \overline{AA_1} = \overline{CC_1}$, а також із того, що N — середина ребра CC_1 , маємо: $\overline{NC} = \frac{1}{2}\overline{a}$. Тоді $\overline{AN} = \overline{b} + \overline{c} + \frac{1}{2}\overline{a}$.

3. Точка S розміщена поза площиною трикутника ABC (рис. 4). Виразіть через вектори \overline{SA} , \overline{SB} і \overline{SC} вектори \overline{AB} , \overline{BC} і \overline{BM} , де точка M — середина відрізка AC .

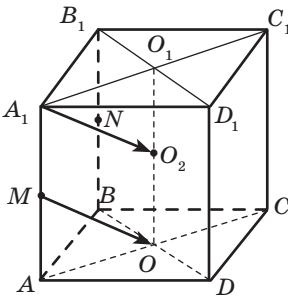


Рис. 2

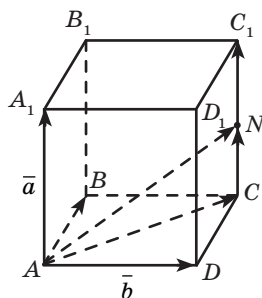


Рис. 3

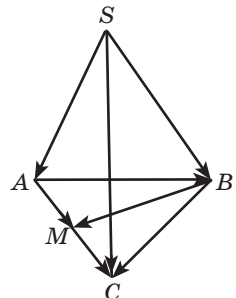


Рис. 4

Розв'язання. $\overline{AB} = \overline{SB} - \overline{SA}$; $\overline{BC} = \overline{SC} - \overline{SB}$, $\overline{AC} = \overline{SC} - \overline{SA}$. Оскільки точка M — середина відрізка AC , то $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{SC} - \frac{1}{2}\overline{SA}$.

За правилом трикутника маємо: $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, тобто $\overline{BM} = \overline{AM} - \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{SC} - \frac{1}{2}\overline{SA} - \overline{SB} + \overline{SA} = \frac{1}{2}\overline{SC} + \frac{1}{2}\overline{SA} - \overline{SB}$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

☑ Фронтальне опитування

1. Що називають добутком ненульового вектора \vec{a} на число k ($k \neq 0$)?
2. Чому дорівнює добуток $k\vec{a}$, якщо $k=0$ або $\vec{a}=\vec{0}$?
3. Що можна сказати про ненульові вектори \vec{a} і \vec{b} , якщо $\vec{b}=k\vec{a}$, де k — деяке число?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 25	[3]: § 4, пп. 2, 3
С	№ 807, 809	с. 91, № 1, 2
Д	№ 819 (в)	с. 92, № 4; с. 94, № 93
В	№ 819 (г)	с. 92, № 6; с. 94, № 94

Індивідуально

На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено точки E і F відповідно так, що $BE:EA=1:2$, $BF:FC=3:1$. Поза площиною трикутника ABC позначили довільну точку P . Виразіть вектор \overline{PE} через вектори \overline{PA} , \overline{PB} і \overline{PC} .

УРОК № 5

ТЕМА. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА В ПРОСТОРІ. ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ДОВЖИНИ ВЕКТОРА.

Мета уроку: ввести поняття координат вектора в просторі; навчити знаходити довжину вектора через його координати, визначати рівність векторів через координати; розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення, уміння проводити аналогії й узагальнювати; виховувати акуратність, працьовитість, інтерес до нових знань.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити координати вектора, заданого його початком і кінцем; обчислювати модуль вектора, заданого його координатами; доводити рівність векторів, заданих координатами.

Основні поняття: координати вектора в просторі.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальна бесіда за технологією «Мікрофон»

- Знайдіть координати вектора \overline{AB} , якщо $A(2; 3)$ і $B(-1; 4)$, та його абсолютну величину.
- Знайдіть координати вектора \overline{CD} , якщо $\overline{AB} = \overline{CD}$ і $C(5; 8)$, та його модуль.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Дій із векторами, заданими в геометричній формі, недостатньо, щоб обчислити абсолютну величину вектора. Однак розв'язання багатьох задач із фізики й техніки передбачає знаходження сили, швидкості, прискорення. Щоб мати числові характеристики векторів у просторі, введемо поняття координат вектора в просторі.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Фронтальна бесіда

- Знаючи, що на площині координати вектора визначають як різницю координат кінця і початку вектора, дайте за аналогією визначення координатам вектора в просторі. (Відповідь: координатами \overline{AB} із початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$.)
- З огляду на те, що довжина (модуль) вектора — це довжина відрізка, який зображує цей вектор, визначте модуль вектора \overline{AB} , якщо: $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. (Відповідь: $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.)
- Які координати має нульовий вектор?
- Чому дорівнює абсолютна величина нульового вектора?
- Використовуючи визначення рівних векторів через координати на площині, дайте за аналогією визначення рівних векторів у просторі. (Відповідь: два вектори в просторі рівні, якщо вони мають рівні координати.)

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учні коментують відповіді й розв'язання з місця або шляхом вибіркової перевірки біля дошки.

1. Знайдіть координати вектора \overline{AB} , якщо $A(-2; -3; -4)$ та $B(-1; -1; -1)$. Які координати вектора \overline{BA} ; вектора \overline{AO} ? (Точка O — початок координат.)
2. Знайдіть $|\overline{AB}|$, якщо $A(3; 2; 1)$, $B(1; 2; 3)$.
3. Вектор, довжина якого дорівнює $3\sqrt{3}$, має рівні координати. Знайдіть координати цього вектора.
4. Від точки A відкладено вектор $\overline{AB} = \vec{a}$. Знайдіть координати точки B , якщо $A(-1; 5; 0)$, $\vec{a}(1; -3; 0)$. (Відповідь: $B(0; 2; 0)$.)
5. Модуль вектора $\vec{a}(-8; y; 4)$ дорівнює 10. Знайдіть y . (Відповідь: $\pm\sqrt{20}$.)
6. Знайдіть координати початку і кінця вектора $\overline{AB}(-9; 1; 3)$, якщо його початок лежить на осі ординат, а кінець — у площині Oxz . (Відповідь: $A(0; -1; 0)$, $B(-9; 0; 3)$.)
7. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ із вершинами в точках $A(3; -7; 1)$, $B(2; 4; -13)$, $C(-5; 1; 9)$, $D(-4; -10; 23)$ — паралелограм.



Цю задачу можна розв'язати й координатним методом.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Дано вектор $\overline{AB}(a_1; a_2; a_3)$. Назвіть координати вектора \overline{BA} .
2. Вектор $\vec{a}(-1; -2; -3)$ відклали від початку координат. Які координати має кінець вектора \vec{a} ?
3. Дано точки $A(-3; 2; -5)$, $B(4; -6; -1)$, $C(2; 6; 11)$, $D(x; y; z)$. Відомо, що $\overline{AB} = \overline{CD}$. Знайдіть:
 - а) x, y, z ;
 - б) $|\overline{CD}|$.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 25	[3]: § 5
С	№ 812	№ 101 (1, 2), 102 (1, 2)
Д	№ 815	№ 101 (3), 102 (3)
В	№ 816	№ 108, 109

Індивідуально

Модуль вектора $\bar{k}(x; y; z)$ дорівнює 12. Знайдіть координати вектора \bar{k} , якщо $y = z = 2x$.

УРОК № 6

ТЕМА. **ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО. КОЛІНЕАРНІ ВЕКТОРИ.**

Мета уроку: формувати знання учнів про додавання векторів, множення вектора на число, умову колінеарності векторів, заданих координатами; розвивати логічне мислення, обчислювальну культуру, пам'ять, уміння проводити аналогії; виховувати працьовитість, наполегливість, самостійність.

Очікувані результати: учні повинні вміти виконувати додавання векторів, заданих у координатах, множення вектора на число; використовувати умову колінеарності векторів у просторі для установлення колінеарності векторів.

Основні поняття: колінеарність векторів у просторі.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

На цьому етапі уроку можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], СР 3.

Самостійна робота

Варіант 1

⋮

Варіант 2

1. (3 бали) Дано точки $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 0; -4)$, $C(-3; 4; 6)$, $D(-3; -4; 6)$. Знайдіть координати векторів:

а) \overline{AC} ; б) \overline{DC} ; в) \overline{BC}

⋮

а) \overline{AB} ; б) \overline{DA} ; в) \overline{BD}

Варіант 1

Варіант 2

2. (3 бали) Дано точки $A(-1; 2; 0)$, $B(1; 0; -4)$, $C(-3; 4; 6)$, $D(-3; -4; 6)$. Знайдіть модулі векторів:

а) \overline{AC} ; б) \overline{DC} ; в) \overline{BC}

а) \overline{AB} ; б) \overline{DA} ; в) \overline{BD}

3. (2 бали) Визначте координати точки $K(x; y; z)$, якщо:

$$\overline{DC} = \overline{BK}$$

$$\overline{DA} = \overline{CK}$$

4. (4 бали) Модуль вектора

4. (4 бали) Модуль вектора

$\vec{a}(-5; 2; z)$ дорівнює 7.

$\vec{b}(x; 3; 7)$ дорівнює 8.

Знайдіть z .

Знайдіть x .

Розв'язання та відповіді до самостійної роботи

Варіант 1

1. а) $\overline{AC}(-2; 2; 6)$; б) $\overline{DC}(0; 8; 0)$; в) $\overline{BC}(-4; 4; 10)$.

2. а) $|\overline{AC}| = 2\sqrt{11}$; б) $|\overline{DC}| = 8$; в) $|\overline{BC}| = 2\sqrt{33}$.

3. $x-1=0$; $x=1$. $y-0=8$; $y=8$. $z+4=0$; $z=-4$. $K(1; 8; -4)$.

4. $25+4+z^2=49$; $z^2=20$; $z=\pm\sqrt{20}$.

Варіант 2

1. а) $\overline{AB}(2; -2; -4)$; б) $\overline{DA}(2; 6; -6)$; в) $\overline{BD}(-4; -4; 10)$.

2. а) $|\overline{AB}| = 2\sqrt{6}$; б) $|\overline{DA}| = 2\sqrt{19}$; в) $|\overline{BD}| = 2\sqrt{33}$.

3. $x+3=2$; $x=-1$. $y-4=6$; $y=10$. $z-6=-6$; $z=0$. $K(-1; 10; 0)$.

4. $x^2+9+49=64$; $x^2=6$; $x=\pm\sqrt{6}$.

Учитель, зібравши роботи, дає можливість учням ознайомитися з відповідями, заздалегідь записаними на дошці, і відповідає на запитання, що виникли.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування

1. Дано вектори $\vec{a}(4; -5)$ і $\vec{b}(-1; 7)$. Знайдіть $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$.

2. Знайдіть координати векторів $2\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a}$; $-\frac{3}{2}\vec{a}$, якщо $\vec{a}(-2; 4)$.

3. Чи є колінеарними вектори:

а) $\vec{a}(1; -2)$ і $\vec{b}(-3; -6)$;

б) $\vec{d}(-1; -2)$ і $\vec{b}(-3; -6)$;

в) $\vec{a}(1; -2)$ і $\vec{c}(-4; 8)$? Відповідь обґрунтуйте.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Оскільки вектор у просторі вже заданий у координатах, то логічно буде розглянути й дії над векторами в координатах.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Фронтальна бесіда

1. Провівши аналогію між діями над векторами на площині та в просторі, дайте визначення суми і різниці векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$; добутку вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ на число λ .

(Учитель записує відповідь на дошці, а учні — в зошитах:

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3);$$

$$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) - \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{d}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3);$$

$$\lambda \cdot \vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{m}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3).$$

2. Запишіть умову колінеарності векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$.
(Відповідь: вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ є колінеарними тоді

й тільки тоді, коли $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$.)

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учні працюють над завданнями з подальшою вибірковою перевіркою розв'язань біля дошки.

1. Дано вектори $\vec{a}(-6; 1; 4)$ і $\vec{b}(5; -3; 2)$. Знайдіть:

а) $\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - \vec{b}$; в) $|\vec{a} + \vec{b}|$; г) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

2. Знайдіть координати векторів \vec{c} і \vec{d} , якщо їх сумою є вектор $(6; -3; 9)$, а різницею — вектор $(-1; 4; -3)$. (Відповідь: $\vec{c}(2,5; 0,5; 6)$; $\vec{d}(3,5; -3,5; 3)$.)

3. Дано вектори $\vec{a}(-1; -2; -3)$ і $\vec{b}(2; -1; 3)$. Знайдіть координати векторів $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $3\vec{b} - 2\vec{a}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

4. Знайдіть $|2\vec{a}|$, якщо $\vec{a}(-1; -2; -2)$.

5. Чи є колінеарними вектори $\vec{m}(-2; -3; -8)$ і $\vec{n}(4; -6; 16)$?

6. При якому значенні a_3 і b_2 вектори $\vec{a}(18; 12; a_3)$ і $\vec{b}(15; b_2; 1)$ колінеарні?

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Чи є правильним твердження, що $\bar{a} + \bar{b} = (\overline{-1; -2; 6})$, якщо $\bar{a}(5; -3; 2)$, $\bar{b}(-6; 1; 4)$?
2. Користуючись умовою завдання 1, знайдіть $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$.
3. Дано вектори $\bar{a}(2; -4; -5)$ і $\bar{b}(-3; -1; 6)$. Знайдіть $\bar{a} + 4\bar{b}$, $6\bar{a} - 2\bar{b}$.
4. При яких m і n є колінеарними вектори $\bar{c}(m; 0, 4; -1)$ і $\bar{d}(-0, 5; n; 5)$?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 25	[3]: § 3, п. 2
С	№ 817 (а), 820 (б)	№ 110 (1-3), 111 (1-3)
Д	№ 824 (а)	№ 112
В	№ 826	№ 110 (5, 6), 111 (4-6)

Замість запропонованих завдань можна скористатися посібником [5], СР 4.

Індивідуально

Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо $A(3; -7; 8)$, $B(-5; 4; 1)$, $C(27; -40; 29)$?

УРОК № 7

ТЕМА. **СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ. КУТ МІЖ ВЕКТОРАМИ.**

Мета уроку: сформувати в учнів поняття про скалярний добуток векторів у просторі; кут між векторами; ознайомити із властивостями скалярного добутку; розвивати увагу, пам'ять, логічне мислення; виховувати активність, акуратність, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити скалярний добуток векторів у просторі; знати й уміти користуватись умовою перпендикулярності векторів під час розв'язування задач.

Основні поняття: скалярний добуток векторів, кут між векторами.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

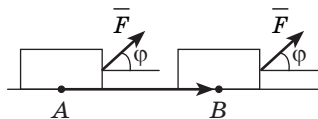
☑ Бліцопитування

1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}(3; -2)$ і $\vec{n}(1; 0)$.
2. При якому значенні x вектори $\vec{a}(3; x)$ і $\vec{b}(1; 9)$ перпендикулярні?
3. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{m} і \vec{n} , якщо $|\vec{m}| = 7\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 4$, $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45^\circ$.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

☑ Слово вчителя

Нехай тіло перемістилося із точки A в точку B (див. рисунок), тоді виконана механічна робота дорівнює $|\vec{F}| \cdot |\overline{AB}| \cdot \cos \varphi$, де φ — кут між \vec{F} і \overline{AB} .



Ми бачимо, що в цій фізичній задачі не обійтися тільки вже відомими поняттями (додавання, віднімання, множення вектора на число). Отже, доцільно ввести ще одне поняття — скалярний добуток векторів.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

1. Скалярний добуток векторів у просторі.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ називається число $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Властивості скалярного добутку

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad 2) (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}); \quad 3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}.$$

2. Кут між векторами.

Кутом між ненульовими векторами \vec{AB} і \vec{AC} називається кут BAC , а кутом між довільними ненульовими векторами \vec{a} і \vec{b} — кут між векторами, які дорівнюють даним векторам і відкладені від однієї точки.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}). \text{ Звідси } \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Необхідна і достатня умова перпендикулярності векторів:

- 1) якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; 2) якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

- Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо: а) $\vec{a}(-2; 1; -7)$, $\vec{b}(-4; -3; 9)$; б) $|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=4$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$.
- Дано вектори $\vec{a}(5; -2; z)$ і $\vec{b}(4; 2; -z)$. При якому значенні z $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$?
- Чому дорівнює косинус кута між $\vec{a}(4; -1; -2)$ і $\vec{b}(6; -8; 10)$?
- Дано вектори $\vec{m}(4; y; 6)$ і $\vec{n}(3; -4; 3)$. При якому значенні y вектори \vec{m} і \vec{n} перпендикулярні?
- Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-2; 7; -4)$, $B(2; 4; 4)$, $C(5; 0; 1)$, $D(1; 3; -7)$ є прямокутником.



Цю задачу можна розв'язати й координатним методом.

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

- Що називають скалярним добутком векторів у просторі? Дайте визначення через координати вектора та з використанням кута між векторами.
- Назвіть необхідну й достатню умову перпендикулярності векторів.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 26	[3]: § 5, п. 2
С	№ 838 (а, б)	№ 106, 107
Д	№ 848	№ 105
В	№ 845	№ 103

Індивідуально

Дано: $\vec{a}(4; 2; -4)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$. Знайти $|\vec{b}|$.

ТЕМА. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАНИМИ КООРДИНАТАМИ.

Мета уроку: удосконалити знання й уміння учнів виконувати дії над векторами, заданими координатами; розвивати просторові уявлення учнів, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати самостійність, упевненість у власних силах, організованість.

Очікувані результати: учні повинні вміти виконувати дії над векторами, заданими координатами.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Знайдіть координати:

а) вектора \overline{AB} , якщо $A(3; -2; 5)$ і $B(4; 1; 3)$;

б) початку вектора \overline{EF} , якщо $\overline{EF}(0; -3; 6)$, $F(-3; -3; -3)$;

в) вектора $\vec{m} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, якщо $\vec{a}(-7; -3; 1)$, $\vec{b}(4; -2; 6)$.

2. Знайдіть довжину вектора \overline{AB} , якщо $A(-3; 2; -5)$ і $B(-4; -1; -3)$.

3. При якому від'ємному значенні n модуль вектора $\vec{a}(3; n; -5)$ дорівнює 6?

4. При якому значенні n вектори $\vec{a}(-1; n; -2)$ і $\vec{b}(2; -1; n)$ є перпендикулярними?

5. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(12; m; 6)$ і $\vec{b}(2; 4; n)$ є колінеарними?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Розумні люди вважають, що мало знати, що існує проблема, головне — її вирішити. Сьогодні на уроці ви маєте можливість переконатися в правильності цих слів.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Учні, об'єднавшись у гетерогенні групи, працюють над картками з подальшим захистом розв'язань біля дошки.

Картка для роботи групи

1. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ із вершинами $A(5; -3; 2)$, $B(9; -1; 3)$, $C(12; -5; -1)$, $D(8; -7; -2)$ є прямокутником.
2. Дано вектори $\vec{a}(2; -1; -2)$ і $\vec{b}(3; -3; 2)$. Знайдіть $(\vec{a} - \vec{b})^2$. (Відповідь: 15.)
3. Сторона рівностороннього трикутника MKL дорівнює 4 см. Знайдіть скалярний добуток $\overline{MK} \cdot \overline{ML}$. (Відповідь: 8.)

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

Самостійна робота

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Знайдіть координати вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(2; 0; 1)$, $\vec{b}(5; -2; 3)$.
А $(\overline{7}; \overline{2}; \overline{2})$ Б $(\overline{7}; -\overline{2}; \overline{4})$ В $(\overline{7}; -\overline{2}; -\overline{2})$ Г $(\overline{3}; -\overline{2}; \overline{2})$
2. Дано вектори $\vec{a}(2; -6; -4)$, $\vec{b}(-1; 3; 2)$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b}|$.
А $\sqrt{6}$ Б 2 В $\sqrt{14}$ Г 1
3. При яких значеннях n вектори $\vec{a}(2; n; 6)$ і $\vec{b}(6; 15; 18)$ є колінеарними?
А 5 Б -5 В 45 Г 10

Достатній рівень (3 бали)

4. У квадраті $ABCD$ сторона AB дорівнює 8 см. Знайдіть $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$.

Високий рівень (3 бали)

5. Дано трикутник із вершинами в точках $A(2; 1; 7)$, $B(-1; 1; 3)$, $C(-8; 1; 2)$. Знайдіть кут B .

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Знайдіть координати вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a}(1; 0; -3)$, $\vec{b}(2; -2; -4)$.

А $(3; -2; -7)$ Б $(3; 2; 1)$ В $(1; -2; 1)$ Г $(3; -2; 1)$

2. Дано вектори $\vec{a}(3; -3; -2)$, $\vec{b}(2; -1; -1)$. Знайдіть $|\vec{a} - \vec{b}|$.

А $\sqrt{14}$ Б $\sqrt{12}$ В $\sqrt{6}$ Г 6

3. При яких значеннях n вектори $\vec{a}(10; 15; 20)$ і $\vec{b}(n; 3; 4)$ є колінеарними?

А 50 Б 5 В $\frac{1}{2}$ Г 2

Достатній рівень (3 бали)

4. У квадраті $MNKP$ сторона $NK = 2$ см. Знайдіть $\overline{MN} \cdot \overline{MK}$.

Високий рівень (3 бали)

5. Дано трикутник із вершинами в точках $A(-1; -2; -1)$, $B(-1; -1; 0)$ $C(-1; -1; -1)$. Знайдіть кут A .

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. В. 3. А. 4. 64 см. 5. 135° .

Варіант 2. 1. А. 2. В. 3. Г. 4. 4 см. 5. 45° .

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель відповідає на запитання, які виникли в учнів під час виконання самостійної роботи, і пропонує здійснити самоперевірку за заздалегідь підготовленими відповідями.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 26	[3]: § 4, 5
С	№ 836 (а), 840 (а)	с. 122, № 1, 2, 9, 10, 12–15
Д	№ 844	с. 122, № 3–5, 7, 8, 11
В	№ 847 (б)	№ 99, 144

Індивідуально

При якому значенні λ $(3\vec{a} + \lambda\vec{b}) \perp (\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a}(4; 2; 1)$ і $\vec{b}(2; 0; 3)$?

ТЕМА. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРИ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал з теми «Декартові координати і вектори у просторі»; підготувати учнів до контрольної роботи; розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення, культуру математичного мовлення, уміння узагальнювати інформацію.

Очікувані результати: учні повинні користуватися аналогіями між координатами і векторами на площині й у просторі; виконувати дії над векторами, заданими геометрично, і координатами; застосовувати вектори для обчислення геометричних і фізичних величин; застосовувати координати в просторі для вимірювання відстаней і кутів.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пропонує учням об'єднатися в гетерогенні групи.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Кожна група перевіряє правильність виконання домашнього завдання за зразком, запропонованим учителем.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

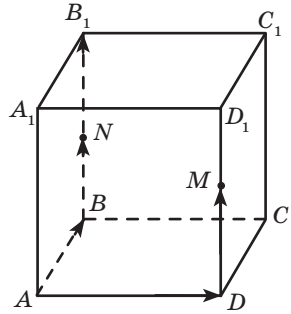
Оскільки цей урок останній перед контрольною роботою, мотивація впливає з його місця в темі: якомога ретельніше підготуватися до контрольної роботи, узагальнити і систематизувати все вивчене за темою.

IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

- Дано точки $A(-2; 0; 3)$, $B(-7; 0; 0)$, $C(0; 3; 2)$, $D(2; 14; 0)$, $E(0; 6; 0)$, $F(0; 0; -7)$. Визначте, які з точок належать: а) площині Oxy ; площині Oxz ; площині Oyz ; б) осі Oz ; осі Oy ; осі Ox .
- Точка M — середина відрізка AB . Знайдіть:
 - аплікату точки C , якщо $A(3; -1; -n)$, $B(-3; 2; n)$;
 - ординату точки B , якщо $A(-4; n; 2)$, $C(1; n; 0)$.
- Відстань від точки D до точки $(0; 0; 0)$ дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Якими можуть бути координати точки D ?

4. Дано вектор $\overline{AB}(-2; 5; 1)$. Які координати має вектор \overline{BA} ?
5. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M і N — середини ребер DD_1 і BB_1 відповідно (див. рисунок). Назвіть вектори, які:
 - а) дорівнюють вектору \overline{DM} ;
 - б) протилежні вектору \overline{AD} ;
 - в) колінеарні вектору \overline{BN} .
6. Користуючись рисунком, назвіть вектор, який дорівнює:
 - а) $\overline{AB_1} + \overline{B_1C}$; б) $\overline{BA_1} + \overline{BC}$.
7. За рисунком визначте кут між векторами: а) \overline{AB} і \overline{AD} ; б) $\overline{BB_1}$ і $\overline{B_1C}$. Назвіть пари векторів, скалярний добуток яких дорівнює нулю.
8. Знайдіть k , якщо:
 - а) $\overline{DD_1} = k \cdot \overline{DM}$; б) $\overline{D_1M} = k \cdot \overline{DD_1}$.



V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Учні працюють у групах над картками із подальшим обговоренням розв'язань.

Картка 1

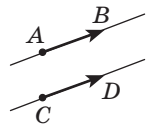
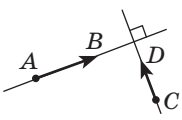
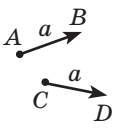
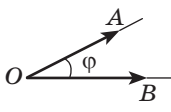
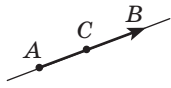
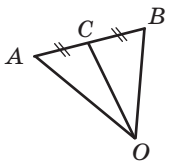
1. Користуючись координатним методом, доведіть, що чотирикутник із вершинами в точках $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(4; 1; 5)$, $D(7; -2; 2)$ — ромб.
2. Знайдіть вектор \vec{b} , що є колінеарним вектору $\vec{a}(-1; 1; 2)$ і задовольняє умову $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. (Відповідь: $\vec{b}\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$)

Картка 2

1. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 0; 4)$, $C(4; 1; 5)$, $D(7; -2; 2)$, — ромб.
2. Відомо, що \vec{a} і \vec{b} — одиничні вектори, кут між якими дорівнює 30° . Обчисліть скалярний добуток векторів $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$.
(Відповідь: $-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель звертає увагу учнів на те, що застосування векторного й координатного методів у багатьох випадках спрощує розрахунки в задачах і теоремах. Можна також запропонувати учням таку таблицю.

№ з/п	Рисунок	Твердження в геометричній формі	Твердження у векторній формі
1		$AB \parallel CD$	$\overline{AB} = k\overline{CD}, k \neq 0$
2		$AB \perp CD$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$
3		$AB = CD = a$	$\overline{AB}^2 = \overline{CD}^2 = a^2$
4		$\angle AOB = \varphi$	$\cos \varphi = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{ \overline{OA} \cdot \overline{OB} }$
5		Точка C лежить на прямій AB	$\overline{AB} = \lambda \overline{AC}$
6		Точка C — середина AB	$\overline{AC} = \overline{CB}$ або $\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, де O — довільна точка простору

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 26	[3]: § 4, 5
С	с. 206, СР № 6	с. 123, зразок КР № 2 (крім № 8)
Д		
В		

ТЕМА. **КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1.**

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Декартові координати і вектори у просторі»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання у стандартних і нестандартних ситуаціях.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Декартові координати і вектори у просторі».

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити із домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель налаштовує учнів на написання контрольної роботи, звертає їхню увагу на необхідність докладно пояснити розв'язання завдань 7–9, а в завданні 9 — визначити вид чотирикутника.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], КР 1.

Контрольна робота № 1

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Дано точки $A(1; 2; -3)$, $B(2; -1; 4)$. Знайдіть координати вектора \overline{AB} .

А $(-1; 3; -7)$ Б $(1; -3; 7)$ В $(1; 1; 1)$ Г $(-1; -1; -1)$

2. Знайдіть $|a|$, якщо $\vec{a}(-4; 2; -2)$.

А 8 Б 20 В $2\sqrt{6}$ Г 16

3. Знайдіть відстань від точки $A(3; 2; 4)$ до площини Oyz .

А 2 Б 4 В 5 Г 3

4. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями в точках $A(-4; 2; 2)$ і $B(-2; 4; 6)$.

- А $(-3; 3; 4)$ Б $(3; 3; 4)$ В $(-3; 1; 2)$ Г $(1; 1; 2)$

5. Дано вектори $\vec{a}(-1; 1; 1)$, $\vec{b}(1; -1; 0)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

- А $(\overline{0; 0; 1})$ Б $(\overline{-2; 0; 1})$ В $(\overline{0; 0; 0})$ Г $(\overline{2; -2; -1})$

6. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(1; 2; -2)$ і $\vec{b}(0; 1; 1)$.

- А 1 Б 0 В 5 Г -1

Достатній рівень (3 бали)

7. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(-3; 0; 4)$ і $\vec{b}(1; -2; 2)$.

8. Знайдіть значення m і n , при яких вектори $\vec{a}(2; 1; -2)$ і $\vec{b}(-4; m; n)$ є колінеарними.

Високий рівень (3 бали)

9. Дано точки $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(0; 1; 1)$, $D(1; 1; 0)$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Дано точки $M(-1; -2; 4)$, $N(-2; 4; -2)$. Знайдіть координати вектора \overline{MN} .

- А $(\overline{1; -6; 6})$ Б $(\overline{1; 2; 2})$ В $(\overline{-1; 6; -6})$ Г $(\overline{-1; 6; 2})$

2. Знайдіть $|a|$, якщо $\vec{a}(-2; 1; -3)$.

- А $\sqrt{14}$ Б 8 В 6 Г $\sqrt{6}$

3. Знайдіть відстань від точки $A(-2; 4; 1)$ до площини Oxz .

- А 2 Б 4 В 1 Г 3

4. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями в точках $A(-2; 6; 4)$ і $B(-4; 6; 2)$.

- А $(-3; 6; -3)$ Б $(-2; 0; 1)$ В $(-3; 0; 3)$ Г $(-3; 6; 3)$

5. Дано вектори $\vec{a}(-2; 0; 4)$, $\vec{b}(2; -2; 4)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

- А $(\overline{-4; 2; 0})$ Б $(\overline{-4; -2; 0})$ В $(\overline{0; -2; -1})$ Г $(\overline{0; -2; 8})$

6. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(1; 0; 1)$ і $\vec{b}(2; 2; 2)$.

А 6

Б 4

В 5

Г -2

Достатній рівень (3 бали)

7. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(-2; -2; 1)$ і $\vec{b}(0; -4; 3)$.

8. Знайдіть значення m і n , при яких вектори $\vec{a}(2; 1; -2)$ і $\vec{b}(m; n; -4)$ є колінеарними.

Високий рівень (3 бали)

9. Дано точки $A(0; 2; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(2; 0; 2)$, $D(1; 2; 2)$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи № 1

Варіант 1. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4. А. 5. А. 6. Б.

7. Нехай φ — кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , тоді $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3 + 0 + 8 = 5$; $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$; $|\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$,
то $\cos\varphi = \frac{5}{5 \cdot 3} = \frac{1}{3}$. *Відповідь:* $\frac{1}{3}$.

8. Оскільки \vec{a} і \vec{b} є колінеарними, то їхні координати пропорційні.

Отже, $-\frac{2}{4} = \frac{1}{m} = -\frac{2}{n}$. Звідси $m = -2$; $n = 4$. *Відповідь:* $m = -2$; $n = 4$.

9. Визначимо вид чотирикутника $ABCD$. Знайдемо середину діагоналі AC :

$x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$. Це точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Знайдемо середину діагоналі BD :

$x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$. Це точка $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Оскільки діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються й діляться точкою перетину навпіл, то $ABCD$ — паралелограм. Знайдемо діагоналі AC і BD : $AC = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$; $BD = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$; $AC = BD$. Отже, $ABCD$ — прямокутник. Знайдемо сторони AB і BC : $AB = \sqrt{2}$; $BC = 1$. $S_{ABCD} = AB \cdot BC = \sqrt{2}$. *Відповідь:* $\sqrt{2}$.

Варіант 2. 1. В. 2. А. 3. Б. 4. Г. 5. А. 6. Б.

7. Нехай φ — кут між векторами \vec{a} і \vec{b} , тоді $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 8 + 3 = 11$; $|\vec{a}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$; $|\vec{b}| = \sqrt{0 + 16 + 9} = 5$,
то $\cos\varphi = \frac{11}{3 \cdot 5} = \frac{11}{15}$. *Відповідь:* $\frac{11}{15}$.

8. Оскільки вектори \vec{a} і \vec{b} є колінеарними, то їхні координати пропорційні. Отже, $\frac{2}{m} = \frac{1}{n} = \frac{-2}{-4}$. Звідси $n = 2$; $m = 4$. *Відповідь:* $n = 2$; $m = 4$.
9. Визначимо вид чотирикутника $ABCD$. Знайдемо середину діагоналі AC : $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$. Це точка $(1; 1; 1)$. Знайдемо середину діагоналі BD : $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$. Це точка $(1; 1; 1)$. Оскільки діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються й діляться точкою перетину навпіл, то $ABCD$ — паралелограм. Знайдемо його сторони AB і BC : $AB = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$; $BC = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Оскільки сусідні сторони паралелограма рівні, то $ABCD$ — ромб. Знайдемо діагоналі AC і BD : $AC = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $BD = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.
- $$S_{ABCD} = \frac{AC \cdot BD}{2} = \frac{2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{6}. \text{ Відповідь: } 2\sqrt{6}.$$

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи, відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання контрольної роботи, пропонує їм ознайомитися із правильними відповідями.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Повторити матеріал про геометричні тіла, вивчені у 9-му класі.

УРОК № 9*

ТЕМА. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ У ПРОСТОРИ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання й уміння учнів з теми «Декартові координати і вектори у просторі»; розвивати логічне мислення учнів; учити через моделювання висувати гіпотези й доводити їх, знаходити різні способи доведення; виховувати культуру математичного мовлення, уміння обстоювати свою думку, вести дискусію.

Очікувані результати: учні повинні усвідомити важливість векторно-координатного методу в математиці.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пояснює учням, у якій формі проходитиме урок, і просить об'єднатися у гетерогенні групи.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Група консультантів-«учителів» розподіляється для перевірки наявності домашнього завдання й консультацій з питань, що виникли під час його виконання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Кожна група отримує тест, підготовлений групою консультантів-«учителів» і заздалегідь перевірений вчителем. Час, відведений на виконання тесту, становить 5–7 хв. Кожна правильна відповідь оцінюється у 2 бали. Поки тест перевіряється консультантами-«учителями», кілька учнів, які підготувалися заздалегідь, роблять коротке повідомлення (див. додатковий матеріал до уроку).

Тест для роботи групи

1. Від точки $M(2; -3; 1)$ відкладено вектор \overline{MK} , який дорівнює вектору \overline{AB} . Знайдіть координати точки K , якщо $A(-1; 0; 5)$, $B(0; 4; -1)$.

А $(3; 1; -5)$ Б $(1; 7; -7)$ В $(-3; 7; 3)$ Г $(1; -7; 7)$

2. Якщо $\overline{a} \cdot \overline{b} = 120$, то кут між векторами \overline{a} і \overline{b} може дорівнювати:

А 130° Б 120° В 90° Г 50°

3. Кут між векторами \overline{a} і \overline{b} дорівнює 60° . Знайдіть кут між векторами $2\overline{a}$ і $-\overline{b}$.

А 30° Б 60° В 120° Г 90°

4. Дано три вектори, які задовольняють рівність $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = \mathbf{0}$. Довжини цих векторів можуть дорівнювати:

А 2; 3; 6 Б 5; 7; 9 В 1; 2; 5 Г 10; 5; 1

5. Точки A і B лежать у площині yOz і площині xOz відповідно, але не на осях координат (точка O — початок координат). Тоді обов'язково:

А трикутник AOB прямокутний

Б апліката точки A дорівнює нулю

В ордината точки B дорівнює нулю

Г вектор \overline{AB} паралельний площині xOy

6. Дано піраміду $SABC$ (рис. 1). Точки K, L, M — середини ребер SA, SB, SC відповідно. Укажіть кількість правильних рівностей серед наведених:

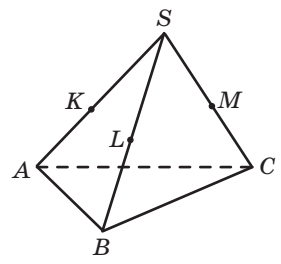


Рис. 1

- 1) $\overline{KM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$; 3) $\overline{KS} = \frac{1}{2}(\overline{CS} - \overline{CA})$;
 2) $\overline{CL} = \overline{CB} + \frac{1}{2}\overline{BS}$; 4) $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AS} + \overline{AC})$.

А 2 Б 1 В 3 Г 4

Відповіді до тесту

1. А. 2. Г. 3. В. 4. Б. 5. В. 6. Г.

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
 МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

Слово вчителя

Німецький живописець і гравер Альбрехт Дюрер сказав, що необхідно, аби той, хто що-небудь уміє, навчав цього інших, у кого є в цьому потреба. Сьогодні ви переконаєтеся в правильності цих слів, усвідомите важливість застосування векторно-координатного методу під час розв’язування геометричних задач.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Інтерактивна вправа «Навчаючи — вчусь»

Кожен із консультантів-«учителів» під керівництвом учителя підготував одну задачу, яку потрібно розв’язати векторним методом.

1. Доведіть векторним методом теорему про три перпендикуляри.

Доведення. Виберемо вектори \vec{c} і \vec{a} (рис. 2) і знайдемо їх скалярний добуток.

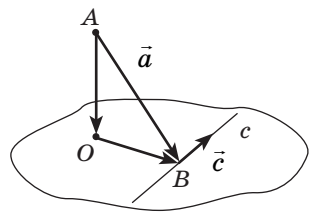


Рис. 2

$$\vec{a} = \overline{AO} + \overline{OB};$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = \vec{c} \cdot (\overline{AO} + \overline{OB}) = \vec{c} \cdot \overline{AO} + \vec{c} \cdot \overline{OB}.$$

Оскільки $\vec{c} \perp \overline{AO}$ і $\vec{c} \perp \overline{OB}$, то $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$. Отже, $\vec{c} \perp \vec{a}$. Звідси випливає, що $AB \perp c$.

2. Доведіть, що якщо M — точка перетину медіан трикутника ABC , а точка O — довільна точка простору, то
- $$\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}).$$


Доведення. Нехай BD — медіана трикутника ABC (рис. 3).

Оскільки за властивістю точки перетину медіан трикутника $\overline{BM} = \frac{2}{3}\overline{BD}$, то $\overline{OM} = \overline{OB} + \overline{BM} = \overline{OB} + \frac{2}{3}\overline{BD} = \overline{OB} + \frac{2}{3}(\overline{OD} - \overline{OB}) = \frac{2}{3}\overline{OD} + \frac{1}{3}\overline{OB}$.

Оскільки $\overline{OD} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC})$ за правилом паралелограма, то $\overline{OM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OC}) + \frac{1}{3}\overline{OB} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$.

3. Знайдіть кут між мимобіжними прямими, одній з яких належить діагональ куба, а іншій — діагональ грані куба.

Розв'язання. Розмістимо куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ у системі координат (рис. 4). Нехай ребро куба має довжину a . Звідси $B(0; 0; 0)$, $D_1(a; a; a)$, $B_1(0; 0; a)$, $A(a; 0; 0)$ і $\overline{BD_1}(a; a; a)$, $\overline{AB_1}(-a; 0; a)$. Тоді $\overline{BD_1} \cdot \overline{AB_1} = -a^2 + 0 + a^2 = 0$. Ці вектори перпендикулярні, а отже, шуканий кут дорівнює 90° .

 Під час розв'язування останньої задачі використано координатний і векторний методи.

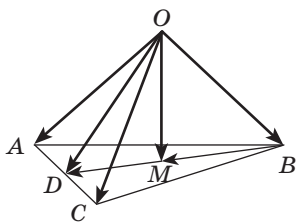


Рис. 3

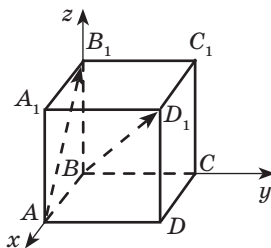


Рис. 4

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Робота в групах

Учні, працюючи у групах під керівництвом консультантів-«учителів», мають сформулювати основні етапи векторного методу. Усі пропозиції груп записуються і спільно виробляється загальний алгоритм.

Алгоритм застосування векторного методу

- 1) Сформулювати задачу векторною мовою, розглянувши деякі з даних відрізків як вектори, і записати відповідні до умови векторні рівності.
- 2) Перетворити отримані рівності на основі відомих векторних співвідношень.
- 3) Перекласти отримані результати мовою геометрії.

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Виконати в групі одне із творчих завдань.

1. Знайти і розв'язати задачу з геометрії векторним або координатним методом.
2. Знайти і розв'язати задачу з фізики, у якій необхідно застосувати вектори.

Додаткова інформація

Виникнення і розвиток системи координат має дуже давню історію. Перше застосування системи координат пов'язане із розвитком астрономії та географії і викликане необхідністю визначати положення небесних світил на небі та конкретних пунктів на поверхні Землі, під час складання календаря, зоряних і географічних карт. Давньогрецький астроном Клавдій Птоломей користувався довготою і широтою як географічними координатами. Систему координат застосовували давні єгиптяни, підтвердження цього було знайдене на стіні однієї з гробниць. Користувалися нею і художники епохи Відродження.

Уперше ввів систему координат французький математик Рене Декарт (1637 р.), тому вона дістала також назву «декартові координати». У 70–80-х рр. XVII ст. німецький учений Г. В. Лейбніц запровадив терміни «абсциса» й «ордината». Тоді ж сформувалося сучасне розуміння координатної системи.

Історія виникнення й розвитку векторного обчислення також сягає своєї давнини й пов'язана головним чином із потребами механіки та фізики. Подання величин як відрізків ми знаходимо ще в давньогрецькій математиці. Декарт подавав будь-яку безперервну величину (число, довжину, площу тощо) як відрізок, узвичаїв дії з відрізками. Історично векторне обчислення розвивалося трьома шляхами: геометричним, фізичним і алгебраїчним. В останній чверті XX ст. відбулося злиття цих шляхів і векторне обчислення стало незалежною галуззю математики.

Ідею створення геометричного обчислення, близького за змістом до сучасного векторного обчислення, уперше висунув у 1679 р. Лейбніц, однак інтерес до геометричного обчислення відновився лише на початку XIX ст.

ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА. ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

УРОК № 11

ТЕМА. **ЦИЛІНДРИ І ПРИЗМИ.**

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання учнів про призму й циліндр та їхні елементи; формувати вміння знаходити елементи призми і циліндра; розвивати просторову уяву, пам'ять, увагу, уміння проводити аналогії, узагальнювати вивчений матеріал; виховувати графічну культуру, акуратність, працьовитість, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати призму, циліндр та їхні елементи; будувати зображення призми й циліндра; обчислювати основні елементи призми й циліндра.

Основні поняття: призма, циліндр, основи призми, бічні грані призми, основи циліндра, висота призми, висота циліндра, вісь циліндра, поверхня призми, бічна поверхня призми, поверхня циліндра, бічна поверхня циліндра.

Обладнання: підручник, моделі многогранників і тіл обертання.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Учитель повідомляє статистичні дані контрольної роботи та зупиняється на типових помилках, яких учні припустилися під час виконання контрольної роботи.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Серед запропонованих моделей знайдіть модель призми; модель циліндра.
2. До якого виду геометричних тіл належить призма; циліндр?
3. У який спосіб можна отримати розгортку призми; розгортку циліндра?
4. Наведіть із повсякденного життя приклади многогранників; циліндрів.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

У навколишньому світі багато що пов'язує нас із геометрією. Приміром, кристали кухонної солі мають форму куба; кристали льоду і гірського кришталю нагадують відточений з обох боків олівець, тобто мають форму шестикутної призми, на основі якої поставлені піраміди. Ісландський шпат має форму похилого паралелепіпеда.

Існує чимало професій, представники яких не можуть обійтися без тих геометричних фігур, про які ми сьогодні говоритимемо. Столяри, малярі, екскаваторники, мінералоги — усі вони мають справу із многогранниками й циліндрами.

V. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Бесіда

1. Користуючись рис. 1, назвіть вершини, основи, бічні ребра й грані призми $ABCDF_1A_1B_1C_1D_1F_1$.
2. Користуючись рис. 2, назвіть радіус і твірну циліндра.

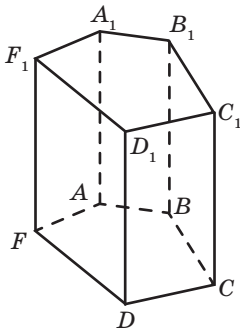


Рис. 1

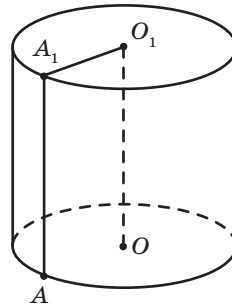


Рис. 2

3. Сформулюйте властивості основ призми; основ циліндра.
4. Сформулюйте властивості бічних ребер призми.
5. Сформулюйте властивості твірних циліндра.
6. Яка призма називається прямою?
7. Як розташовані твірні циліндра відносно його основ?
8. Із чого складається поверхня призми?

VI. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учні, ознайомившись із текстом підручника, називають нові поняття, які не були розглянуті в 9-му класі, та дають їм визначення.

Основні терміни й поняття

Висота призми — це перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи на площину іншої основи.

Діагональ призми — відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані.

Призма, яка не є прямою, називається **похилою**.

Бічні ребра прямої призми є її висотами. Бічні грані прямої призми — прямокутники. Бічні грані похилої призми — паралелограми.

Висота циліндра — перпендикуляр, проведений із точки однієї основи циліндра до площини іншої основи. У прямому циліндрі висота дорівнює його твірній.

Діагональний переріз призми — переріз призми площиною, яка проходить через бічне ребро й діагональ основи.

Діагональний переріз прямої призми — прямокутник.

Осьовий переріз циліндра — прямокутник.

Переріз циліндра площиною, паралельною площині основи, — круг, який дорівнює основі циліндра.

Переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра, — прямокутник.

VII. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює 5 см, а бічне ребро — 4 см. Знайдіть площу основи призми. (Відповідь: $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ см².)
2. Бічне ребро похилої призми дорівнює 5 см і нахилене до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту призми. (Відповідь: $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см.)
3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 6 см і нахилена до площини основи циліндра під кутом 60°. Знайдіть висоту й радіус циліндра. (Відповідь: $3\sqrt{3}$ см; 3 см.)
4. Радіус циліндра дорівнює 6 м, а висота — 8 м. Знайдіть площу осьового перерізу циліндра. (Відповідь: 96 м².)

VIII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель просить назвати спільне і відмінне у прямій призмі й прямому циліндрі.

ІХ. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 28, 31	[3]: § 13, пп. 1, 2
С	№ 899 (г, д)	№ 239 (1–3), 249 (1–3)
Д	№ 1031	№ 239 (4, 7), 249 (4, 5)
В	№ 926	№ 239 (9), 251 (4)

Індивідуально

Діагональ осового перерізу циліндра дорівнює 8 см і утворює із площиною основи циліндра кут 30° . Знайти висоту циліндра і площу його основи. (Відповідь: 4 см; 48π см².)

УРОК № 12

ТЕМА. ЦИЛІНДРИ І ПРИЗМИ.

Мета уроку: сформувати вміння обчислювати основні елементи призми і циліндра, будувати зображення циліндра та призми; розвивати просторову уяву, пам'ять, увагу, логічне мислення; виховувати наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати призми і циліндри; будувати зображення призм і циліндрів, їхніх елементів, осових і діагональних перерізів; обчислювати основні елементи призми й циліндра.

Обладнання: підручник.

Тип уроку: застосування знань і вмінь.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Інтерактивна вправа «Заповніть пропуски»

Учитель пропонує перевірити виконання індивідуального завдання.

Розв'язання. Нехай AA_1B_1B — осовий переріз циліндра (рис. 1), α — площина основи циліндра. Як відомо, $AA_1B_1B \dots AA_1 \perp \alpha$, оскільки AA_1 — ... Отже, BA_1 — похила до площини основи циліндра і AB — її ... на площину α . Звідси $\angle A_1BA = 30^\circ$ — кут... Оскільки $A_1A \perp \alpha$, то $A_1A \perp AB$, із трикутника AA_1B із прямим кутом ... маємо: $AB = \dots$, $AO = OB = \dots$, $S_{\text{осн}} = \dots$, $AA_1 = H = \dots$ висота циліндра. **Відповідь:** ... см²; ... см.

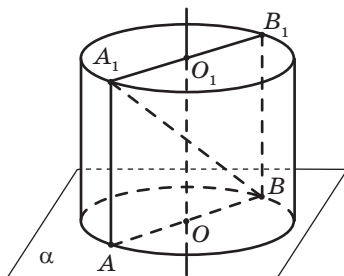


Рис. 1

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Бліцпитання

1. На рис. 2, а–д позначте фігури, що є розгорткою призми. Визначте вид призми в кожному випадку.

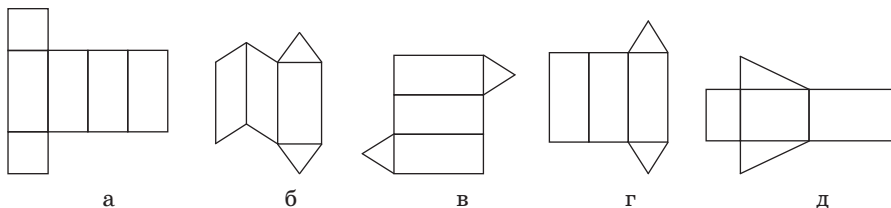


Рис. 2

(Відповідь: а) прямокутний паралелепіпед, основа — квадрат; б) похила трикутна призма; в), г) — правильна трикутна призма; д) пряма трикутна призма, основа — рівнобедрений прямокутний трикутник.)

2. Скільки діагоналей можна провести у чотирикутній призмі; п'ятикутній, n -кутній? (Відповідь: 4; 10; $n(n-3)$.)
3. Призма має 20 граней. Який багатокутник лежить у її основі? (Відповідь: вісімнадцятикутник.)
4. Який багатокутник лежить в основі призми, у якої 15 ребер? (Відповідь: п'ятикутник.)
5. У якому випадку переріз циліндра площиною, паралельною його осі, є квадратом? (Відповідь: якщо хорда дорівнює твірній.)
6. Що являє собою переріз циліндра площиною, перпендикулярною до осі циліндра? (Відповідь: круг.)

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Властивості призм і циліндрів широко застосовуються в різних сферах: у мистецтві, будівництві, кристалографії, комп'ютерній графіці. Видатні архітектори неодноразово відзначали, що шедеври стародавньої архітектури з'явилися виключно завдяки законам геометрії. Сьогоднішній урок дає вам можливість навчитися швидко й точно робити розрахунки для знаходження елементів призми й циліндра, побачити загальне у підході до розв'язування таких задач.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

☑ Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. В основі прямої призми лежить ромб із гострим кутом 60° і стороною 4 см. Знайдіть діагоналі призми, якщо її бічне ребро дорівнює 6 см. (Відповідь: $2\sqrt{13}$ см; $2\sqrt{21}$ см.)
2. В основі прямої призми лежить квадрат. Діагональ призми дорівнює 17 см, а висота — 15 см. Знайдіть довжину діагоналі бічної грані цієї призми. (Відповідь: $\sqrt{257}$ см.)
3. На відстані 4 см від осі циліндра проведено переріз, паралельний цій осі. Висота циліндра дорівнює 5 см. Знайдіть радіус його основи, якщо діагональ перерізу дорівнює 13 см.

Розв'язання.

За умовою $OO_1 \parallel (ABC)$ (рис. 3). Оскільки $AB \perp (AOD)$ і $AB \subset (ABC)$, то за ознакою перпендикулярності площин $(ABC) \perp (AOD)$. AD — пряма перетину площин ABC і AOD , тож, провівши $OK \perp AD$, можемо стверджувати, що $OK \perp (ABC)$. А оскільки $OO_1 \parallel (ABC)$, то відрізок OK , що дорівнює 4 см, і є відстань від осі циліндра до площини ABC . У трикутнику CDA ($\angle D = 90^\circ$) маємо:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ (см).}$$

Трикутник AOD рівнобедрений ($AO = OD$ як радіуси). Отже, OK — висота і медіана. $AK = KD = 6$ см. Із трикутника OKA ($\angle K = 90^\circ$) отримаємо: $AO = \sqrt{OK^2 + AK^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см).

Відповідь: $2\sqrt{13}$ см.

☑ Робота в малих групах

Учні працюють у групах, після чого представник однієї з груп наводить доведення біля дошки (слід підкреслити, що доведені факти є опорними).

Задача. Доведіть, що: а) діагональ куба із ребром a дорівнює $a\sqrt{3}$;

б) ребро куба із діагоналлю d дорівнює $\frac{d}{\sqrt{3}}$.



У прямокутному паралелепіпеді з вимірами a, b, c діагональ дорівнює $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. У кубі з ребром a діагональ дорівнює $a\sqrt{3}$.

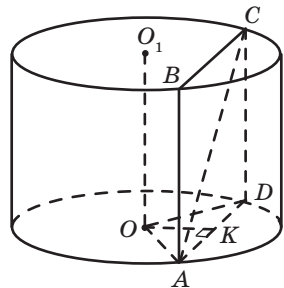


Рис. 3

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Чи досягнуто мети, поставленої на початку уроку?
2. Які формули були отримані в процесі розв'язування задач?
3. Які планіметричні факти були використані під час розв'язування задач?
4. Які теореми стереометрії застосовувалися?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 28	[3]: § 13, пп. 1, 2
С	№ 900	№ 239 (5, 6), 241 (1, 2), 250 (1, 2)
Д	№ 918	№ 239 (8), 241 (4), 250 (5, 6)
В	№ 925	№ 246 (3, 4), 248 (2), 255

Індивідуально

Осьовий переріз циліндра — квадрат зі стороною $2\sqrt{5}$ см. Паралельно осі циліндра проведено переріз, діагональ якого дорівнює 5 см. Знайти площу цього перерізу. (Відповідь: 10 см^2 .)

УРОК № 13

ТЕМА. ЦИЛІНДРИ І ПРИЗМИ.

Мета уроку: формувати в учнів уміння самостійно застосовувати отримані знання для знаходження основних елементів призми й циліндра; визначити рівень засвоєння учнями теми «Циліндри і призми»; розвивати просторову уяву, логічне мислення, уміння самостійно приймати рішення; виховувати наполегливість, працьовитість, уміння об'єктивно оцінювати свої знання.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Циліндри і призми» в процесі розв'язування різнорівневих задач.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальне опитування

1. Що є діагональним перерізом прямої призми; похилої призми?
2. Що є осьовим перерізом циліндра?
3. Що являє собою переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра; паралельною основам циліндра?
4. Який вигляд має розгортка циліндра?
5. Чи існує похилий паралелепіпед, у якого дві грані — прямокутники?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Погодьтеся, що мало знайдеться учнів, яким би подобалися перевірки. Однак без цього неможливо рухатися далі, коригувати прогалини у знаннях. Не спробувавши що-небудь зробити самостійно, ніколи не дізнаєшся, чи вмієш ти це робити. Тож сьогодні ваше завдання — перевірити свої можливості.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в парах

- Учні розв'язують задачі в парах із подальшим обговоренням.
1. Основа прямої призми — прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу трикутника, дорівнює 26 см. Знайдіть висоту призми. (*Відповідь*: 24 см.)
 2. В основі циліндра проведено хорду, яка стягує дугу в 120° . Відрізок, який сполучає центр іншої основи із серединою цієї хорди, дорівнює 10 см і утворює із площиною основи кут 30° . Знайдіть радіус основи. (*Відповідь*: $10\sqrt{3}$ см.)

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна провести самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5]: СР 6 (завдання 1 і 3), СР 7 (завдання 1 і 3) або СР 10 (завдання 4 і 5).

Самостійна робота

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Скільки ребер має трикутна призма?

А 3

Б 6

В 9

Г 12

2. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда із вимірами 6 см, 2 см і 3 см.

А 6 см Б 7 см В 8 см Г Інша відповідь

3. У циліндрі радіус основи і висота відповідно дорівнюють 2 см і 3 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

А $\sqrt{13}$ см Б 7 см В 5 см Г Інша відповідь

Достатній рівень (3 бали)

4. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу основи циліндра.

Високий рівень (3 бали)

5. Знайдіть площу основи правильної чотирикутної призми, якщо її діагональ дорівнює 10 см, а діагональ бічної грані — 8 см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Скільки ребер має чотирикутна призма?

А 12 Б 9 В 4 Г 8

2. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда із вимірами 2 см, 4 см і 4 см.

А 7 см Б 10 см В 6 см Г Інша відповідь

3. У циліндрі радіус основи і висота відповідно дорівнюють 3 см і 8 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

А 10 см Б 11 см В $\sqrt{73}$ см Г Інша відповідь

Достатній рівень (3 бали)

4. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює $8\sqrt{2}$ см. Знайдіть площу основи циліндра.

Високий рівень (3 бали)

5. Знайдіть діагональ правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи дорівнює 100 см^2 , а діагональ бічної грані — 24 см.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. В. 2. Б. 3. В. 4. $9\pi\text{ см}^2$. 5. 36 см^2 .

Варіант 2. 1. А. 2. В. 3. А. 4. $16\pi\text{ см}^2$. 5. 26 см.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель збирає зошити і відповідає на запитання, які виникли під час написання роботи.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 28, 31	[3]: § 13, пп. 1, 2
С	№ 1012 (а, б)	№ 251 (1, 2)
Д	№ 922	№ 245, 251 (3)
В	№ 924	№ 247 (3, 4), 254

Індивідуально

У нижній основі циліндра проведено хорду на відстані a від центра нижньої основи, яку видно із цього центра під кутом β . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи із точкою кола нижньої основи, утворює із площиною нижньої основи кут α . Знайти довжину твірної циліндра. (Відповідь: $\frac{a}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \alpha}$.)

УРОК № 14

ТЕМА. КОНУСИ І ПІРАМІДИ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати матеріал про конуси і піраміди, відомий учням із курсу 9-го класу; формувати навички розв'язування задач на знаходження основних елементів конуса і піраміди; розвивати просторову уяву, вміння проводити аналогії, узагальнювати; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати серед геометричних тіл конуси й піраміди; будувати їхні зображення; обчислювати основні елементи конуса і піраміди.

Основні поняття: піраміда, правильна піраміда, основа піраміди, вершина піраміди, бічні ребра, висота піраміди, конус, основа конуса, вершина конуса, твірна конуса, вісь конуса, осьовий переріз конуса.

Обладнання: підручник, моделі піраміди і конуса.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Серед поданих моделей визначте модель піраміди; модель конуса.
2. До якого виду геометричних тіл належить піраміда; конус?
3. Як можна отримати розгортку піраміди; розгортку конуса?
4. Наведіть із повсякденного життя приклади предметів, які мають форму піраміди; форму конуса.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Навіть якщо ви ніколи не були в Єгипті, то напевно чули про єгипетські піраміди. Про ці споруди розповідають легенди, надаючи їм казкових властивостей. Відомо, що в основі піраміди Хеопса лежить квадрат зі стороною 230 м, а її бічне ребро становить 218 м. Сьогодні, повторивши й узагальнивши вже відомі вам факти, ми зможемо обчислити і висоту цієї піраміди. Не менш цікавим є й конус, форму якого відтворюють природа, техніка й архітектура. У конуса й піраміди багато спільного. Що саме, ми з'ясуємо на уроці.

IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Фронтальна бесіда

1. Назвіть вершину, основу, бічні ребра, бічні грані й висоту піраміди (рис. 1).
2. Назвіть радіус, твірну і висоту конуса (рис. 2).

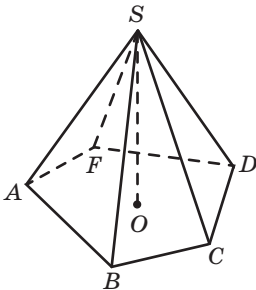


Рис. 1

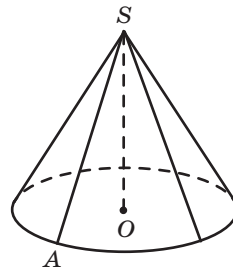


Рис. 2

3. Сформулюйте властивості твірної конуса.
4. Із чого складається поверхня піраміди?
5. Що являє собою розгортка конуса?

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учні самостійно читають текст підручника, знаходять у ньому поняття, які ще не були розглянуті в 9-му класі, і наводять визначення.

Основні поняття й терміни

Висота піраміди — перпендикуляр, проведений із вершини піраміди до площини її основи.

Висота конуса — перпендикуляр, проведений із вершини конуса до площини основи.

Діагональний переріз піраміди — переріз піраміди площиною, яка проходить через два несусідніх бічних ребра.

Пряма, що проходить через центр основи й висоту конуса, називається його **віссю**.

Осьовий переріз конуса — переріз конуса площиною, що проходить через його вісь.

Правильна піраміда — піраміда, основа якої — правильний многокутник, а основа висоти піраміди є центром цього многокутника.

У правильної піраміди

а) усі бічні ребра рівні;

б) усі бічні ребра однаково нахилені до площини основи;

в) усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди;

г) усі бічні грані — рівні рівнобедрені трикутники.

Апофема правильної піраміди — висота бічної грані, проведеної з вершини піраміди.

Усі твірні конуса є рівними.

Усі твірні конуса однаково нахилені до площини його основи.

Усі твірні конуса утворюють однакові кути з його висотою.

Осьовий переріз конуса — рівнобедрений трикутник.

Діагональний переріз правильної піраміди — рівнобедрений трикутник.

Конус називають **рівностороннім**, якщо діаметр його основи дорівнює його твірній.

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину, — рівнобедрений трикутник.

Переріз конуса площиною, паралельною його основи, — круг.

Переріз піраміди площиною, паралельною її основи, — многокутник, подібний многокутнику, що лежить в основі піраміди.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 7 см, а сторона основи — 8 см. Знайдіть бічне ребро піраміди. (Відповідь: 9 см.)

2. Знайдіть висоту й радіус основи конуса, якщо його твірна дорівнює 12 см, а осьовий переріз — правильний трикутник. (Відповідь: $6\sqrt{3}$ см; 6 см.)
3. В основі піраміди лежить паралелограм зі сторонами 2 см і 3 см і гострим кутом 60° . Бічне ребро, що проходить через вершину гострого кута, перпендикулярне до площини основи і дорівнює 12 см. Знайдіть більше бічне ребро піраміди. (Відповідь: $\sqrt{163}$ см.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ



У n -кутної піраміди $(n+1)$ вершин і $2n$ ребер.

Бліцопитування

1. Скільки граней, ребер має n -кутна піраміда?
2. Із яких фігур складається розгортка конуса?
3. Який переріз конуса, що проходить через його вершину, має найбільшу площу?
4. Чи існує піраміда, у якої немає діагонального перерізу?
5. Яка піраміда називається правильною?
6. Який конус називається рівностороннім?
7. Як називають грань піраміди, яка не містить вершину піраміди?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 29, 32	[3]: § 12, пп. 1, 2
С	№ 941, 1040	№ 219 (1), 228 (1)
Д	№ 939, 1051	№ 219 (4), 220 (4), 228 (4)
В	№ 1054	№ 225 (4), 229 (5)

Індивідуально

В основі піраміди лежить рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює 4 см, а діагоналі — бісектриси гострих кутів трапеції. Знайти висоту піраміди, якщо гострий кут трапеції становить 60° , а бічні ребра утворюють із площиною основи кути в 30° .

(Відповідь: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ см.)

ТЕМА. **ДЕЯКІ ВИДИ ПІРАМІД.**

Мета уроку: ознайомити учнів з особливостями положення висоти деяких пірамід; сформувати вміння застосовувати отримані знання до розв'язування задач на знаходження елементів піраміди; розвивати просторове й логічне мислення, пам'ять, культуру математичного мовлення; виховувати акуратність, наполегливість, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні вміти розв'язувати задачі на знаходження невідомих елементів піраміди, застосовуючи особливості положення висоти деяких пірамід.

Обладнання: підручник, моделі пірамід.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

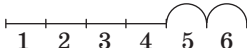
Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ;
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ☑ **Графічний диктант**

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так» \cap , «ні» $_$, а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

1. Чи існує піраміда, що має 21 ребро?
2. Чи є правильним твердження, що коли всі бічні ребра піраміди рівні між собою, то піраміда правильна?
3. Чи є правильним твердження, що коли всі бічні ребра піраміди однаково нахилені до основи, то піраміда правильна?
4. Чи обов'язково висота піраміди лежить усередині піраміди?
5. Чи може висота піраміди збігатися з її бічним ребром?
6. Чи існує піраміда, усі грані якої є прямокутними трикутниками?

Ключ-відповідь: 

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ☑ **Слово вчителя**

Зазвичай розв'язування стереометричних задач починається з побудови рисунка. Щоб правильно зобразити піраміду, часто необхідно проаналізувати умову задачі та встановити, властивості піраміди. Сьогодні ви ознайомитеся з особливостями положення висоти піраміди.

ІV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Якщо дві бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи, то пряма їх перетину містить висоту піраміди. Цей факт випливає з теореми про дві площини, які перетинаються й перпендикулярні до третьої площини. На рис. 1 $(SBA) \perp (ABC)$, $(SBC) \perp (ABC)$, SB — висота піраміди.

Якщо одна із граней піраміди перпендикулярна до площини основи, то висота піраміди лежить у площині цієї грані і є перпендикуляром, проведеним із вершини піраміди до прямої перетину площин цієї грані й площини основи (рис. 2). Це твердження ґрунтується на факті, що перпендикуляр, проведений в одній із двох перпендикулярних площин до прямої перетину цих площин, є перпендикуляром до другої площини.

Учитель пропонує учням довести обернене твердження самостійно, спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників.

Якщо всі бічні ребра піраміди рівні, або однаково нахилені до площини основи піраміди, або утворюють однакові кути з висотою піраміди, то основою висоти піраміди є центр кола, описаного навколо основи піраміди (рис. 3).

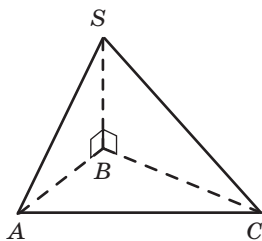


Рис. 1

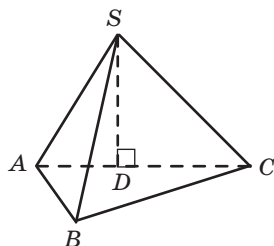


Рис. 2

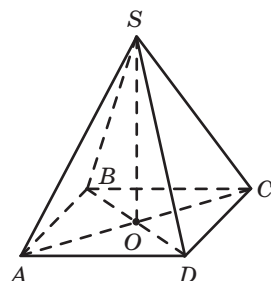


Рис. 3

Робота в малих групах

Учні, працюючи в групах, доводять твердження.

Якщо основа висоти піраміди є центром кола, описаного навколо основи піраміди, то в цій піраміді всі бічні ребра рівні, всі бічні ребра однаково нахилені до площини основи піраміди, всі бічні ребра утворюють із висотою піраміди однакові кути.

Учитель пропонує учням довести обернене твердження, спираючись на ознаки рівності прямокутних трикутників.

Якщо всі двогранні кути при основі піраміди рівні, або всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, або всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, утворюють однакові кути з висотою піраміди, або висота піраміди утворює із площинами всіх бічних граней однакові кути, то основою висоти піраміди є центр кола, вписаного в основу піраміди.

Учитель відзначає, що сформульовані твердження широко застосовуються під час розв'язування задач.



Обернене твердження справджується (у випадках, які стосуються висот бічних граней і кутів, утворених висотою піраміди із площинами бічних граней) за умови, що висота піраміди лежить усередині піраміди (рис. 4).

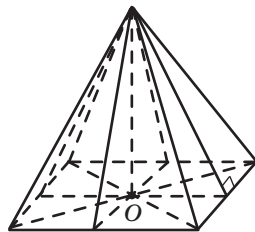


Рис. 4

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою, яка дорівнює 24 см. Знайдіть висоту піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює 13 см. (Відповідь: 5 см.)
2. Основа піраміди — ромб із меншою діагоналлю 4 см і гострим кутом 60° . Усі бічні грані утворюють з основою піраміди рівні кути по 45° . Знайдіть висоту піраміди. (Відповідь: $\sqrt{3}$ см.)
3. Основа піраміди $SABC$ — рівнобедрений трикутник ABC . $AB=BC=12$ см. Бічна грань SAC , що містить основу трикутника, перпендикулярна до площини ABC , а дві інші бічні грані нахилені до площини основи під кутом 60° , $SO=4\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу основи піраміди. (Відповідь: 48 см^2 .)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Бічні ребра піраміди рівні й однаково нахилені до основи. У яку точку площини основи проектується вершина, якщо в основі лежить:
 - а) прямокутний трикутник;
 - б) тупокутний трикутник;
 - в) прямокутник?
2. Бічні грані чотирикутної піраміди рівні. Який чотирикутник може бути її основою?
3. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до площини основи. Як розміщена висота піраміди?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 29, 32	[3]: § 12, пп. 1, 2
С	№ 944, 1044	№ 221
Д	№ 943, 1052	№ 224
В	№ 1057	№ 227

Індивідуально

Основою піраміди є рівносторонній трикутник. Одна з бічних граней піраміди перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом α . Як нахилені до площини основи бічні ребра піраміди? (Відповідь: $\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$; $\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$; $\arctg\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha\right)$.)

УРОК № 16

ТЕМА. ПІРАМІДИ І КОНУСИ.

Мета уроку: сформувати в учнів уміння застосовувати отримані знання про конуси й піраміди під час розв'язування задач на знаходження їхніх невідомих елементів; розвивати пам'ять, увагу, математичну грамотність, просторове й логічне мислення, уміння самостійно застосовувати знання; виховувати акуратність, наполегливість, самостійність, принциповість.

Очікувані результати: учні повинні вміти самостійно застосовувати отримані знання під час розв'язування задач на знаходження невідомих елементів піраміди й конуса.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал, моделі пірамід і конусів.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли під час виконання домашнього завдання, і збирає зошити на перевірку.

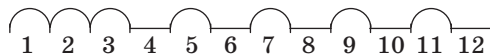
III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Графічний диктант

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так» \bigcirc , «ні» $_$, а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

1. Чи можна в перерізі конуса площиною отримати рівнобедрений трикутник, відмінний від осового перерізу?
2. Чи може осовим перерізом конуса бути прямокутний трикутник?
3. Чи може осовим перерізом конуса бути рівносторонній трикутник?
4. Чи можуть бути будь-які відрізки a і b відповідно твірною й висотою конуса?
5. Чи можуть бути будь-які відрізки a і b відповідно висотою й радіусом конуса?
6. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути. Чи може основою піраміди бути прямокутник?
7. Бічні грані піраміди утворюють з основою рівні двогранні кути. Чи може основою піраміди бути ромб?
8. Бічне ребро піраміди перпендикулярне до однієї зі сторін основи. Чи можна прийняти це ребро за висоту піраміди?
9. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди рівні. Чи може її основою бути прямокутник?
10. Усі бічні ребра чотирикутної піраміди утворюють рівні кути з висотою піраміди. Чи може її основою бути ромб?
11. Усі бічні ребра піраміди рівні. Чи може її одна бічна грань бути перпендикулярною до основи піраміди?
12. Чи може бути основою піраміди, у якій всі висоти бічних граней, проведені з вершини піраміди, рівні, рівнобедрена трапеція зі стороною 9 см і основами 5 см і 11 см?

Ключ-відповідь:



IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Уміння застосовувати отримані теоретичні знання до розв'язування практичних задач, правильно розподілити час, відведений на розв'язання цих задач, та зважено організувати роботу — ось головне, що вам треба продемонструвати на уроці.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Хорда основи конуса дорівнює 6 см і стягує дугу, що становить 90° . Висота конуса дорівнює 4 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через вершину конуса і хорду. (Відповідь: 15 см^2)

2. У рівносторонньому конусі радіус основи дорівнює 10 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими становить 30° . (Відповідь: 100 см^2 .)
3. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α . Бічні грані піраміди, що містять бічні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя бічна грань нахилена до неї під кутом β . Знайдіть площу третьої бічної грані. (Відповідь: $\frac{a^2 \operatorname{tg} \alpha}{4 \cos \beta}$.)

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна провести самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], СР 8 (завдання 1 і 3), СР 11 (завдання 2, 4 і 5).

Самостійна робота

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Скільки ребер має десятикутна піраміда?
 А 20 Б 10 В 15 Г 11
2. Знайдіть висоту конуса, якщо його твірна дорівнює 10 см і нахилена до площини основи під кутом 30° .
 А 2,5 см Б 5 см В 20 см Г $10\sqrt{3}$ см
3. Площа основи конуса дорівнює $25\pi \text{ см}^2$, а його твірна — 13 см. Знайдіть висоту конуса.
 А 8 см Б 5 см В 10 см Г 12 см

Достатній рівень (3 бали)

4. В основі піраміди лежить правильний трикутник зі стороною 4 см. Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 60° . Знайдіть висоту піраміди.

Високий рівень (3 бали)

5. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гострим кутом α і протилежним катетом a . Кожна бічна грань нахилена до основи піраміди під кутом β . Знайдіть висоту піраміди.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Скільки ребер має п'ятнадцятикутна піраміда?
 А 15 Б 30 В 16 Г 20

2. Знайдіть радіус основи конуса, якщо його твірна дорівнює 20 см, а кут між висотою конуса і твірною становить 30° ?

- А 40 см Б $10\sqrt{3}$ см В 10 см Г $20\sqrt{3}$ см

3. Довжина кола основи конуса дорівнює 12π см, а його висота — 8 см. Знайдіть твірну конуса.

- А 10 см Б 14 см В 2 см Г 12 см

Достатній рівень (3 бали)

4. В основі піраміди лежить правильний трикутник зі стороною 4 см. Усі бічні грані піраміди утворюють із її основою двогранні кути в 60° . Знайдіть висоту піраміди.

Високий рівень (3 бали)

5. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник із гострим кутом β і прилеглим до нього катетом b . Кожна бічна грань нахилена до основи піраміди під кутом α . Знайдіть висоту піраміди.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. А. 2. Б. 3. Г. 4. 4 см. 5. $\frac{a(\cos\alpha + \sin\alpha - 1)\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}$.

Варіант 2. 1. Б. 2. В. 3. А. 4. 2 см. 5. $\frac{(b\cos\beta + b\sin\beta - b)\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\beta}$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання самостійної роботи, і пропонує ознайомитися з відповідями.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 29, 32	[3]: § 12
С	№ 940, 1049	№ 225 (1, 2), 231 (1)
Д	№ 949, 1051	№ 225 (3), 229 (1, 2)
В	№ 1062	№ 231 (2), 235

Індивідуально

Периметр осьового перерізу конуса дорівнює P , а твірна нахилена до площини основи під кутом α . Знайти площу осьового перерізу конуса. (Відповідь: $\frac{P^2 \sin 2\alpha}{32 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}$.)

ТЕМА. ЗРІЗАНА ПІРАМІДА І ЗРІЗАНИЙ КОНУС.

Мета уроку: ознайомити учнів із поняттями зрізаного конуса, зрізаної піраміди, їхніми основними елементами та найпростішими перерізами; сформулювати вміння знаходити основні елементи зрізаної піраміди і зрізаного конуса; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять, уміння чітко й математично грамотно висловлювати свою думку; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати зрізану піраміду і зрізаний конус на моделях і рисунках; будувати зображення зрізаної піраміди і зрізаного конуса, а також їхніх елементів та перерізів; обчислювати основні елементи зрізаної піраміди і зрізаного конуса.

Основні поняття: зрізана піраміда, зрізаний конус, діагональний переріз зрізаної піраміди, осьовий переріз зрізаного конуса, правильна зрізана піраміда, апофема правильної зрізаної піраміди.

Обладнання: підручник, моделі зрізаної піраміди та зрізаного конуса.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ**

Учні здійснюють взаємоперевірку домашнього завдання за зразком, запропонованим учителем (ксерокопія на кожному парту).

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ **Фронтальне опитування**

1. Що являє собою переріз конуса площиною, паралельною основі конуса?
2. Що являє собою переріз піраміди площиною, паралельною основі піраміди?
3. Як співвідносяться площі перерізу і основи піраміди?

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ** **Слово вчителя**

Ви вже навчилися будувати нескладні перерізи конусів і пірамід і, напевно, звернули увагу, що у випадку перерізу піраміди площиною, паралельною її основі, відтинається піраміда, а у випадку перерізу конуса площиною, паралельною його основі, — конус. На уроці ми познайомимося зі зрізаними геометричними тілами.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Зрізана піраміда — многогранник, який відтинається внаслідок перетину піраміди площиною, паралельною її основі.

Основи зрізаної піраміди — дві її грані, які лежать у паралельних площинах і є подібними многокутниками.

Бічні грані зрізаної піраміди (інші грані) — трапеції (рис. 1).

Бічні ребра зрізаної піраміди — відрізки, що сполучають відповідні вершини основ.

Висота зрізаної піраміди — перпендикуляр, проведений із будь-якої точки однієї основи до площини іншої основи (рис. 1), A_1O — висота зрізаної піраміди.

Зрізана піраміда називається **правильною**, якщо вона отримана внаслідок перетину правильної піраміди площиною, паралельною основі.

Апофема правильної зрізаної піраміди — висота її бічної грані (рівнобедреної трапеції).

Висота правильної зрізаної піраміди — відрізок, який сполучає центри її основ.

Зрізаний конус — частина конуса, що лежить між основою конуса і площиною, паралельною його основі.

Основи зрізаного конуса — круги із центрами в точках O і O_1 (рис. 2).

Пряма OO_1 — вісь зрізаного конуса, відрізок OO_1 — висота зрізаного конуса.

Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобедрена трапеція AA_1B_1B (рис. 2), AA_1 і BB_1 — твірні зрізаного конуса.

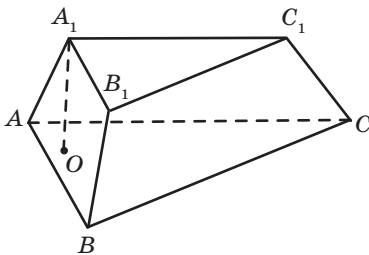


Рис. 1

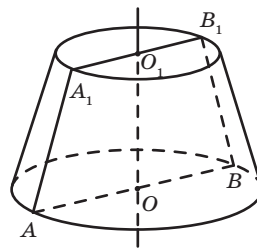


Рис. 2

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 7 см, сторони основ — 10 см і 2 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.
Розв'язання. Проведемо $C_1K \perp (ABC)$; $C_1K = OO_1$ (рис. 3). $K \in AC$, оскільки $C_1K \perp (ABC)$ і $OO_1 \perp (ABC)$, то $C_1K \parallel OO_1$, і вони

лежать в одній площині, що перетинає площину нижньої основи по прямій, де лежать всі спільні точки двох площин. Оскільки піраміда правильна, то $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — квадрати, $AC = 10\sqrt{2}$ см, $A_1C_1 = 2\sqrt{2}$ см і $OC = 5\sqrt{2}$ см; $O_1C_1 = \sqrt{2}$ см, а $KC = 4\sqrt{2}$ см. Із трикутника C_1KC ($\angle K = 90^\circ$) отримаємо:

$$C_1C = \sqrt{C_1K^2 + KC^2} = \sqrt{7^2 + (4\sqrt{2})^2} = \sqrt{49 + 32} = \sqrt{81} = 9 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 9 см.

2. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 11 см і 16 см, твір-на 13 см. Знайдіть відстань від центра меншої основи до точки кола більшої основи.

Розв'язання. Нехай A — точка, що належить колу більшої основи зрізаного конуса (рис. 4) із висотою O_1O , де O і O_1 — центри його основ. Через точку A і висоту OO_1 конуса, проведемо площину, яка перетинає основи по діаметрах AB і A_1B_1 , а бічну поверхню — по твірних AA_1 і BB_1 . Знайдемо O_1A , у площині AA_1B_1 проведемо $A_1K \parallel OO_1$. $A_1O_1 \parallel AO$ за властивістю паралельних площин, тому KA_1O_1O — паралелограм. Отже, $OK = A_1O_1$ і $AK = AO - A_1O_1 = 16 - 11 = 5$ (см).

Із трикутника AKA_1 ($\angle K = 90^\circ$) отримаємо: $A_1K = AA_1^2 - AK^2 = 169 - 25 = 144$ см². Отже, $O_1O^2 = 144$ см².

Із трикутника AOO_1 ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $O_1A = \sqrt{OO_1^2 + AO^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ (см).

Відповідь: 20 см.

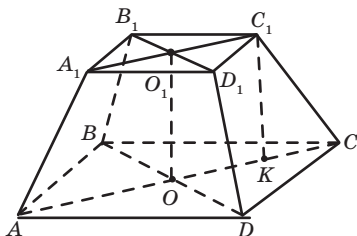


Рис. 3

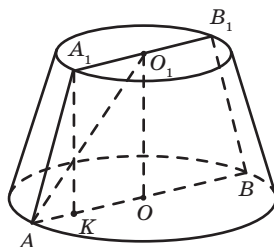


Рис. 4

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Математичний диктант

1. Якими фігурами є діагональні перерізи зрізаної піраміди? (*Відповідь:* трапеціями.)
2. Скільки ребер, перпендикулярних до площини основи, може мати зрізана піраміда? (*Відповідь:* одне.)

3. Чи можна вважати зрізану піраміду окремим випадком піраміди? (Відповідь: ні.)
4. Які многокутники є основами правильної зрізаної піраміди? (Відповідь: правильні.)
5. Якою фігурою є осьовий переріз зрізаного конуса? (Відповідь: трапецією.)
6. Висота зрізаного конуса дорівнює різниці радіусів його основ. Знайдіть кут між твірною конуса й площиною нижньої основи. (Відповідь: 45° .)



Осьовим перерізом зрізаного конуса, як і діагональним перерізом зрізаної піраміди, є трапеція.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 29, 32	[3]: § 12
С	№ 1063 (а), 1041	№ 226 (1, 2)
Д	№ 955, 1058	№ 226 (3)
В	№ 1345	№ 226 (4), 234

Індивідуально

1. Підготувати коротке повідомлення на тему «Правильні многогранники».
2. Сторони основ зрізаної правильної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 6 см. Бічна грань утворює із більшою основою кут 60° . Знайти висоту зрізаної піраміди (Відповідь: 2 см.)

УРОК № 18

ТЕМА. ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ.

Мета уроку: сформувати в учнів поняття про правильні многогранники; ознайомити з видами правильних многогранників: тетраедром, кубом, октаедром, додекаедром, ікосаедром; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять, культуру математичного мовлення й записів; виховувати інтерес до математики, наполегливість, активність, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати п'ять видів правильних многогранників; розв'язувати найпростіші задачі на знаходження елементів правильних многогранників.

Основні поняття: правильний многогранник, правильний тетраедр, правильний гексаедр, правильний октаедр, правильний додекаедр, правильний ікосаедр.

Обладнання: підручник, моделі правильних многогранників.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, які виникли в учнів під час виконання домашнього завдання, а потім кілька учнів роблять коротке повідомлення на тему «Правильні многогранники».

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Який многокутник називається правильним?
2. Що називається тетраедром?
3. Який многокутник має всі грані у вигляді правильних чотирикутників?
4. Чому дорівнює сума плоских кутів при вершині куба?
5. Яким має бути натуральне число n , щоб існував правильний n -кутник?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Властивості деяких многогранників, про які ви сьогодні дізнаєтеся, здавна привертала увагу філософів, священиків, архітекторів, ювелірів. Платон пов'язував із многогранниками чотири природні стихії: Вогонь, Землю, Повітря й Воду — і передбачав, що існує ще один особливий многогранник, який пов'язаний із п'ятою стихією — Божественним етером. Ідеї Платона — це перші спроби математичного моделювання у природознавстві, тому многогранники, які описував Платон, іноді називають платоновими тілами. Сьогодні на уроці ви ознайомитеся з цими дивними геометричними фігурами.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

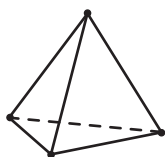
Робота в групах

Учні працюють у групах над складанням зведеної таблиці «Правильні многогранники» із подальшим коментарем біля дошки. Учитель дає визначення правильному многограннику.

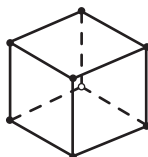
Правильним многогранником називається опуклий многогранник, у якому всі грані — рівні правильні многокутники і в кожній вершині сходиться однакове число ребер.

Оскільки існує п'ять видів правильних многогранників (див. рисунок), то кожна з п'яти груп отримує модель якогось із них і визначає:

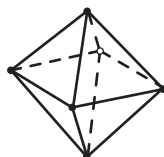
- 1) вид грані;
- 2) число граней;
- 3) число вершин;
- 4) число ребер.



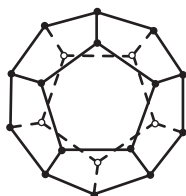
Правильний тетраедр



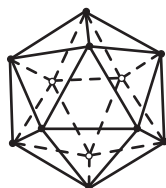
Правильний гексаедр



Правильний октаедр



Правильний додекаедр



Правильний ікосаедр

Після невеликого дослідження учні колективно складають зведену таблицю:

Правильний многогранник	Вид грані	Число		
		вершин	граней	ребер
Правильний тетраедр	Правильний трикутник	4	4	6
Правильний гексаедр	Правильний чотирикутник	8	6	12
Правильний октаедр	Правильний трикутник	6	8	12
Правильний додекаедр	Правильний п'ятикутник	20	12	30
Правильний ікосаедр	Правильний трикутник	12	20	30

Учитель просить знайти число $(V + G - 2)$ у кожному з цих випадків і порівняти отриманий результат із числом ребер.

V — вершини, G — грані, P — ребра. Маємо: $V + G - 2 = P$.



Гранями правильного многогранника можуть бути тільки правильні трикутники, чотирикутники або п'ятикутники.

Примітка. Обґрунтування цього факту може бути надано на розсуд учителя або всім учням, або тим, хто виявляє підвищену цікавість до математики (див. додатковий матеріал до уроку).

Додатковий матеріал

Обґрунтуємо твердження, що гранями правильного многогранника можуть бути лише трикутники, чотирикутники, п'ятикутники.

При $n \geq 6$ кут правильного n -кутника, як відомо, буде не меншим за 120° . Оскільки будь-який кут правильного многогранника має не менше трьох граней, то за умови $n \geq 6$ сума плоских кутів многогранного кута буде не меншою ніж $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$. Але цього не може бути, адже сума плоских кутів при одній вершині повинна бути меншою за 360° , інакше ніякий многогранний кут із цих многокутників скласти не вдасться.

Таким чином, вершина правильного многогранника може бути вершиною трьох, чотирьох або п'яти правильних трикутників, або трьох квадратів, або трьох правильних п'ятикутників.

Далі учні, які готували коротке повідомлення на тему «Правильні многогранники», роблять повідомлення (див. додатковий матеріал до уроку).

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Знайдіть кут нахилу діагоналі куба до площини грані. (Відповідь: 45° .)
2. Доведіть, що кінці двох непаралельних діагоналей протилежних граней куба є вершинами тетраедра.
3. Знайдіть двогранні кути правильного тетраедра. (Відповідь: $\approx 72^\circ 32'$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Перелічіть види правильних многогранників.
2. Чому правильні многогранники називаються також платоновими тілами?
3. Перелічіть властивості правильних многогранників.
4. Скільки чотиригранних кутів має октаедр?
5. Знайдіть суму плоских кутів при всіх вершинах ікосаедра.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 30	[3]: § 14
С	№ 976	с. 310, контр. запитання 1, 2, 5, 7
Д	№ 990	№ 259
В	№ 995	№ 264

Індивідуально

Довести, що центри граней куба — вершини октаедра.

Замість розв'язання задач можна виконати завдання за посібником [5], СР 9.

☑ Додатковий матеріал

Одним із найдивовижніших досягнень давньогрецької математики є відкриття у VI ст. до н. е. п'яти правильних многогранників. Піфагорійці приділяли особливу увагу правильним многогранникам, вважаючи їхньою «незаперечною» перевагою те, що їх п'ять. Платон, наприклад, узагалі надавав усьому світу форму додекаедра.

Учення про правильні многогранники, яке викладене у XIII книзі Евкліда, є вінцем його «Начал». Учений дослідив п'ять правильних многогранників, а потім довів, що, крім цих п'яти тіл, інших правильних многогранників немає.

Інтерес до правильних многогранників відродився в епоху Ренесансу.

Доведення теореми про одиничність п'яти правильних многогранників уперше ввів в елементарну геометрію А. Лежандр у 1794 р. На початку XIX ст. французький математик і механік Л. Пуансо відкрив існування чотирьох правильних зірчастих многогранників. У 1812 р. О. Коші довів, що інших правильних зірчастих многогранників не існує.

УРОК № 19

ТЕМА. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Циліндри і призми. Конуси і піраміди»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, уміння організовувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Циліндри і призми. Конуси і піраміди».

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням учителю на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель налаштовує учнів на вдумливу самостійну роботу, звертає увагу на необхідність дати докладні пояснення до задач 7–9, до розв'язання задачі 8 застосувати властивість медіани прямокутного трикутника, а в задачі 9 виконати додаткову побудову.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна провести контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], КР 2.

Контрольна робота № 2

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 см, 2 см і 2 см. Знайдіть його діагональ.

А 5 см Б 3 см В 9 см Г 4 см

2. Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, який лежить у її основі, і дорівнюють 4 см. Знайдіть висоту піраміди.

А $2\sqrt{3}$ см Б 2 см В 8 см Г $4\sqrt{3}$ см

3. Осьовий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого $4\sqrt{2}$ см. Знайдіть радіус основи циліндра.

А 4 см Б 8 см В 2 см Г $2\sqrt{2}$ см

4. Твірна конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи конуса під кутом 60° . Знайдіть площу основи конуса.

А 9π см² Б 27π см² В 27 см² Г 9 см²

5. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть висоту піраміди.

А $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см Б $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ см В $5\sqrt{3}$ см Г 5 см

6. Радіус основи і висота циліндра відповідно дорівнюють 6 см і 5 см. Знайдіть кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

А $\arctg \frac{12}{5}$ Б $\arctg \frac{5}{12}$ В $\arctg \frac{6}{5}$ Г $\arctg \frac{5}{6}$

Достатній рівень (3 бали)

7. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює $10\sqrt{3}$ см і нахилене до площини основи під кутом 30° . Знайдіть сторону основи піраміди.

8. Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 5 см. Знайдіть висоту конуса, якщо його радіус дорівнює 8 см.

Високий рівень (3 бали)

9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, у якому радіуси основ дорівнюють 3 см і 6 см, а твірна — 5 см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть його діагональ.

А 7 см Б 11 см В 49 см Г 36 см

2. Бічні ребра піраміди дорівнюють гіпотенузі прямокутного трикутника, що лежить у її основі, висота піраміди дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічне ребро піраміди.

А 4 см Б 8 см В 12 см Г $12\sqrt{3}$ см

3. Радіус основи циліндра дорівнює 4 см, а осьовий переріз циліндра — квадрат. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра.

А $4\sqrt{2}$ см Б 8 см В $2\sqrt{2}$ см Г $8\sqrt{2}$ см

4. Площа основи конуса дорівнює 9π см². Знайдіть твірну конуса, яка нахилена до площини основи конуса під кутом 60° .

А 3 см Б 12 см В 6 см Г 9 см

5. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 8 см, а кут між бічним ребром і висотою становить 30° . Знайдіть радіус кола, описаного навколо основи піраміди.

А 4 см Б $4\sqrt{3}$ см В $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ см Г $4\sqrt{2}$ см

6. Радіус основи і висота циліндра відповідно дорівнюють 4 см і 7 см. Знайдіть кут нахилу діагоналі осьового перерізу до площини основи циліндра.

А $\arctg \frac{7}{4}$ Б $\arctg \frac{4}{7}$ В $\arctg \frac{7}{8}$ Г $\arctg \frac{8}{7}$

Достатній рівень (3 бали)

7. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 10 см і нахилене до площини основи під кутом 60° . Знайдіть сторону основи піраміди.

8. Відстань від центра основи конуса до середини твірної дорівнює 5 см. Знайдіть радіус основи конуса, якщо його висота дорівнює 6 см.

Високий рівень (3 бали)

9. Знайдіть площу осьового перерізу зрізаного конуса, у якому радіуси основ дорівнюють 3 см і 7 см, а твірна — 5 см.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. А. 5. Г. 6. Б.

7. Нехай SO — висота піраміди (рис. 1). Тоді точка O — центр квадрата $ABCD$ (піраміда правильна). Ребро SC — похила до площини ABC , OC — її проекція, тоді $\angle SCO = 30^\circ$ — кут нахилу бічного ребра до площини ABC . Із трикутника SOC ($\angle SOC = 90^\circ$) отримаємо: $OC = SC \cos \angle SCO = \frac{10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = 15$ (см).

Отже, $AB = OC\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$ (см). *Відповідь:* $15\sqrt{2}$ см.

8. Нехай SO — висота конуса (рис. 2), тоді SO — перпендикуляр до площини основи конуса, а отже, $SO \perp AO$. Із трикутника SOA ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо: $OM = \frac{1}{2}SA = 5$ (см). Тоді $SA = 10$ см за властивістю медіани прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, $OA = 8$ см за умовою і $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). *Відповідь:* 6 см.

9. Як відомо, осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобедрена трапеція, основи якої — діаметри основ зрізаного конуса, а бічна сторона — твірна зрізаного конуса. Нехай трапеція $ABCD$ — осьовий переріз зрізаного конуса (рис. 3). Знайдемо її площу. Оскільки радіуси основ конуса дорівнюють 3 см і 6 см, то основи трапеції $BC = 6$ см, $AD = 12$ см, а її бічна сторона $AB = CD = 5$ см. Проведемо $CM \parallel AB$, тоді в паралелограмі $ABCM$ $AM = BC = 6$ см, $CM = AB = 5$ см. Звідси $MD = AD - AM = 12 - 6 = 6$ (см). Розглянемо рівнобедрений трикутник MCD з основою MD . Його висота $CK \perp MD$ є також і медіаною. Тоді $MK = KD = 3$ см. Із трикутника CMK ($\angle CKM = 90^\circ$) отримаємо: $CK = \sqrt{CM^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см). $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CK = \frac{6 + 12}{2} \cdot 4 = 36$ (см²). *Відповідь:* 36 см².

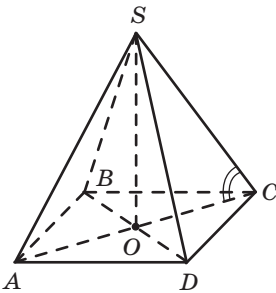


Рис. 1

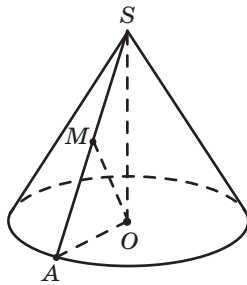


Рис. 2

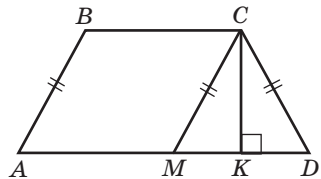


Рис. 3

Варіант 2. 1. А. 2. Б. 3. Г. 4. В. 5. А. 6. В.

7. Нехай SO — висота піраміди (рис. 4), тоді точка O — центр рівностороннього трикутника ABC (піраміда правильна). Ребро SC — похила до площини ABC , OC — її проекція, тоді $\angle SCO = 60^\circ$ — кут нахилу бічного ребра до площини ABC .

Із трикутника SOC ($\angle SOC = 90^\circ$) отримаємо: $OC = SC \cos \angle SCO = 10 \cos 60^\circ = 5$ (см). Отже, $AB = OC\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$ (см).

Відповідь: $5\sqrt{3}$ см.

8. Нехай SO — висота конуса (рис. 5), тоді SO — перпендикуляр до площини основи конуса, а отже, $SO \perp AO$. Із трикутника SOA ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо: $OM = \frac{1}{2}SA = 5$ см. Тоді $SA = 10$ см за властивістю медіани прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, $SO = 6$ см за умовою і $OA = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см) — радіус основи конуса. Відповідь: 8 см.

9. Як відомо, осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобедрена трапеція, основи якої — діаметри основ зрізаного конуса, а бічна сторона — твірна зрізаного конуса.

Нехай трапеція $ABCD$ — осьовий переріз зрізаного конуса (рис. 6). Знайдемо її площу. Оскільки радіуси основ конуса дорівнюють 3 см і 7 см, то основи трапеції $BC = 6$ см, $AD = 14$ см, а її бічна сторона $AB = CD = 5$ см.

Проведемо $CM \parallel AB$. Тоді в паралелограмі $ABCM$ $AM = BC = 6$ см, $CM = AB = 5$ см. Тоді $MD = AD - AM = 14 - 6 = 8$ (см). Розглянемо рівнобедрений трикутник MCD з основою MD . Його висота $CK \perp MD$ є також і медіаною. Тоді $MK = KD = 4$ см. Із трикутника CMK ($\angle CKM = 90^\circ$): $CK = \sqrt{CM^2 - MK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см).

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot CK = \frac{6 + 14}{2} \cdot 3 = 30 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 30 см².

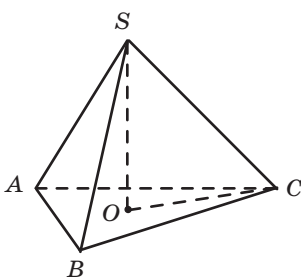


Рис. 4

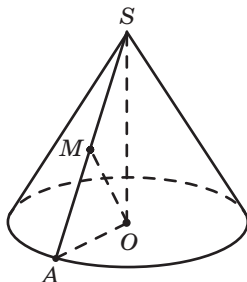


Рис. 5

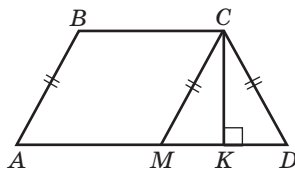


Рис. 6

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи, відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання контрольної роботи, і пропонує їм ознайомитися із правильними відповідями.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Повторити поняття кола, дотичної до кола, відомості про кулю і сферу.

УРОК № 20

ТЕМА. **КУЛЯ, СФЕРА. ПЛОЩИНА, ДОТИЧНА ДО СФЕРИ.**

Мета уроку: сформувати поняття кулі, сфери, радіуса кулі, діаметра кулі, діаметрально протилежних точок; розглянути переріз кулі площиною і поняття дотичної площини до сфери; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, уміння аналізувати й узагальнювати вивчений матеріал; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати кулю й сферу на моделях і рисунках; будувати зображення кулі та її елементів; знати поняття дотичної площини до сфери; уміти обчислювати основні елементи кулі та сфери.

Основні поняття: куля, сфера, діаметр кулі, радіус кулі, діаметрально протилежні точки, великий круг.

Обладнання: підручник, моделі куль і сфер.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Учитель повідомляє учням статистичні результати контрольної роботи й аналізує типові помилки, яких припустилися учні під час її написання.

III. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальна бесіда

1. Що називають колом?
2. Що таке радіус кола; діаметр кола?
3. За якою формулою можна обчислити довжину кола?
4. За якою формулою обчислюють площу круга?
5. Яке тіло є просторовим аналогом кола; круга?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Дитячий м'ячик, тенісний або футбольний м'яч, повітряна кулька... У кожного з вас свої дитячі спогади, пов'язані із грою з м'ячем. У школі вивчення, наприклад, географії прямо пов'язане з таким тілом, як куля. Географічні паралелі — це лінії перетину поверхні Землі (яку ми, ідеалізуючи, вважаємо кулею) площинами, паралельними площині екватора. Сьогодні ми узагальнимо, систематизуємо й розширимо знання про кулю та її поверхню.

V. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Бліцопитування за технологією «Мікрофон»

1. Яку фігуру називають сферою?
2. Що називають центром сфери; радіусом сфери?
3. Яку фігуру називають кулею?
4. Що називають поверхнею кулі?
5. Що називають центром кулі; радіусом кулі?

VI. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

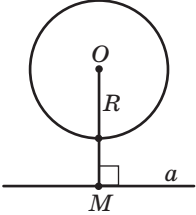
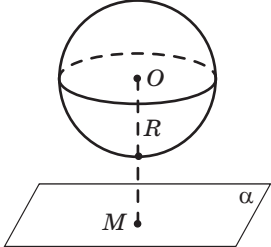
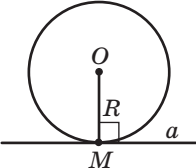
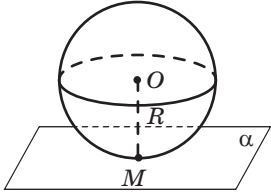
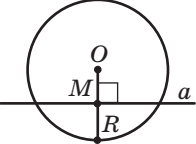
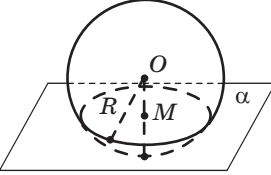
Шкільна лекція

Хорда сфери — відрізок, який сполучає дві точки сфери.

Діаметр сфери — хорда, яка проходить через центр сфери.

Кінці діаметра — діаметрально протилежні точки.

Розглянемо взаємне розміщення кулі та площини, провівши аналогії з розміщенням прямої та круга на площині, та заповнимо таблицю.

№ з/п	Пряма і круг	Площина і куля
1	<p>Не перетинаються $R < OM$</p> 	<p>Не перетинаються $R < OM$</p> 
2	<p>Дотикаються $R = OM$</p> 	<p>Дотикаються $R = OM$</p> 
3	<p>Перетинаються $R > OM$</p> 	<p>Перетинаються $R > OM$</p> 

Отже, якщо відстань від центра кулі до площини менша за радіус кулі, то переріз цієї кулі площиною — коло. Центр цього кола — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до січної площини.

Якщо січна площина проходить через центр кулі, цю площину називають **діаметральною площиною**. У цьому випадку радіус перерізу дорівнює радіусу кулі.

Переріз кулі діаметральною площиною називається **великим кругом**, а коло цього перерізу — **великим колом**.

Дотичною площиною до сфери (кулі) називається площина, що має з нею єдину спільну точку. Цю точку називають **точкою дотику**.

Дотична площина до сфери перпендикулярна до радіуса сфери, проведеного в точку дотику.

Якщо радіус сфери є перпендикуляром, проведеним із центра сфери до площини, що проходить через інший кінець радіуса, то ця площина є дотичною до сфери. Це твердження називають **ознакою дотичної площини**.

На рис. 1 площина α — дотична до сфери. OA — радіус сфери. $OA \perp \alpha$.

Дотичною прямою до сфери (кулі) називається пряма, що належить дотичній площині до цієї сфери (кулі) і проходить через точку дотику.



Дотична пряма перпендикулярна до радіуса сфери (кулі), проведеного в точку дотику.

Усі прямі дотичної площини до сфери, які проходять через точку A , є **дотичними прямими до сфери**.

Пряма, що проходить через точку сфери перпендикулярно до радіуса сфери, проведеного в цю точку, є **дотичною прямою до сфери**.

На рис. 2 $OA \perp a$, $OA = R$ — радіус сфери.

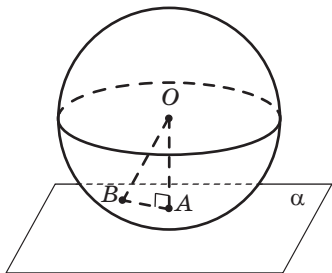


Рис. 1

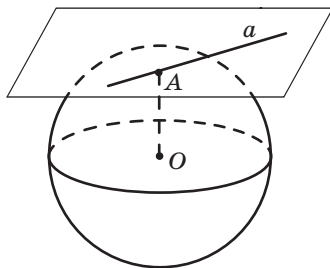


Рис. 2

VII. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. На відстані 10 см від центра кулі проведено переріз. Радіус кулі дорівнює 26 см. Знайдіть площу перерізу. (Відповідь: 576π см².)
2. Переріз сфери має довжину 12π см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини перерізу, якщо радіус, проведений у точку перерізу, нахилений до його площини під кутом 30° . (Відповідь: $2\sqrt{3}$ см.)

3. Пункт А розташований на 30° північної широти. Обчисліть шлях, який проходить цей пункт за 2 год внаслідок обертання Землі навколо своєї осі. Радіус земної кулі прийняти таким, що дорівнює 6000 км. (Відповідь: ≈ 2719 км.)

VIII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування за технологією «Мікрофон»

- Через які дві точки поверхні кулі можна провести кілька кіл великого круга? (Відповідь: через кінці діаметра.)
- Яка фігура є перетином двох великих кругів кулі? (Відповідь: відрізок, що є діаметром кулі.)
- Що називається дотичною площиною до кулі?
- Скільки спільних точок може мати поверхня кулі і пряма? (Відповідь: дві, одну, жодної.)
- Скільки можна провести прямих, які дотикаються до поверхні кулі в одній і тій самій точці? (Відповідь: нескінченну множину.)
- Скільки дотичних площин можна провести до даної сфери:
 - через пряму, що проходить поза сферою;
 - через точку, що лежить поза сферою?(Відповідь: а) дві; б) нескінченну множину.)

IX. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 33	[3]: § 15
С	№ 1071	№ 268 (1, 2)
Д	№ 1085	№ 268 (4)
В	№ 1097	№ 268 (5)

Індивідуально

- Радіус кулі дорівнює 6 см. Через кінець радіуса проведено площину під кутом 60° до нього. Знайти площу перерізу. (Відповідь: $9\pi\text{см}^2$.)
- Діаметр кулі дорівнює 10 см. На його поверхні дано точку N і коло, усі точки якого розташовані по прямій лінії на відстані 8 см від точки N . Знайти радіус цього кола. (Відповідь: 4,8 см.)

ТЕМА. КУЛЯ І СФЕРА.

Мета уроку: формувати вміння учнів застосовувати отримані знання під час розв'язування задач на знаходження елементів кулі та сфери, площ перерізів кулі, довжин кіл перерізів сфери; розвивати просторову уяву, увагу, пам'ять, логічне мислення; виховувати працьовитість, наполегливість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні розпізнавати кулю серед геометричних тіл; будувати зображення кулі та її перерізів; обчислювати елементи кулі, площі поверхонь її перерізів.

Обладнання: підручник, моделі кулі.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здійснюють самоперевірку домашнього завдання за зразком, запропонованим учителем.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

 Бліцопитування

Радіус кулі дорівнює 4 см. Знайдіть:

- а) діаметр кулі;
- б) довжину великого кола;
- в) площу великого круга;
- г) сторону квадрата, вписаного у велике коло;
- д) периметр квадрата, вписаного у велике коло;
- е) площу квадрата, вписаного у велике коло.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ **Слово вчителя**

Ви звернули увагу, що багато задач, розв'язання яких пов'язане зі знаходженням географічних координат, — не що інше як геометричні задачі, пов'язані зі сферою та кулею. Тому необхідно вміти швидко й чітко розв'язувати задачі на знаходження елементів кулі — це допоможе вам впевненіше почуватися в навколишньому світі.

Наприклад, вам необхідно знайти довжину паралелі, широта якої α , якщо радіус Землі дорівнює R . Оскільки Земля має форму

кулі, то довжина паралелі — це довжина деякого кола кулі, що лежить у площині, паралельній екватору. Широта α — кут нахилу радіуса кулі, проведеного паралельно площині екватора (рис. 1).

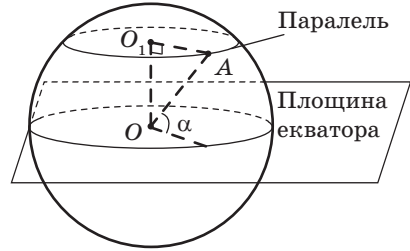


Рис. 1

Тоді довжину паралелі можна знайти як довжину кола радіуса $OA = r$. Із трикутника OO_1A ($\angle OO_1A = 90^\circ$) отримаємо:

$$r = R \sin(90^\circ - \alpha) = R \cos \alpha.$$

Тоді довжина l паралелі дорівнюватиме $l = 2\pi R \cos \alpha$.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Куля дотикається до всіх сторін правильного трикутника. Знайдіть радіус кулі, якщо сторона трикутника дорівнює $24\sqrt{3}$ см, а відстань від центра кулі до площини трикутника становить 5 см. (Відповідь: 13 см.)
2. Усі сторони квадрата, площа якого дорівнює 144 см^2 , дотикаються до сфери радіусом 10 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини квадрата. (Відповідь: 8 см.)
3. Усі вершини прямокутного трикутника з гіпотенузою 16 см лежать на сфері, радіус якої дорівнює 17 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини трикутника. (Відповідь: 15 см.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування

1. На дотичній до кулі площині α взято точку B і сполучено із центром кулі O (рис. 2). Відрізок OB перетинає кулю в точці C . Чому дорівнює довжина відрізка BC , якщо $AO = 6$, $AB = 8$ см?
2. Знайдіть відстань від центра кулі до січної площини (рис. 3), якщо радіус кулі дорівнює 5 см, а радіус перерізу — 4 см.

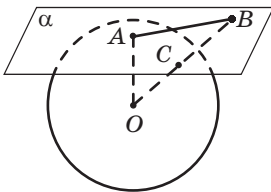


Рис. 2

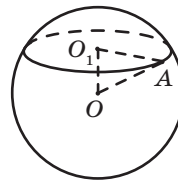


Рис. 3

3. Два перерізи кулі площинами мають рівні площі. Чи є правильним твердження, що площини цих перерізів однаково віддалені від центра кулі?
4. Як зміниться площа великого круга, якщо радіус кулі збільшити вдвічі?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 33	[3]: § 15
С	№ 1080	№ 269 (1, 2)
Д	№ 1089	№ 269 (3, 4)
В	№ 1096	№ 269 (5)

Індивідуально

Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайти відстань від площини трикутника до центра кулі, що дотикається до всіх сторін трикутника. Радіус кулі дорівнює 5 см.

УРОК № 22

ТЕМА. КУЛЯ І СФЕРА. ТІЛА ОБЕРТАННЯ.

Мета уроку: провести перевірку й корекцію знань і вмінь учнів із теми «Куля і сфера»; ознайомити з поняттям тіла обертання; розвивати просторову уяву, пам'ять, увагу, логічне мислення, уміння правильно оцінювати рівень власних знань, самостійно приймати рішення й орієнтуватися в часі; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність, уміння аналізувати свою роботу; прищеплювати інтерес до математики.

Очікувані результати: учні повинні вміти застосовувати знання й уміння в стандартних і нестандартних ситуаціях; розпізнавати серед основних геометричних тіл тіла обертання; будувати зображення тіл обертання та їхніх перерізів; обчислювати основні елементи тіл обертання.

Основні поняття: тіла обертання.

Обладнання: моделі тіл обертання.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

На цьому етапі уроку можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], СР 12.

Самостійна робота

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Радіус кулі дорівнює $\sqrt{3}$ см. Де розташована точка А, якщо вона віддалена від центра кулі на відстань 1,5 см?

А На поверхні кулі

В Усередині кулі

Б Поза кулею

Г Неможливо встановити

2. Через кулю на відстані 3 см від її центра проведено переріз, площа якого дорівнює 16π см². Знайдіть радіус кулі.

А 25 см

Б 4 см

В 5 см

Г Інша відповідь

3. Знайдіть довжину великого круга, якщо радіус кулі дорівнює 3 см.

А 9π см

Б 6π см

В 9 см

Г Інша відповідь

Достатній рівень (3 бали)

4. Радіус кулі дорівнює 4 см. Через кінець радіуса проведено площину під кутом 30° до нього. Знайдіть площу утвореного перерізу.

Високий рівень (3 бали)

5. На поверхні кулі дано три точки. Відстані між ними по прямій дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, радіус кулі $\sqrt{15,25}$ см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини, яка проходить через ці точки.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Радіус кулі дорівнює $\sqrt{2}$ см. Де розташована точка, якщо вона віддалена від центра кулі на відстань 1,5 см?

А Поза кулею

В На поверхні кулі

Б Усередині кулі

Г Неможливо встановити

2. Через кулю, радіус якої дорівнює 10 см, проведено переріз на відстані 8 см від її центра. Знайдіть площу цього перерізу.

А 36π см²

Б 64π см²

В 36 см²

Г Інша відповідь

3. Знайдіть площу великого круга, якщо радіус кулі дорівнює 2 см.
А $4\pi \text{ см}^2$ Б $2\pi \text{ см}^2$ В 4 см^2 Г Інша відповідь

Достатній рівень (3 бали)

4. Радіус кулі дорівнює 5 см. Через кінець радіуса проведено площину під кутом 45° до нього. Знайдіть площу утвореного перерізу.

Високий рівень (3 бали)

5. На поверхні кулі дано три точки. Відстані між ними по прямій дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см, радіус кулі 13 см. Знайдіть відстань від центра кулі до площини, яка проходить через ці точки.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. В. 2. В. 3. Б. 4. $12\pi \text{ см}^2$. 5. 3 см.

Варіант 2. 1. А. 2. А. 3. А. 4. $12,5\pi \text{ см}^2$. 5. 12 см.

Учитель, зібравши роботи, відповідає на запитання, що виникли в учнів, і пропонує ознайомитися з відповідями.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Фронтальне опитування

1. Що називають циліндром?
2. Що таке конус?
3. Що називають кулею; сферою?
4. Що є віссю циліндра?
5. Що є віссю конуса?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Геометричні тіла, визначення яких ми зараз навели, мають одну особливість: кожне з них може бути отримане обертанням якоїсь плоскої фігури. Тому сьогодні, розглянувши їх як тіла обертання, ми дамо їм й інші визначення.

Циліндр, конус і куля — основні види тіл обертання. Звичайно, ці тіла — тільки моделі реальних предметів, що нас оточують. Загальний підхід до їх вивчення і результати, отримані за допомогою геометрії, широко застосовуються в архітектурі, мистецтві, техніці. Вивчення тіл обертання спирається на відомі вам з курсу планіметрії властивості многокутників і кіл.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Уявіть собі плоский багатокутник $ABCD$, що обертається навколо прямої, яка містить сторону AB (рис. 1). Кожна його точка, що не лежить на прямій AB , описує коло із центром на цій прямій. Тоді весь багатокутник $ABCD$ описує тіло, що називають **тілом обертання** (рис. 2).

Пряма AB називається **віссю обертання**.

Переріз тіла обертання площиною, яка проходить через його вісь, називають **осьовим перерізом тіла обертання**.

Прямим круговим циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони (рис. 3).

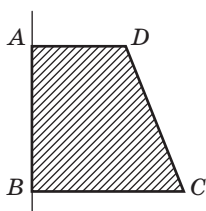


Рис. 1

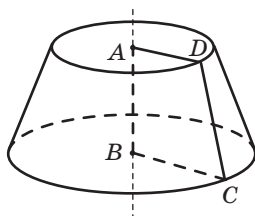


Рис. 2

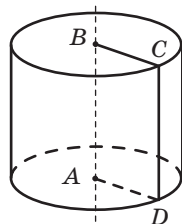


Рис. 3

Прямим круговим конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо одного з його катетів (рис. 4).

Якщо прямокутний трикутник SAO ($\angle SOA = 90^\circ$) обертається навколо катета SO , то його гіпотенуза SA описує **бічну поверхню конуса**, а катет OA — **круг, що є основою конуса**.

Зрізаний конус можна розглядати як тіло обертання, утворене внаслідок обертання прямокутної трапеції навколо сторони, перпендикулярної до основ трапеції (рис. 5). У цьому випадку друга бічна сторона трапеції описує **бічну поверхню зрізаного конуса**, а основи — **круги, які є основами зрізаного конуса**.

Кулею називається тіло, утворене обертанням круга навколо його діаметра.

Сферу називається тіло, утворене обертанням кола навколо його діаметра.

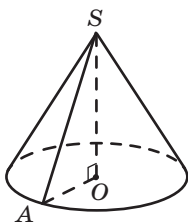


Рис. 4

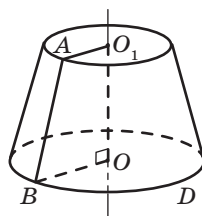


Рис. 5

Форму тіл обертання мають багато елементів посуду, іграшок, архітектурних споруд. Дзига, наприклад, може розглядатися як тіло обертання, отримане внаслідок обертання прямокутного трикутника навколо його гіпотенузи.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Коллективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Прямокутник зі сторонами 3 см і 8 см обертається навколо більшої сторони. Знайдіть діагональ осевого перерізу утвореного циліндра. (Відповідь: 10 см.)
2. Прямокутний трикутник із гіпотенузою 10 см і гострим кутом 30° обертається навколо катета, що прилягає до цього кута. Знайдіть площу основи утвореного конуса. (Відповідь: 25π см².)
3. Прямокутна трапеція OO_1AB обертається навколо меншої бічної сторони. Знайдіть довжину радіуса більшої основи й висоту утвореного зрізаного конуса. (Відповідь: 12; 8.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Практична робота

Накресліть від руки тіла, які утворюються внаслідок обертання навколо прямої a геометричних фігур, зображених на рис. 6, та схарактеризуйте їх.

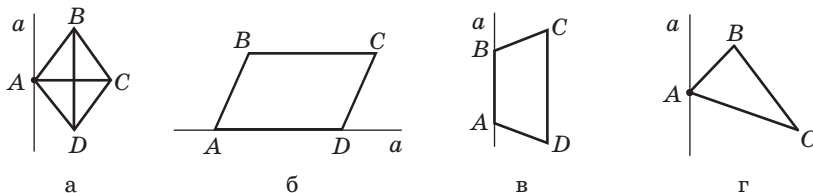


Рис. 6

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 31	[3]: § 16
С	№ 1015	№ 286
Д	№ 1060 (а, б)	№ 287
В	№ 1061 (в)	№ 288

Індивідуально

Прямокутний трикутник з катетом 6 см і протилежним йому кутом, що становить 30° , обертається навколо іншого катета. Знайти радіус кола, описаного навколо осевого перерізу отриманого конуса. (Відповідь: $4\sqrt{3}$ см.)

ТЕМА. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ.

Мета уроку: розглянути розв'язання задач на геометричну комбінацію «циліндр — призма»; дати уявлення про вписані й описані циліндри та призми; формувати уявлення про площину, яка дотикається до циліндра; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні засвоїти поняття циліндра, вписаного в призму, і циліндра, описаного навколо призми; уміти розв'язувати нескладні задачі на знаходження елементів вписаних і описаних циліндрів і призм.

Основні поняття: призма, вписана в циліндр; призма, описана навколо циліндра; площина, що дотикається до циліндра.

Обладнання: підручник, моделі циліндрів і призм.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП**II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ**

Учитель відповідає на запитання учнів, що виникли під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ **Бліцопитування**

1. Який многокутник називають вписаним у коло?
2. Який многокутник називають описаним навколо кола?
3. За якої умови можна описати коло навколо чотирикутника?
4. У який чотирикутник можна вписати коло?
5. Де розміщений центр кола, вписаного в многокутник?
6. Де розміщений центр кола, описаного навколо многокутника?

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ** **Слово вчителя**

У повсякденному житті нам часто доводиться стикатися з предметами у формі циліндра або призми, але частіше — з їх комбінаціями, які й розглянемо сьогодні на уроці.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Шкільна лекція

Призму, вписану в циліндр, називається така призма, у якій площини основ є площинами основ циліндра, а бічні ребра — твірними циліндра. У цьому випадку циліндр називається **описаним навколо призми**.

🔍 Щоб навколо призми вдалося описати циліндр, вона має бути прямою і навколо її основ можна було описати коло.

На рис. 1 зображена призма $ABCA_1B_1C_1$, вписана в циліндр.

Дотичною площиною до циліндра називається площина, яка проходить через твірну циліндра і є перпендикулярною до площини осьового перерізу циліндра, що містить цю твірну (рис. 2).

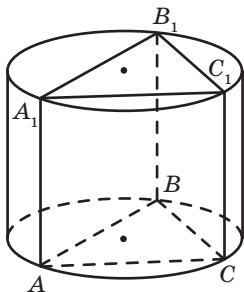


Рис. 1

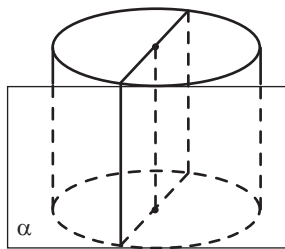


Рис. 2

Призму, описану навколо циліндра, називається призма, у якій площини основ є площинами основ циліндра, а бічні грані дотикаються до циліндра. У цьому випадку циліндр називається **вписаним у призму**.

Які умови має задовольняти призма, щоб у неї можна було вписати циліндр? Очевидно, що це має бути пряма призма, причому така, що в її основі можна вписати коло.

Зазначимо, що вісь циліндра, вписаного в призму, буде рівновіддалена від усіх бічних граней цієї призми.

🔍 Скільки сторін повинна мати основа прямої призми, щоб у неї завжди можна було вписати циліндр і навколо неї можна було описати циліндр? Це трикутна призма, оскільки навколо будь-якого трикутника можна описати коло і в будь-який трикутник можна вписати коло.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. У рівносторонній циліндр радіусом 5 см вписано правильну трикутну призму. Знайдіть площу перерізу призми, проведеного через вісь циліндра й бічне ребро призми. (Відповідь: 75 см^2 .)

2. Основа прямої призми — квадрат із діагоналлю $4\sqrt{2}$ см, а висота призми дорівнює 7 см. Знайдіть діагональ осьового перерізу циліндра, вписаного в цю призму. (Відповідь: $\sqrt{65}$ см.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Графічний диктант

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так» \cap , «ні» $_$, а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

У циліндр вписано правильну шестикутну призму. Висота циліндра дорівнює 3 см, а радіус — 2 см. Визначте правильність таких тверджень:

- 1) усі бічні ребра призми збігаються з твірними циліндра;
- 2) сторона основи призми дорівнює 2 см;
- 3) сума площ усіх бічних граней призми дорівнює 36 см^2 ;
- 4) площа осьового перерізу циліндра більша, ніж площа найбільшого діагонального перерізу призми;
- 5) кожна бічна грань призми є перерізом циліндра площиною, паралельною осі циліндра.

У куб вписано циліндр радіусом 4 см. Визначте, які твердження є правильними, а які — ні:

- 6) висота циліндра дорівнює 8 см;
- 7) площа осьового перерізу циліндра дорівнює $64\sqrt{2} \text{ см}^2$;
- 8) площа грані куба становить 16 см^2 ;
- 9) сума площ усіх граней куба дорівнює 192 см^2 ;
- 10) площа діагонального перерізу куба становить 64 см^2 .

Ключ-відповідь: 

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Розв'язати задачі.

1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см. Знайти площу основи циліндра, описаного навколо призми.
2. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 36 см^2 , а її висота — 5 см. Знайти площу осьового перерізу циліндра, вписаного в призму.
3. У циліндр із радіусом основи 6 см і висотою 8 см вписано правильну трикутну призму, а в неї вписано циліндр. Знайти діагональ осьового перерізу цього циліндра.

ТЕМА. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ.

Мета уроку: розглянути розв'язання задач на геометричну комбінацію «конус — піраміда»; дати уявлення про вписані й описані конуси й піраміди; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні засвоїти поняття конуса, вписаного в піраміду, і конуса, описаного навколо піраміди; уміти розв'язувати нескладні задачі на знаходження елементів вписаних і описаних конусів і пірамід.

Основні поняття: піраміда, вписана в конус; піраміда, описана навколо конуса; площина, дотична до конуса.

Обладнання: підручник, моделі конусів і пірамід.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

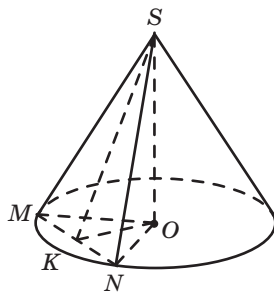
II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ;
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

☑ Математичний диктант

Через дві твірні конуса проведено площину (див. рисунок), MN — хорда, що дорівнює 2 см. Твірна конуса дорівнює 5 см, радіус конуса — 4 см. Знайдіть:

- висоту конуса;
- площу осевого перерізу конуса;
- відстань від центра конуса до хорди MN ;
- відстань від вершини конуса до хорди MN ;
- площу перерізу конуса, що проходить через хорду MN і вершину конуса;
- синус кута між твірною конуса й хордою MN .



Учні здійснюють самоперевірку за відповідями, заздалегідь підготовленими на дошці.

- Відповідь:** а) 3 см; б) 12 см^2 ; в) $\sqrt{15}$ см; г) $2\sqrt{6}$ см; д) $2\sqrt{6} \text{ см}^2$;
е) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

На попередньому уроці було розглянуто комбінації циліндра й призми. Зрозуміло, що тепер необхідно розглянути можливі комбінації піраміди й конуса.

IV. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Піраміда називається вписаною в конус, якщо її основою є многокутник, вписаний в основу конуса, а її вершина є вершиною конуса. У цьому випадку конус називається описаним навколо піраміди.



Бічні ребра вписаної в конус піраміди — твірні конуса.

Дотичною площиною до конуса називається площина, яка проходить через твірну конуса перпендикулярно до площини осьового перерізу, проведеного через цю твірну.

Піраміда називається описаною навколо конуса, якщо її основою є многокутник, описаний навколо основи конуса, а її вершина збігається з вершиною конуса. У цьому випадку конус називається вписаним у піраміду.



Якщо піраміда вписана в конус або описана навколо конуса, то висоти конуса й піраміди збігаються.

V. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Навколо конуса з радіусом основи 10 см і висотою 24 см описано правильну трикутну піраміду. Знайдіть площу бічної грані піраміди. (Відповідь: $260\sqrt{3}$ см².)
2. Основа піраміди — прямокутник, менша сторона якого дорівнює 6 см, а кут між діагоналями — 60° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть площу осьового перерізу конуса, описаного навколо піраміди. (Відповідь: 36 см².)
3. Основа піраміди — прямокутний трикутник, катет якого дорівнює b , а протилежний гострий кут дорівнює β . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом α . Знайдіть твірну конуса, описаного навколо цієї піраміди. (Від-

повідь: $\frac{b}{2 \sin \beta \cos \alpha}$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

- Назвіть умови, які має задовольняти піраміда, якщо:
 - у неї можна вписати конус;
 - навколо неї можна описати конус.
- Чи є правильним твердження, що вершина конуса, описаного навколо піраміди, рівновіддалена від вершин основи піраміди?
- Чи є правильним твердження, що вершина конуса, вписаного в піраміду, рівновіддалена від сторін основи піраміди?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Розв'язати задачі.

- С** 1. У конус із твірною 13 см і висотою 12 см вписано правильну трикутну піраміду. Знайти площу основи цієї піраміди.
(Відповідь: $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ см².)
- Д** 2. Основа піраміди — ромб, площа якого дорівнює 30 см², а периметр — 20 см. Висоти всіх бічних граней піраміди, проведені з її вершини, нахилені до площини її основи під кутом 45°. Знайти площу осьового перерізу конуса, вписаного в піраміду. (Відповідь: 9 см².)

УРОК № 25

ТЕМА. КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ.

Мета уроку: розглянути розв'язання задач на геометричні комбінації «куля — призма» і «куля — піраміда»; дати уявлення про вписані й описані кулі та призми, кулі та піраміди; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні засвоїти поняття кулі, вписаної в многогранник, і кулі, описаної навколо многогранника; вміти розв'язувати нескладні задачі на знаходження елементів вписаних й описаних куль і призм, куль і пірамід.

Основні поняття: куля, вписана в многогранник; куля, описана навколо многогранника.

Обладнання: підручник, моделі многогранників і куль.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем на дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Що є перерізом кулі площиною?
2. Яка площина називається дотичною до кулі?
3. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута?
4. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від граней двогранного кута?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Численні архітектурні конструкції, технічні деталі тощо пов'язані не тільки з тілами обертання, а й із їх комбінаціями. Доволі часто зустрічаються комбінації кулі з многогранниками. Сьогодні ми розглянемо саме такі нескладні комбінації.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Многогранник називається вписаним у кулю, якщо всі його вершини лежать на поверхні кулі. У цьому випадку куля називається описаною навколо многогранника.

Що є центром кулі, описаної навколо многогранника? (Відповідь: точка, рівновіддалена від усіх його вершин.) Чи є правильним твердження, що навколо куба можна описати кулю? (Відповідь: так.)

Центр кулі, описаної навколо правильної піраміди, лежить на її осі.

Многогранник називається описаним навколо кулі, якщо всі його грані дотикаються до кулі. У цьому випадку куля називається вписаною в многогранник.



Центр кулі, вписаної в многогранник, є точкою, рівновіддаленою від усіх його граней.

Бліцопитування

1. Чи можна в куб вписати кулю? (Відповідь: так.)
2. Чому дорівнює радіус кулі, вписаної в куб, ребро якого дорівнює a ? (Відповідь: $\frac{a}{2}$.)
3. Чи можна вписати кулю в прямокутний паралелепіпед? (Відповідь: ні.)

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

☑ Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. У пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник із кутом 30° і гіпотенузою 10 см, вписано кулю. Знайдіть площу бічної грані, що містить більший катет основи.

Розв'язання. $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма (рис. 1), її основа —

прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), тоді $AC = 10 \cdot \cos 30^\circ =$

$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ (см). $BC = 10 \cdot \sin 30^\circ = 5$ (см). Оскільки в призму

вписано кулю, то діаметр кулі дорівнює висоті призми, а радіус кулі є радіусом круга, вписаного в трикутник ABC , $H = 2r_{\text{кулі}}$;

$r_{\text{кулі}} = r_{\triangle ABC}$; $r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{5\sqrt{3}+10+5}{2} = \frac{15+5\sqrt{3}}{2}$; $H = AA_1 = 15+5\sqrt{3}$.

Оскільки $\angle A = 30^\circ$, то $\angle B = 60^\circ$. Тоді $AC > BC$ (лежить напроти більшого кута), а отже, грань AA_1C_1C — це грань, що містить більший катет основи.

Тоді $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = 5\sqrt{3} \cdot (5\sqrt{3} - 3) = 75 - 25\sqrt{3}$ (см²).

Відповідь: $75 - 25\sqrt{3}$ (см²).

2. Навколо правильної чотирикутної призми описано кулю радіусом 3 см. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з основою кут 60° . Знайдіть площу основи призми та її висоту.

Розв'язання. Як відомо, центр кулі, описаної навколо прямої призми, лежить на середині висоти, що проходить через центр кола, описаного навколо основи, тобто в точці O_1 (рис. 2). Тоді $O_1A = R$, де R — радіус кулі, $R = 3$ см. Оскільки $OO_1 \perp (ABC)$, то AO — проекція AO_1 на площину основи й кут O_1AO — кут нахилу радіуса кулі до площини основи, $\angle O_1AO = 60^\circ$.

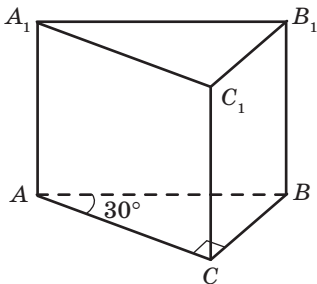


Рис. 1

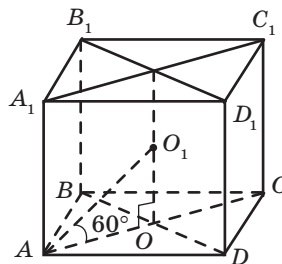


Рис. 2

Із трикутника O_1OA ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $OA = AO_1 \cdot \cos 60^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ (см).

$OO_1 = AO_1 \cdot \sin 60^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (см). Тоді $AC = 2AO = 3$ см.

$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC^2 = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5$ см²; $H = 2OO_1 = 3\sqrt{3}$ см.

Відповідь: 4,5 см²; $3\sqrt{3}$ см.

3. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює $6\sqrt{3}$ см і утворює з висотою піраміди кут, що становить 30° . Знайдіть радіус кулі, вписаної в піраміду.

Розв'язання. Нехай $SABC$ — правильна піраміда (рис. 3), в основі якої лежить правильний трикутник ABC , SK — її апофема, $SK = 6\sqrt{3}$ см, $\angle OSK = 30^\circ$. Оскільки піраміда правильна, то всі її грані однаково нахилені до основи, а центр кулі, вписаної в піраміду, лежить у точці перетину висоти піраміди з бісектрисою лінійного кута будь-якого двогранного кута при основі піраміди, стороною якою є апофема.

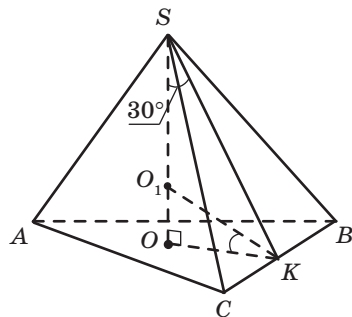


Рис. 3

Тоді OO_1 — радіус кулі. Із трикутника SOK ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $OK = SK \cdot \sin 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$ (см).

Із трикутника O_1OK ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $OO_1 = OK \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$ (см) ($\angle OSK = 30^\circ$, тоді $\angle OKS = 60^\circ$, O_1K — бісектриса, тому $\angle OKO_1 = 30^\circ$).

Відповідь: 3 см.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. У якому випадку в пряму призму можна вписати кулю?
2. Де міститься центр кулі, вписаної в пряму призму?
3. У якому випадку кулю можна описати навколо прямої призми?
4. Де міститься центр кулі, описаної навколо прямої призми?
5. У якому випадку навколо піраміди можна описати кулю?

6. Який многогранник називається вписаним у кулю; описаним навколо кулі?
7. Чи є правильним твердження, що якщо в правильну чотирикутну призму вписано кулю, то ця призма є кубом?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 34	[3]: § 15
С	№ 1107	№ 275 (1, 2), 276
Д	№ 1122	№ 275 (3, 4), 279
В	№ 1124	№ 282

Індивідуально

Діагональний переріз правильної чотирикутної піраміди — рівносторонній трикутник. Навколо піраміди описана куля радіусом $2\sqrt{3}$ см. Знайти висоту й площу основи піраміди.

УРОК № 26

ТЕМА. КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3.

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл»; розвинути логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, вміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, вміння організовувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Куля і сфера. Комбінації геометричних тіл».

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель налаштовує учнів на роботу, звертає їхню увагу на необхідність дати докладні пояснення до задач 7–9, пояснити в задачі 8

особливості кулі, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда, а в задачі 9 скористатися формулою радіуса кола, вписаного в прямокутний трикутник.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

Контрольна робота № 3

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Площа перерізу, проведеного через кулю радіусом 5 см на відстані 3 см від її центра, дорівнюватиме:

А $9\pi \text{ см}^2$ Б $2\pi \text{ см}^2$ В 16 см^2 Г $16\pi \text{ см}^2$

2. Дві сфери радіусом 3 см і 5 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть відстань між їхніми центрами.

А 8 см Б 2 см В 6 см Г 10 см

3. Якщо пряма призма описана навколо кулі, радіус якої становить 5 см, то бічне ребро дорівнює:

А 5 см В 10 см

Б 2,5 см Г 15 см

4. Якщо в кулю радіусом 8 см вписано правильну піраміду, то відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює:

А 16 см В 4 см

Б 8 см Г 12 см

5. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіусом 13 см. Якщо відрізок AB дорівнює 24 см, то відстань від центра кулі до відрізка AB дорівнює:

А 12 см Б 5 см В 10 см Г 15 см

6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, описаного навколо цієї призми.

А 12 см Б 10 см В 4 см Г 16 см

Достатній рівень (3 бали)

7. Через середину радіуса сфери проведено площину, перпендикулярну до радіуса. Знайдіть відношення довжини великого кола до довжини перерізу.

8. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см, 4 см і 12 см. Знайдіть радіус описаної навколо нього кулі.

Високий рівень (3 бали)

9. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Знайдіть відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, якщо радіус кулі $\sqrt{34}$ см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Довжина лінії перерізу, проведеного через сферу радіусом 10 см на відстані 8 см від її центра, дорівнюватиме:
А 12π см Б 12 см В 16π см Г 10π см
2. Дві сфери радіусами 12 см і 15 см дотикаються зовнішньо. Знайдіть відстань між їхніми центрами.
А 27 см Б 30 см В 3 см Г 24 см
3. Якщо пряма призма, описана навколо кулі, має бічне ребро, що дорівнює 6 см, то радіус кулі дорівнює:
А 6 см В 12 см
Б 3 см Г 18 см
4. Якщо в кулю вписано правильну піраміду й відстань від центра кулі до вершини піраміди дорівнює 10 см, то радіус кулі дорівнює:
А 20 см В 10 см
Б 5 см Г 15 см
5. Відстань від центра кулі до відрізка AB , кінці якого лежать на поверхні кулі, дорівнює 15 см. Якщо відрізок AB дорівнює 16 см, то радіус кулі дорівнює:
А 8 см Б 16 см В 17 см Г 30 см
6. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см. Знайдіть діаметр основи циліндра, описаного навколо цієї призми.
А 10 см Б 24 см В 6 см Г 13 см

Достатній рівень (3 бали)

7. Через середину радіуса кулі проведено площину, перпендикулярну до радіуса. Знайдіть відношення площі великого круга до площі перерізу.
8. Ребра прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть радіус описаної навколо нього кулі.

Високий рівень (3 бала)

9. Гіпотенуза й катет прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 8 см. Відстань від площини трикутника до центра кулі, яка дотикається до всіх сторін трикутника, дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кулі.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. Г. 2. А. 3. В. 4. Б. 5. Б. 6. Б.

7. Як відомо, переріз сфери площиною є колом, центр якого — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до площини перерізу. Нехай точка O — центр кулі (рис. 1), точка O_1 — центр перерізу. Нехай $OA = R$, тоді $OO_1 = \frac{R}{2}$.

Із трикутника AO_1O ($\angle AO_1O = 90^\circ$) отримаємо: $AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тоді $l_1 = \frac{2\pi R\sqrt{3}}{2} = \pi R\sqrt{3}$ — довжина на перерізу. $l = 2\pi R$ — довжина великого кола. $\frac{l}{l_1} = \frac{2\pi R}{\pi R\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Відповідь: $2\sqrt{3}$.

8. Оскільки куля описана навколо прямокутного паралелепіпеда, то її діаметр дорівнює діагоналі цього паралелепіпеда. Тоді довжина діаметра кулі: $\sqrt{6^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14$ (см). Отже, радіус кулі дорівнює 7 см. *Відповідь:* 7 см.
9. Нехай ABC (рис. 2) — даний прямокутний трикутник ($\angle B = 90^\circ$), $AB = 15$ см, $BC = 20$ см. $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$ (см). Площина ABC перетинає кулю по колу, центр якого — точка O_1 — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до площини ABC .

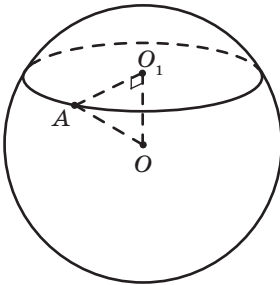


Рис. 1

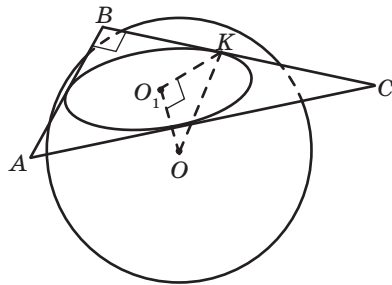


Рис. 2

Оскільки сторони трикутника дотикаються до кулі, то коло із центром у точці O_1 вписане у трикутник ABC . O_1K — радіус цього кола. $O_1K = \frac{AB+BC-AC}{2} = \frac{20+15-25}{2} = 5$ (см). K — точка дотику сторони BC до кулі, точка O — центр кулі, OK — радіус кулі.

Із трикутника OO_1K ($\angle OO_1K = 90^\circ$) отримаємо:

$$OO_1 = \sqrt{OK^2 - O_1K^2} = \sqrt{34 - 25} = \sqrt{9} = 3 \text{ (см)}.$$

Відповідь: 3 см.

В а р і а н т 2. 1. А. 2. В. 3. Б. 4. В. 5. В. 6. Г.

7. Як відомо, переріз кулі площиною є колом, центр якого — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до площини перерізу. Нехай точка O — центр кулі (див. рис. 1), точка O_1 — центр перерізу. Нехай $OA = R$, тоді $OO_1 = \frac{R}{2}$.

Із трикутника AO_1O ($\angle AO_1O = 90^\circ$) отримаємо: $AO_1 = \sqrt{AO^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тоді $S_1 = \pi \left(\frac{R\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3\pi R^2}{4}$ — площа перерізу. $S = \pi R^2$ — площа великого круга. $\frac{S_1}{S} = \frac{3\pi R^2}{4\pi R^2} = \frac{3}{4}$.

Відповідь: 3:4.

8. Оскільки куля описана навколо прямокутного паралелепіпеда, то її діаметр дорівнює діагоналі цього паралелепіпеда. Тоді довжина діаметра кулі: $\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7$ (см). Отже, радіус кулі дорівнює 3,5 см. *Відповідь:* 3,5 см.

9. Нехай ABC (рис. 3) — даний прямокутний трикутник ($\angle C = 90^\circ$), $AB = 10$ см, $BC = 8$ см. $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ (см).

Площина ABC перетинає кулю по колу, центр якого — точка O_1 — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі до площини ABC . Точка O — центр цієї кулі. $OO_1 = 4$ см.

Оскільки сторони трикутника дотикаються до кулі, то коло із центром у точці O_1 вписане у трикутник ABC . Нехай K — точка дотику сторони BC до кулі, тоді O_1K — радіус вписаного в трикутник ABC кола. $O_1K = \frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{6+8-10}{2} = 2$ (см).

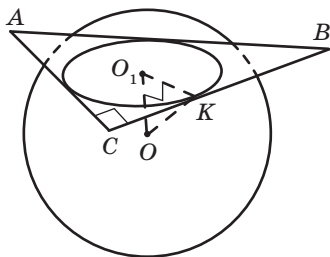


Рис. 3

OK — радіус кулі.

Із трикутника OO_1K ($\angle OO_1K = 90^\circ$) отримаємо: $OK = \sqrt{OO_1^2 + O_1K^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (см). *Відповідь:* $2\sqrt{5}$ см.

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи, відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання контрольної роботи, і знайомить їх із правильними відповідями.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

На аркуші формату А4 виконати рисунки вже відомих вам планіметричних фігур і записати формули для знаходження їхніх площ.

УРОК № 27

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ПРИЗМИ.

Мета уроку: сформувати поняття площі бічної і повної поверхонь призми; формувати вміння знаходити площі бічної і повної поверхонь призми; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати акуратність, наполегливість, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати площі поверхонь прямих призм, використовуючи основні формули.

Основні поняття: площа поверхні призми, площа повної поверхні призми, площа бічної поверхні призми.

Обладнання: підручник, моделі призм.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель перевіряє наявність домашнього завдання.

III. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Учитель повідомляє учням статистичні результати контрольної роботи, аналізує типові помилки, яких припустилися учні під час її написання.

IV. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Інтерактивна вправа «Закінчіть речення»

1. Поверхня призми складається з...
2. Бічна поверхня призми складається з...
3. Бічні грані прямої призми...
4. Площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює...
5. Площа квадрата зі стороною a дорівнює...
6. Площа правильного шестикутника зі стороною a дорівнює...
7. Площа прямокутника з вимірами a і b дорівнює...
8. Площа прямокутного трикутника з катетами a і b дорівнює...
9. Площа ромба з діагоналями d_1 і d_2 дорівнює...
10. Площа паралелограма, сусідні сторони якого дорівнюють a і b , а кут між ними — α , становить...

V. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Кожній родині час від часу доводиться робити ремонт у квартирі, розраховувати кількість необхідних матеріалів і коштів, витрачених на їх придбання. Припустимо, необхідно пофарбувати стіни гаража, який має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами $7 \times 4 \times 3$ м. Враховуючи, що на 1 м^2 треба витратити $0,5$ л фарби і що трилітрова банка фарби коштує 120 грн, обчисліть, скільки фарби необхідно купити й скільки витратити грошей на цю покупку. На сьогоднішньому уроці, познайомившись із новими поняттями й формулами, ви зможете без особливих зусиль виконати розрахунки і переконатися в їх правильності.

VI. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Площею повної поверхні призми називається сума площ усіх її граней.

Площею бічної поверхні призми називається сума площ бічних граней.

Позначення: $S_{\text{повн}}$ — площа повної поверхні, $S_{\text{біч}}$ — площа бічної поверхні, $S_{\text{осн}}$ — площа основи.

Очевидно, що $S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}$.

Теорема (формула площі бічної поверхні прямої призми):

$S_{\text{біч}} = P_{\text{осн}} \cdot H$, де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи, H — висота призми.

Доведення. Як відомо, кожна бічна грань прямої призми — прямокутник. Одна з його сторін дорівнює висоті призми, а сусідня сторона дорівнює стороні основи призми. Тоді якщо a_1, a_2, \dots, a_n — сторони n -кутника, що лежить в основі призми, то $S_{\text{біч}} = a_1 H + a_2 H + \dots + a_n H = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot H = P_{\text{осн}} \cdot H$.

Оскільки прямокутний паралелепіпед — це пряма чотирикутна призма, то площу бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b, c можна обчислити за формулою $S_{\text{біч}} = 2ac + 2bc$, а площу повної поверхні $S_{\text{повн}} = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab)$. Оскільки всі виміри куба рівні, то для куба з ребром a отримаємо: $S_{\text{біч}} = 4a^2, S_{\text{повн}} = 6a^2$.

Повернемося до задачі, розглянутої на початку уроку. Знайдемо $S_{\text{біч}}$ прямокутного паралелепіпеда: $S_{\text{біч}} = 2(7 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot 33 = 66 \text{ (м}^2\text{)}$.

Отже, потрібно 33 л фарби. Тобто доведеться купити 11 трилітрових банок і заплатити $120 \cdot 11 = 1320$ (грн). Як бачимо, сума чимала. Можливо, доведеться пошукати дешевшу фарбу. Звісно, якщо гараж має вікна або ви вирішите не фарбувати двері, то фарби знадобиться менше. Подумайте, як зміниться розв'язок задачі, якщо на одній стіні є невелике вікно прямокутної форми з розмірами $0,7 \times 1,5 \text{ м}$?

VII. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Основою прямої призми є прямокутний трикутник із катетами 21 см і 28 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо її найбільша бічна грань — квадрат. (Відповідь: 2940 см².)
2. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 6 см й утворює із площиною основи кут 30°. Знайдіть площу бічної поверхні призми. (Відповідь: $18\sqrt{6}$ см².)
3. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 12 см, а кут між ними — 30°. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда, якщо його висота дорівнює 8 см. (Відповідь: 332 см².)
4. Бічна поверхня правильної трикутної призми дорівнює $30\sqrt{3}$ см², а її повна поверхня — $\frac{85\sqrt{3}}{2}$ см². Знайдіть висоту призми. (Відповідь: $2\sqrt{3}$ см.)

VIII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Що таке бічна поверхня призми; повна поверхня призми?
2. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми; повної поверхні куба?
3. Ребро одного куба вдвічі більше за ребро іншого. У скільки разів повна поверхня першого куба більша за повну поверхню другого?
4. Діагональ грані куба 2 м. Знайдіть площу повної поверхні куба.
5. Як знайти повну поверхню куба, знаючи його діагональ?



Повну поверхню призми можна виразити через її діагональ за формулою $S = 2d^2$, де d — діагональ куба.

IX. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 28	[3]: § 19, теореми 1 і 3
С	№ 906	№ 332 (1, 2)
Д	№ 922 (г)	№ 331
В	№ 923	№ 333

Індивідуально

Основою прямого паралелепіпеда є ромб із гострим кутом α . Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює d і утворює із площиною основи кут β . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

(Відповідь: $\frac{d^2 \sin 2\beta}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.)

УРОК № 28

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ПРИЗМИ.

Мета уроку: формувати вміння учнів знаходити площі бічної та повної поверхонь призми; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу, культуру математичних записів; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати бічну й повну поверхні призми, використовуючи основні формули.

Обладнання: підручник, моделі призм.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Двоє учнів записують на дошці розв'язання задач, які потім обговорюються, а решта в цей час відповідають на запитання вчителя.

На цьому етапі уроку можна також скористатися посібником [5], СР 6 (завдання 2, 4, 5).

Фронтальна бесіда

1. Що називають бічною поверхнею призми; повною поверхнею призми?
2. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми?
3. Чому дорівнює площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда з вимірами a , b і c ?
4. Чому дорівнює площа повної поверхні куба, ребро якого дорівнює a ?

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Як за формулою Герона знайти площу трикутника зі сторонами a , b , c ?
2. Чому дорівнює площа трапеції?
3. Із точки до площини проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 5 см і 6 см. Чи можуть довжини їхніх проєкцій становити відповідно 3 см і 2 см? Обґрунтуйте відповідь.
4. Дайте визначення кута між похилою й площиною.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

На попередньому уроці ви переконалися в необхідності вміти знаходити площі повної і бічної поверхонь призми. Сьогодні ви вдосконалили свої вміння, щоб такі обчислення не становили для вас труднощів.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Основа прямої призми — трикутник зі сторонами 10 см, 17 см і 21 см, а площа повної поверхні призми — 312 см^2 . Знайдіть довжину бічного ребра призми. (Відповідь: 3 см.)

2. Основа прямої призми — трапеція з основами 10 см і 22 см. Знайдіть повну поверхню призми, якщо три її бічні грані — квадрати зі стороною 10 см. (Відповідь: 776 см^2 .)
3. Основа прямого паралелепіпеда — ромб із більшою діагоналлю d . Більша діагональ призми утворює із площиною її основи кут α , а діагональ бічної грані нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу бічної поверхні призми. (Відповідь: $4d^2 \text{ tg}^2 \alpha \text{ ctg} \beta$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Які формули планіметрії ви застосовували на уроці?
2. Які із задач були найскладнішими?
3. У чому полягали труднощі під час розв'язування цих задач?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 28	[3]: § 19, теорема 2
С	№ 898	№ 335 (1, 2)
Д	№ 912	№ 335 (3, 4)
В	№ 920 (а)	№ 335 (5, 6)

Індивідуально

Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють 8 см^2 і 6 см^2 . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда. (Відповідь: 20 см^2 .)

УРОК № 29

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ПІРАМІДИ.

Мета уроку: сформувати уявлення про площу повної й бічної поверхонь піраміди; учити знаходити за формулою площу бічної поверхні правильної піраміди; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити площі повної та бічної поверхонь різних пірамід, у тому числі й правильних.

Основні поняття: площа бічної поверхні піраміди, площа повної поверхні піраміди.

Обладнання: підручник, моделі піраміди.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель пропонує учням перевірити домашнє завдання за відповідями, заздалегідь підготованими на дошці, а потім відповідає на запитання, що виникли під час самоперевірки.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Із чого складається поверхня піраміди?
2. Яку піраміду називають правильною?
3. Що називають апофемою піраміди?
4. Як виразити радіус кола, вписаного в правильний трикутник, через його сторону?
5. Як виразити радіус вписаного у квадрат кола через сторону квадрата?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Як ви вже знаєте, в навколишньому світі багато предметів мають форму многогранників. Навчившись знаходити площі поверхонь призм, ви розширите свої знання й уміння. Отже, познайомимось зі способами знаходження площі поверхонь пірамід.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Площею бічної поверхні піраміди називається сума площ її бічних граней.

Площею повної поверхні піраміди називається сума площ основи й бічної поверхні: $S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}}$.

Теорема про площу бічної поверхні правильної піраміди: площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює півдобутку периметра її основи на апофему, $S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} l$.

Теорема про площу бічної поверхні правильної зрізаної піраміди: площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів її основ на апофему: $S_{\text{біч}} = \frac{P_1 + P_2}{2} l$.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а висота — 3 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди. (Відповідь: 162 см².)
2. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 36 см², а площа повної поверхні — 96 см². Знайдіть висоту піраміди. (Відповідь: 4 см.)
3. Основою піраміди є квадрат, а її висота проходить через одну з вершин основи. Знайдіть повну поверхню піраміди, якщо сторона основи дорівнює 20 дм, а висота — 21 дм. (Відповідь: 10 м².)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Що називають бічною поверхнею піраміди?
2. Що називають повною поверхнею піраміди?
3. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?
4. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної зрізаної піраміди?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 29	[3]: § 19, п. 1
С	№ 945	№ 346 (1)
Д	№ 952	№ 336
В	№ 961	№ 337

Індивідуально

Знайти площу повної поверхні правильної шестикутної піраміди, якщо площа її основи $24\sqrt{3}$ см², а бічне ребро $\sqrt{85}$ см.

УРОК № 30

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ПІРАМІДИ.

Мета уроку: формувати вміння учнів обчислювати площі повної та бічної поверхонь піраміди; розвивати пам'ять, увагу, логічне мислення, культуру математичного мовлення; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати площі поверхонь різних пірамід.

Обладнання: підручник, моделі пірамід.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування за готовими рисунками

- У правильній піраміді $SABC$ (рис. 1) l — апофема, α — кут нахилу бічної грані до основи піраміди. Знайдіть: а) радіус кола, вписаного в основу; б) сторону основи; в) площу основи; г) площу бічної поверхні; д) площу повної поверхні.
- У правильній зрізаній піраміді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2) бічне ребро дорівнює 5 см, сторона верхньої основи — 1 см, сторона нижньої основи — 9 см. Знайдіть: а) апофему; б) площу бічної грані; в) площу верхньої основи; г) площу нижньої основи; д) площу бічної поверхні; е) площу повної поверхні.

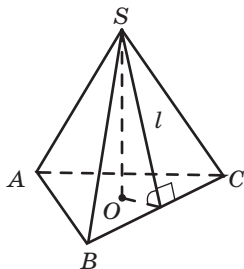


Рис. 1

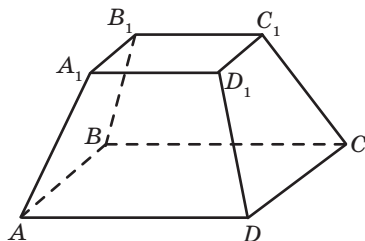


Рис. 2

Відповіді до бліцопитування

- а) $l \cos \alpha$; б) $2\sqrt{3}l \cos \alpha$; в) $3l^2 \sqrt{3} \cos^2 \alpha$; г) $3\sqrt{3}l^2 \cos \alpha$;
д) $3l^2 \sqrt{3} \cos^2 \alpha + 3\sqrt{3}l^2 \cos \alpha$.
- а) 3 см; б) 15 см^2 ; в) 1 см^2 ; г) 81 см^2 ; д) 60 см^2 ; е) 142 см^2 .

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Уміння швидко виконувати обчислення за потрібною формулою дуже часто допомагає абітурієнту успішно скласти іспити, заощадивши час для роздумів над іншими задачами. Сьогодні ви вдосконалюватимете свої знання, уміння й навички, працюючи в групах, відчуєте підтримку товаришів, тож виявляйте ініціативу.

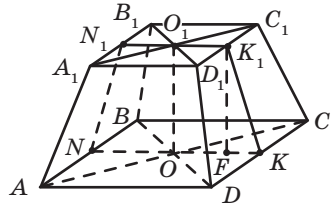
V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

☑ **Робота в групах**

Учні об'єднуються в гетерогенні групи (двом групам дістається одна задача).

1. Знайдіть площу повної поверхні правильної шестикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює $\sqrt{21}$ см, а радіус кола, вписаного в основу, — 6 см. (*Відповідь:* $108\sqrt{3}$ см².)
2. У правильній чотирикутній зрізаній піраміді сторони основ 8 м і 2 м. Висота піраміди 2 м. Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

Розв'язання. Нехай дано правильну чотирикутну зрізану піраміду $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 3). Площі її основ відповідно становлять 64 м² і 4 м², а їхні периметри — 32 м і 8 м, півсума периметрів — 20 м. Розглянемо переріз піраміди площиною, що проходить через апофеми KK_1 і NN_1 двох її протилежних граней.



Точки N і K — середини ребер AB і DC відповідно, тоді центр основи лежить на MK і висота піраміди OO_1 лежить у площині перерізу. Проведемо в цій площині $K_1F \perp NK$. Тоді

$K_1F = OO_1 = 2$ м. $O_1K_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ (м), а $OK = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ (м), отже,

$FK = 4 - 1 = 3$ (м). Із трикутника K_1FK ($\angle F = 90^\circ$) отримаємо:

$$K_1K = \sqrt{FK^2 + FK_1^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ (м)}.$$

$$S_{\text{біч}} = \frac{1}{2} \cdot (P_1 + P_2) \cdot l = 20 \cdot 5 = 100 \text{ (м}^2\text{)}, \text{ де } l = KK_1 \text{ — апофема,}$$

$$\frac{1}{2} (P_1 + P_2) \text{ — півсума периметрів.}$$

$$S = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2} = 100 + 64 + 4 = 168 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь: 168 м².

3. В основі піраміди лежить прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Знайдіть площу повної поверхні піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а всі бічні ребра рівні між собою. (*Відповідь:* $88 + 24\sqrt{2}$ см².)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Перелічіть формули планіметрії, які були використані під час розв'язування задач.
2. Які теореми стереометрії застосовувалися під час розв'язування задач?
3. Яка із задач виявилася найскладнішою і чому?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 29	[3]: § 19, п. 1
С	№ 946	№ 345 (1)
Д	№ 959	с. 400, № 17, 18
В	Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a . Одна бічна грань піраміди перпендикулярна до основи, а дві інші нахилені до неї під кутом β . Знайти бічну поверхню піраміди. (Відповідь: $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \beta} (1 + \sin \beta)$.)	

УРОК № 31

ТЕМА. ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ МНОГОГРАННИКІВ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання учнів із теми «Площа поверхні призми, піраміди, многогранника»; провести діагностичний контроль знань учнів із теми; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу, уміння працювати в групі й самостійно; виховувати толерантність, культуру ведення дискусії, самостійність, наполегливість.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити з необхідною точністю площі поверхонь тіл, використовуючи основні формули, розбивку тіл на простіші тіла.

Обладнання: підручник, моделі многогранників, роздавальний матеріал.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пропонує учням об'єднатися в гетерогенні групи, кожна з яких буде розв'язувати одну із трьох задач і пояснювати розв'язання цієї задачі біля дошки.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Робота в групах

Групи отримують відповіді до домашнього завдання і здійснюють взаємоперевірку. Потім члени кожної групи повторюють необхідні формули для знаходження площ поверхонь; формули площ многокутників.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

IV. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Бліцопитування за технологією «Мікрофон»

1. Що називають повною поверхнею піраміди; повною поверхнею призми?
2. За якою формулою можна знайти площу бічної поверхні правильної призми; бічної поверхні правильної піраміди?
3. Який многогранник називають правильним?
4. Із чого складається поверхня октаедра?

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Картка 1. Площа повної поверхні правильної трикутної призми дорівнює $14\sqrt{3}$ дм², висота призми — $2\sqrt{3}$ дм. Знайдіть діагональ бічної грані призми. (Відповідь: 4 дм.)

Картка 2. У правильній чотирикутній піраміді двограний кут при основі дорівнює α . Відстань від основи висоти піраміди до середини апофеми дорівнює l . Знайдіть площу повної поверхні піраміди. (Відповідь: $32l^2 \cos \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.)

Картка 3. Площа повної поверхні октаедра з ребром a дорівнює площі повної поверхні правильного тетраедра. Знайдіть ребро тетраедра. (Відповідь: $a\sqrt{2}$.)

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Самостійна робота

Варіант 1

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

Початковий і середній рівні (6 балів)

1. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, у якій кожне ребро дорівнює 2 см.

А 6 см^2

Б 12 см^2

В $2\sqrt{3} \text{ см}^2$

Г $12\sqrt{3} \text{ см}^2$

2. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 2 см, 3 см і 5 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
 А 62 см^2 Б 31 см^2 В 21 см^2 Г 25 см^2
3. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро дорівнює 5 см, апофема дорівнює 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
 А 24 см^2 Б 12 см^2 В 48 см^2 Г 96 см^2

Достатній рівень (3 бали)

4. В основі прямої призми лежить ромб із діагоналями 8 см і 6 см, а більша діагональ призми утворює із площиною основи кут 45° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Високий рівень (3 бали)

5. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює h і нахилена до площини основи під кутом α . Знайдіть площу повної поверхні піраміди.

В а р і а н т 2

У завданнях 1–3 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

Початковий і середній рівні (6 балів)

1. Знайдіть площу бічної поверхні правильної чотирикутної призми, у якої кожне ребро дорівнює 2 см.
 А 8 см^2 Б 16 см^2 В 20 см^2 Г $16\sqrt{2} \text{ см}^2$
2. Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1 см, 3 см і 6 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
 А 54 см^2 Б 27 см^2 В 24 см^2 Г 21 см^2
3. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює 5 см, апофема — 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.
 А 9 см^2 Б 18 см^2 В 72 см^2 Г 36 см^2

Достатній рівень (3 бали)

4. В основі прямої призми лежить ромб із діагоналями 24 см і 10 см, а менша діагональ призми нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть площу бічної поверхні призми.

Високий рівень (3 бали)

5. Бічне ребро правильної трикутної піраміди дорівнює b і нахилена до площини основи під кутом β . Знайдіть площу повної поверхні цієї піраміди.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. 160 см^2 .

5. $3\sqrt{3}h^2 \cos\alpha(\cos\alpha+1)$.

Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. 520 см^2 .

5. $\frac{3\sqrt{3}}{4}b^2 \cos\beta(\cos\beta+\sqrt{4-3\cos^2\beta})$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи учнів, пропонує ознайомитися з відповідями до самостійної роботи й відповідає на запитання, що виникли під час її виконання.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуально

- С** 1. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 5 см. Знайти площу повної поверхні піраміди, якщо висота піраміди дорівнює 6 см.
- Д** 2. Площина, що проходить через сторону основи правильної трикутної призми і середину протилежного ребра, утворює з основою кут 45° . Сторона основи дорівнює 6 см. Знайти площу бічної поверхні призми.
- В** 3. Основа піраміди — рівнобедрений трикутник з бічною стороною 5 см і основою 6 см. Усі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60° . Знайти площу повної поверхні піраміди.

УРОК № 32

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ ЦИЛІНДРА.

Мета уроку: дати уявлення про площу поверхні циліндра; ознайомити з формулами для обчислення площі бічної поверхні циліндра; сформулювати вміння знаходити площу поверхні циліндра; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати акуратність, наполегливість, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні розуміти, що являє собою поверхня циліндра; знати, що таке площа бічної поверхні циліндра та площа повної поверхні циліндра; уміти знаходити площі повної та бічної поверхонь циліндра за формулами.

Основні поняття: поверхня циліндра, площа бічної поверхні циліндра, площа повної поверхні циліндра.

Обладнання: підручник, моделі циліндра.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель збирає зошити для перевірки домашнього завдання, попередньо відповівши на запитання, що виникли в учнів під час його виконання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Що називають циліндром?
2. Що являють собою основи циліндра?
3. За якою формулою знаходять довжину кола?
4. Як знайти площу прямокутника?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Розв'яжемо задачу. Скільки жерсті знадобиться для зведення циліндричного димаря діаметром 65 см заввишки 18 м, якщо на заклепки витрачається 10 % матеріалу?

Зрозуміло, що для розв'язання цієї задачі необхідно ознайомитися з новими поняттями й формулами, що ми зараз і зробимо.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція з елементами бесіди

Поверхня циліндра складається із двох рівних основ і бічної поверхні.

Розріжемо поверхню циліндра по колах основ і одній із твірних та розгорнемо її на площину. У результаті отримаємо розгортку циліндра.

Тож із чого складається розгортка циліндра? (Відповідь: прямокутник і два круги.)

Чому дорівнюють сторони отриманого прямокутника? (Відповідь: довжині кола основи й висоті циліндра.)

Площею бічної та повної поверхонь циліндра називають площу розгортки бічної та повної поверхонь.

Таким чином, маємо формули:

$$S_{\text{біч}} = 2\pi RH \quad \text{і} \quad S_{\text{повн}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R),$$

де R — радіус циліндра, H — висота циліндра.

Для відповіді на задачу, що розглядалася на початку уроку, необхідно знайти площу бічної поверхні циліндра.

$$S_{\text{біч}} = 2\pi RH = \pi DH, \text{ де } \pi \approx 3,14, D = 65 \text{ см} = 0,65 \text{ м}, H = 18 \text{ м.}$$

$$S_{\text{біч}} = 0,65 \cdot 18 \cdot 3,14 \approx 36,74 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Врахуємо, що на заклепки піде 10 % необхідного матеріалу, тобто $3,67 \text{ м}^2$. Отже, кількість необхідної жерсті дорівнюватиме $36,74 + 3,67 \approx 40,4 \text{ (м}^2\text{)}$. *Відповідь:* $40,4 \text{ м}^2$.



Знаючи площі повної та бічної поверхонь циліндра, можна знайти його радіус і висоту.

Наприклад, $S_{\text{повн}} = 50 \text{ см}^2$, $S_{\text{біч}} = 30 \text{ см}^2$. Знайдемо радіус і висоту циліндра. Враховуючи, що $S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + 2S_{\text{осн}}$, маємо: $2S_{\text{біч}} = S_{\text{повн}} - S_{\text{біч}} =$

$$= 50 - 30 = 20 \text{ (см}^2\text{)}. \text{ Звідси } \pi R^2 = 10; R = \sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ (см)}. \text{ Оскільки}$$

$$S_{\text{біч}} = 2\pi RH, \text{ то } 2\pi \sqrt{\frac{10}{\pi}} H = 30. \text{ Отже, } H = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{10}{\pi}} \text{ (см)}.$$

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Переріз, паралельний осі циліндра, проходить через основу по хорді завдовжки $4\sqrt{2}$ см, що стягує дугу в 90° . Площа перерізу дорівнює $24\sqrt{2}$ см². Знайдіть площу бічної поверхні циліндра. (*Відповідь:* 48π см².)
2. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра цієї основи під кутом β . Відрізок, що сполучає центр верхньої основи із серединою цієї хорди, дорівнює l і утворює із площиною основи кут α . Знайдіть площу бічної поверхні циліндра. (*Відповідь:* $\frac{\pi l^2 \sin 2\alpha}{\cos \frac{\beta}{2}}$.)
3. Циліндр перетинає площина, паралельна осі, так, що в перерізі утворюється квадрат із діагоналлю $a\sqrt{2}$ см. Переріз відтинає від кола основи дугу в 60° . Знайдіть площу повної поверхні циліндра. (*Відповідь:* $4\pi a^2$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. З якими поняттями ви сьогодні ознайомилися?
2. Як знайти площу бічної поверхні циліндра?
3. За якою формулою можна знайти площу повної поверхні циліндра?
4. Діаметр циліндра 1 м, а висота дорівнює довжині кола основи. Чому дорівнює площа його бічної поверхні?
5. Площа осового перерізу циліндра дорівнює S . Знайдіть площу його бічної поверхні.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 31	[3]: § 19, п. 2
С	№ 1015	№ 338 (1, 2)
Д	№ 1019	№ 338 (3)
В	№ 1029	№ 340

Індивідуально

Знайти площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус дорівнює R , а твірну видно із центра основи під кутом α . (Відповідь: $2\pi R^2 \operatorname{tg} \alpha$.)

УРОК № 33

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ КОНУСА.

Мета уроку: сформувати поняття площі бічної та повної поверхонь конуса; ознайомити учнів із формулами для знаходження площ бічної та повної поверхонь конуса, зрізаного конуса; сформувати вміння знаходити площі поверхонь конуса; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати наполегливість, акуратність, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити за формулами площі поверхонь конуса, зрізаного конуса.

Основні поняття: площа бічної поверхні конуса, площа повної поверхні конуса.

Обладнання: підручник, моделі конусів.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Математичний диктант

Дано циліндр заввишки H (рис. 1). Діагональ осьового перерізу утворює із площиною основи кут α , який становить 30° . Знайдіть: а) радіус; б) площу основи; в) площу осьового перерізу; г) площу бічної поверхні; д) площу повної поверхні.

Учні здійснюють самоперевірку за відповідями, підготовленими на дошці.

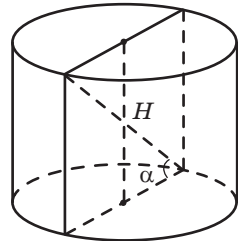


Рис. 1

Відповідь: а) $\frac{H\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{3\pi H^2}{4}$ в) $H^2\sqrt{3}$; г) $\pi H^2\sqrt{3}$;
 д) $\pi H^2\sqrt{3} + 1,5\pi H^2$.

На цьому етапі уроку можна також скористатися посібником [5], СР 19.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Що називають конусом?
2. Що є основою конуса?
3. Чому дорівнює площа круга?
4. Виразіть площу кругового сектора через його центральний кут і радіус круга.
5. Який конус називають зрізаним?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Чи доводилося вам ходити в походи? Тоді вам, звичайно, відомо, що намети доцільно вкривати спеціальною тканиною, яка захищає їх від пошкоджень. Спробуємо розв'язати задачу: конусоподібний намет заввишки 3,5 м, діаметр основи якого дорівнює 4 м, вкритий тканиною. Скільки квадратних метрів тканини пішло на намет? Відповідь можна дати дуже швидко, якщо знати формулу, з якою ви ознайомитеся на уроці.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція

Розріжемо конус по колу основи та одній із твірних. У результаті отримаємо розгортку поверхні конуса (рис. 2). Розгорткою бічної поверхні конуса є круговий сектор. Його радіус дорівнює твірній конуса, а довжина дуги сектора дорівнює довжині кола основи конуса. Нехай радіус основи конуса дорівнює R , а його твірна — l . Площа кругового сектора — розгортка бічної поверхні конуса — дорівнює $\frac{\pi l^2}{360^\circ}\alpha$, де α — градусна міра дуги сектора.

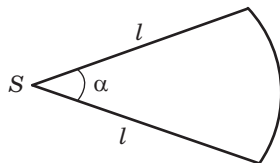


Рис. 2

Оскільки довжина дуги в цьому випадку дорівнює довжині кола основи конуса, то $2\pi R = \frac{\pi l}{180^\circ} \alpha$. Тоді $\alpha = \frac{360^\circ R}{l}$. Отже,

$$S_{\text{біч}} = \frac{\pi l^2}{180^\circ} \alpha = \frac{\pi l^2 \cdot 360^\circ \cdot R}{360^\circ \cdot l} = \pi Rl. \quad \boxed{S_{\text{біч}} = \pi Rl.}$$

Площею повної поверхні конуса називається сума площ бічної поверхні й основи конуса, $S_{\text{повн}} = S_{\text{біч}} + S_{\text{осн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$.

Площа поверхні зрізаного конуса:

$S_{\text{біч}} = \pi l(R + r)$; $S_{\text{повн}} = \pi l(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2$, де R і r — радіуси основ зрізаного конуса, l — твірна зрізаного конуса.

Повернемося до практичної задачі, розглянутої на початку уроку, яка зводиться до знаходження площі бічної поверхні конуса (рис. 3).

Розв'язання. $OA = R = 2$ м; $SO = 3,5$ м.

Із трикутника SOA ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо:

$$l = SA = \sqrt{SO^2 + OA^2} = \sqrt{16,25} = \frac{\sqrt{65}}{2} \approx 4,03 \text{ (м)}.$$

$$S_{\text{біч}} = \pi Rl \approx 3,14 \cdot 2 \cdot 4,03 \approx 25,3 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Відповідь: $\approx 25,3 \text{ м}^2$.

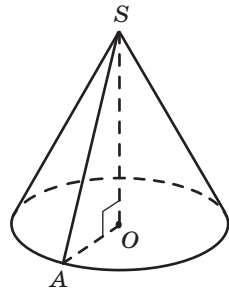


Рис. 3

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Прямокутний трикутник із катетом $2\sqrt{3}$ см і прилеглим до нього кутом 60° обертається навколо другого катета. Знайдіть площу повної поверхні конуса. (*Відповідь:* $36\pi \text{ см}^2$.)
2. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 5 см і 3 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом 45° . Знайдіть площу бічної поверхні зрізаного конуса. (*Відповідь:* $16\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$.)
3. Твірна конуса нахилена до площини його основи під кутом β . Хорду основи конуса, яка дорівнює a , видно з його вершини під кутом α . Знайдіть площу повної поверхні конуса. (*Відпо-*

$$\text{відь: } \frac{\pi a^2 \cos \beta \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.)$$

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Обчисліть площу бічної поверхні конуса (рис. 4, а-в).

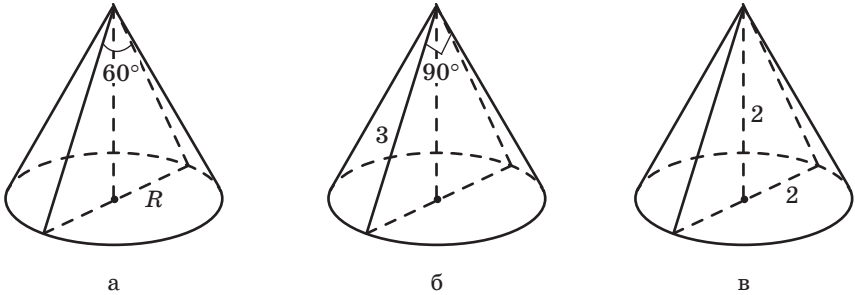


Рис. 4

2. Порівняйте площу бічної поверхні тіл (рис. 5, а, б).

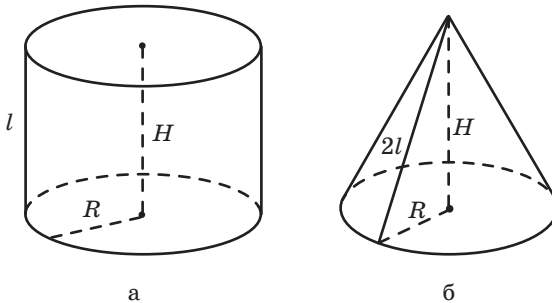


Рис. 5

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 32	[3]: § 19, п. 2
С	№ 1042	№ 343 (1)
Д	№ 1050	№ 344
В	№ 1054	№ 347

Індивідуально

Через дві твірні конуса, кут між якими дорівнює α , проведено переріз, що утворює із площиною основи конуса кут β . Знайти площу повної поверхні конуса, якщо його висота дорівнює H .

ТЕМА. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ СФЕРИ.

Мета уроку: сформувати поняття площі поверхні сфери, уміння застосовувати формулу площі поверхні сфери для розв'язування задач; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати наполегливість, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні вміти застосовувати формулу площі поверхні сфери для обчислення з необхідною точністю площі поверхні сфери.

Основні поняття: площа поверхні сфери.

Обладнання: підручник, моделі куль і сфер.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

На цьому етапі уроку можна виконати самостійну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], СР 20.

 Самостійна робота

Варіант 1

Варіант 2

1. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо:

його твірна дорівнює 5 дм,
а висота — 3 дм

якщо його твірна дорівнює 10 см, а висота — 8 см

2. Знайдіть кут між висотою конуса і його твірною, якщо:

його висота дорівнює $2\sqrt{3}$ см,
а площа бічної поверхні —
 8π см²

його висота дорівнює $\sqrt{3}$ см,
а площа бічної поверхні —
 $6\pi\sqrt{3}$ см²

Завершивши роботу, учні здійснюють взаємоперевірку за відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем.

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. 36π см². 2. 30° .

Варіант 2. 1. 96π см². 2. 60° .

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Назвіть формулу для знаходження довжини кола через радіус; через діаметр.
2. Назвіть формулу для знаходження площі круга через радіус; через діаметр.
3. Що називається сферою; радіусом сфери?
4. Що називається великим кругом?
5. Якою є формула бічної поверхні циліндра?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Поверхня нашої планети приблизно на $\frac{3}{4}$ вкрита водою. Якщо вважати, що математичною моделлю Землі є куля радіусом 6375 км, то чи можна обчислити, скільки квадратних кілометрів займає суша? Можна, якщо знати формулу площі поверхні кулі. Сьогодні ви з нею ознайомитеся.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учні самостійно знайомляться з формулою площі поверхні сфери $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$, де R — радіус сфери. Далі вчитель пропонує розв'язати задачу, розглянуту на початку уроку. (*Розв'язання.* Площа поверхні Землі $4\pi R^2 = 4\pi 6375^2$ км². Оскільки суша займає лише $\frac{1}{4}$ поверхні, то $40\,640\,625\pi \approx 127,6 \cdot 10^6$ (км²). *Відповідь:* $\approx 127,6 \cdot 10^6$ км².)

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Як зміниться площа поверхні кулі, якщо її радіус зменшити в 3 рази?
2. Визначте площу поверхні сфери, діаметр якої 20 см.
3. Площа великого круга становить 10π см². Визначте площу поверхні кулі.
4. Площа поверхні кулі становить 100π см². Визначте діаметр цієї кулі.
5. Дано півкулю радіусом R . Чому дорівнює площа повної поверхні цієї півкулі?

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учні працюють над задачами з подальшою вибірковою перевіркою біля дошки.

1. Лінія перетину сфери й площини, віддаленої від центра сфери на 8 см, має довжину 12π см. Знайдіть площу поверхні сфери. (Відповідь: 400π см².)
2. Сторони рівностороннього трикутника із площею $12\sqrt{3}$ дм² дотикаються до сфери, а площина трикутника проходить через її центр. Знайдіть площу сфери. (Відповідь: 16π см².)
3. Через кінець радіуса кулі проведено переріз, який становить із цим радіусом кут 45° . Зазначений переріз перетинає поверхню кулі по колу завдовжки $8\sqrt{2}\pi$ см. Знайдіть площу поверхні. (Відповідь: 256π см².)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Обчисліть площу поверхні півкулі радіусом R .
2. Площа великого круга кулі дорівнює S . Чому дорівнює площа сфери цієї кулі?
3. Чи є можливою така куля, у якої поверхня сфери дорівнює чотирьом площам великого круга?
4. Чи є правильним твердження, що сума площ двох сфер радіусом R точно дорівнює площі сфери радіусом $2R$?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 33	[3]: § 19, п. 2
С	№ 1078	№ 350 (1, 2)
Д	№ 1096	№ 350
В	№ 1097	№ 351

Індивідуально

Знайти площу сфери, якщо найкоротша відстань між точками A і B по її поверхні дорівнює 2π дм. OA і OB — взаємно перпендикулярні радіуси сфери.

ТЕМА. **КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4.**

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Площі поверхонь геометричних тіл»; розвивати логічне мислення, пам'ять, увагу, самостійність, уміння правильно розраховувати час, застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, уміння організувати роботу.

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати отримані знання з теми «Площі поверхонь геометричних тіл».

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: перевірка й корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Учитель налаштовує учнів на написання контрольної роботи, звертає їхню увагу на необхідність надати докладні пояснення до задач 7–9. У задачі 8 рекомендує згадати формулу для обчислення діагоналі прямокутного паралелепіпеда, у задачі 9 — особливості положення висоти в деяких видах пірамід.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], КР 3 (завдання 3, 5).

Контрольна робота № 4

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Бічне ребро прямої призми дорівнює 5 см, в основі лежить прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

А 25 см^2

Б 12 см^2

В 60 см^2

Г 80 см^2

2. Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди становить 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 2 см.
- А 1 см^2 Б 4 см^2 В $4\sqrt{3}\text{ см}^2$ Г 8 см^2
3. Знайдіть площу повної поверхні куба з ребром, яке дорівнює 2 см.
- А 24 см^2 Б 16 см^2 В 4 см^2 Г Інша відповідь
4. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус дорівнює 2 см, а твірна — 3 см.
- А $9\pi\text{ см}^2$ Б $4\pi\text{ см}^2$ В $6\pi\text{ см}^2$ Г $12\pi\text{ см}^2$
5. Висота конуса дорівнює 6 см, а твірна — 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
- А $80\pi\text{ см}^2$ Б $40\pi\text{ см}^2$ В $20\pi\text{ см}^2$ Г $10\pi\text{ см}^2$
6. Площа великого круга кулі дорівнює $4\pi\text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.
- А $32\pi\text{ см}^2$ Б $16\pi\text{ см}^2$ В $8\pi\text{ см}^2$ Г $2\pi\text{ см}^2$

Достатній рівень (3 бали)

7. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо висота конуса 10 см, а твірна нахилена до площини його основи під кутом 30° .
8. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 5 см і 6 см, а діагональ — $\sqrt{65}$ см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

Високий рівень (3 бали)

9. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою 18 см і бічною стороною 15 см. Дві бічні грані, що містять рівні сторони трикутника, перпендикулярні до площини основи піраміди, а їхнє спільне бічне ребро дорівнює 5 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

В а р і а н т 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Бічне ребро прямої призми дорівнює 3 см, в основі лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою 5 см і катетом 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.
- А 9 см^2 Б 36 см^2 В 12 см^2 Г 18 см^2

2. Плоский кут при вершині правильної трикутної піраміди становить 30° . Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює 4 см.
 А 12 см^2 Б 4 см^2 В $12\sqrt{3} \text{ см}^2$ Г 24 см^2
3. Знайдіть площу повної поверхні куба з ребром, яке дорівнює 3 см.
 А 9 см^2 Б 36 см^2 В 54 см^2 Г Інша відповідь
4. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, якщо його радіус дорівнює 3 см, а твірна — 2 см.
 А $6\pi \text{ см}^2$ Б $4\pi \text{ см}^2$ В $9\pi \text{ см}^2$ Г $12\pi \text{ см}^2$
5. Висота конуса дорівнює 12 см, а твірна — 13 см. Знайдіть площу бічної поверхні конуса.
 А $60\pi \text{ см}^2$ Б $65\pi \text{ см}^2$ В $130\pi \text{ см}^2$ Г $120\pi \text{ см}^2$
6. Площа великого круга кулі дорівнює $3\pi \text{ см}^2$. Знайдіть площу поверхні кулі.
 А $3\pi \text{ см}^2$ Б $6\pi \text{ см}^2$ В $12\pi \text{ см}^2$ Г $9\pi \text{ см}^2$

Достатній рівень (3 бали)

7. Знайдіть площу повної поверхні конуса, якщо висота конуса дорівнює 20 см, а твірна нахилена до площини його основи під кутом 60° .
8. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює $3\sqrt{10}$ см, а сторони його основи — 7 см і 5 см. Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.

Високий рівень (3 бали)

9. В основі піраміди $SABC$ лежить прямокутний трикутник ABC , $\angle C = 90^\circ$, $AB = 20$ см, $AC = 16$ см. Бічне ребро SA перпендикулярне до основи піраміди і дорівнює 18 см. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. В. 2. Б. 3. А. 4. Г. 5. А. 6. Б.

7. Нехай SO — висота даного конуса, AO — радіус його основи, SA — твірна (рис. 1). SA — похила до площини основи конуса, AO — її проекція на цю площину, отже, $\angle SAO = 30^\circ$ — кут нахилу твірної до площини основи конуса.

Із трикутника SAO ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо: $SA = 2SO = 20$ см = l ;
 $AO = R = SO \operatorname{ctg} \angle SAO = 10 \operatorname{ctg} 30^\circ = 10\sqrt{3}$ (см).

$$S_{\text{повн}} = \pi Rl + \pi R^2 = 200\sqrt{3}\pi + 300\pi = 100\pi(2\sqrt{3} + 3) \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $100\pi(2\sqrt{3} + 3)$ см².

8. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів, тобто $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. У цьому випадку $a = 5$ см, $b = 6$ см, $d = \sqrt{65}$ см. Звідси $25 + 36 + c^2 = 65$; $c^2 = 4$; $c = 2$ см ($c > 0$). Оскільки в прямокутному паралелепіпеді $S_{\text{повн}} = 2(ab + bc + ac)$, то $S_{\text{повн}} = 2(5 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 5 \cdot 2) = 104$ (см²).

Відповідь: 104 см².

9. Нехай $SABC$ — дана піраміда (рис. 2), в основі якої лежить рівнобедрений трикутник ABC з основою $AC = 18$ см, $AB = BC = 15$ см. Оскільки грані SAB і SBC перпендикулярні до площини ABC , то їхнє спільне бічне ребро $SB = 5$ см — висота піраміди.

$S_{\triangle SBC} = S_{\triangle SBA} = \frac{5 \cdot 15}{2} = \frac{75}{2}$ (см²) ($\triangle SBC = \triangle SBA$ за двома катетами). У трикутнику ABC проведемо $BM \perp AC$. BM — висота і медіана. Тоді $AM = MC = 9$ см.

Із трикутника BMC ($\angle BMC = 90^\circ$) отримаємо: $BM = \sqrt{BC^2 - MC^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ (см). Трикутник SAC рівнобедрений з основою AC ($SC = SA$ з рівності трикутників SCB і SAB).

$SM \perp AC$, оскільки проекція похилої SM — відрізок BM — перпендикулярна AC . $S_{\triangle SAC} = \frac{AC \cdot SM}{2}$. Із трикутника SBM

($\angle SBM = 90^\circ$) отримаємо: $SM = \sqrt{SB^2 + BM^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$ (см).

Тоді $S_{\triangle SAC} = \frac{18 \cdot 13}{2} = 117$ (см²).

Отже, $S_{\text{біч}} = 2S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAC} = 75 + 117 = 234$ (см²).

Відповідь: 234 см².

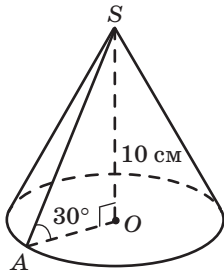


Рис. 1

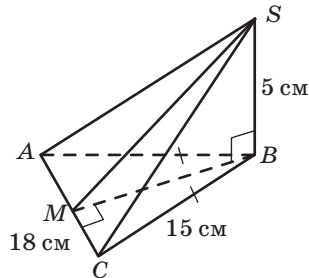


Рис. 2

Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. Г. 5. Б. 6. В.

7. Нехай SO — висота даного конуса, AO — радіус його основи, SA — твірна (рис. 3). SA — похила до площини основи конуса, AO — її проекція на цю площину, отже, $\angle SAO = 60^\circ$ — кут нахилу твірної до площини основи конуса.

Із трикутника SAO ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо: $SA = \frac{SO}{\sin \angle SAO} =$
 $= \frac{20}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{40}{\sqrt{3}}$ (см); $AO = SO \operatorname{ctg} \angle SAO = 20 \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ (см).

$$S_{\text{повн}} = \pi Rl + \pi R^2 = \frac{800}{3} \pi + \frac{400}{3} \pi = 400\pi \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $400\pi \text{ см}^2$.

8. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його вимірів, тобто $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$. У цьому випадку $a = 7$ см, $b = 5$ см, $d = 3\sqrt{10}$ см. Звідси $25 + 49 + c^2 = 90$; $c^2 = 16$; $c = 4$ см ($c > 0$).

Оскільки в прямокутному паралелепіпеді $S_{\text{повн}} = 2(ab + bc + ac)$, то $S_{\text{повн}} = 2(7 \cdot 4 + 5 \cdot 7 + 5 \cdot 4) = 166 \text{ (см}^2\text{)}$.

Відповідь: 166 см^2 .

9. Нехай $SABC$ — дана піраміда (рис. 4), в основі якої лежить прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$). $AB = 20$ см, $AC = 16$ см, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$ (см).

Оскільки $SA \perp (ABC)$, то SA — висота піраміди. SC — похила до площини ABC , AC — її проекція на площину ABC . Оскільки $AC \perp BC$, то за теоремою про три перпендикуляри $SC \perp BC$. Таким чином, трикутник SCB прямокутний ($\angle SCB = 90^\circ$).

Із трикутника SAC ($\angle SAC = 90^\circ$) отримаємо:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{18^2 + 16^2} = \sqrt{580} = 2\sqrt{145} \text{ (см)}.$$

$$S_{\triangle SAC} = \frac{SA \cdot AC}{2} = \frac{18 \cdot 16}{2} = 144 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\triangle SCB} = \frac{SC \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{145} \cdot 12}{2} = 12\sqrt{145} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$S_{\triangle SAB} = \frac{SA \cdot AB}{2} = \frac{18 \cdot 20}{2} = 180 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже,

$$S_{\text{біч}} = S_{\triangle SAC} + S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SCB} = 144 + 180 + 12\sqrt{145} = 324 + 12\sqrt{145} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: $324 + 12\sqrt{145} \text{ см}^2$.

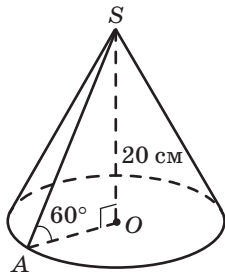


Рис. 3

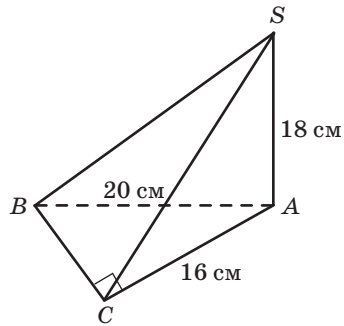


Рис. 4

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи, відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання контрольної роботи, і пропонує ознайомитися з відповідями.

VI. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Повторити формули об'ємів прямої призми, прямокутного паралелепіпеда, циліндра.

УРОК № 36

ТЕМА. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ І ЦИЛІНДРА.

Мета уроку: сформувати в учнів поняття об'єму, уміння знаходити об'єми призм і циліндрів; вивчити основні властивості об'ємів; розвивати просторову уяву, увагу, пам'ять, логічне мислення; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати основні властивості об'ємів, обчислювати з необхідною точністю об'єми призм і циліндрів.

Основні поняття: об'єм призми, об'єм циліндра.

Обладнання: підручник, моделі прямокутних паралелепіпедів, кубів, прямих призм, циліндрів.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. АНАЛІЗ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Учитель повідомляє статистичні результати контрольної роботи, акцентує увагу на типових помилках, яких припустилися учні, та відповідає на запитання.

III. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Інтерактивна вправа «Закінчіть речення»

1. Об'єм куба з ребром 4 см дорівнює...
2. Об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 4 см, 6 см дорівнює...
3. Об'єм прямої призми знаходять за формулою $V = \dots$
4. Об'єм циліндра дорівнює...

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Розглянемо дві задачі прикладного характеру.

1. Резервуар для води слід встановити на майданчику, що слугуватиме для нього дном. Якою має бути висота резервуара? Ємність резервуара 10 м^3 , розмір майданчика $2,5 \times 1,75 \text{ м}$.
2. Скільки тонн нафти вміщає циліндрична цистерна діаметром 18 м і заввишки 7 м, якщо густина нафти $\rho = 0,85 \text{ г/см}^3$?
Для розв'язування задач суто практичного характеру вам необхідні формули, що будуть розглянуті сьогодні на уроці. Із цими формулами ви, до речі, уже частково знайомі.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Шкільна лекція з елементами бесіди

Об'ємом геометричного тіла будемо називати додатне число, що характеризує частину простору, яку займає геометричне тіло, і задовольняє такі умови:

- рівні тіла мають рівні об'єми;
- якщо тіло розбите на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів всіх цих частин;
- об'єм куба, ребро якого дорівнює одиниці довжини, дорівнює одиниці.

Одиничним називають куб, ребро якого дорівнює одиниці.

Об'єм одиничного куба приймають за одиницю об'єму.

Поясніть, що таке 1 мм^3 ; 1 м^3 ; 1 дм^3 . Згадайте, як по-іншому називають 1 дм^3 .

Виміряти об'єм геометричного тіла означає знайти число, яке показує, скільки одиничних кубів містить це тіло.

Рівновеликими називають геометричні тіла, об'єми яких рівні.

Робота з підручником

Учні самостійно працюють із підручником, вивчаючи виведення формул об'ємів прямої призми й циліндра.



В обох випадках формула об'єму — добуток площі основи на висоту.

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

Учитель пропонує повернутися до задач 1 і 2, які розглядалися на початку уроку, і розв'язати їх.

Розв'язання задачі 1. Будемо розглядати резервуар як прямокутний паралелепіпед об'ємом 10 м^3 , основою якого є прямокутник зі сторонами 2,5 м і 1,75 м. Тоді $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, де H — шукана висота, $S_{\text{осн}} = 2,5 \cdot 1,75 = 4,375 \text{ (м}^2\text{)}$. Тоді $H = \frac{V}{S_{\text{осн}}} \approx 2,29 \text{ (м)}$. *Відповідь:* $\approx 2,29 \text{ м}$.

Розв'язання задачі 2. Знайдемо об'єм циліндричної цистерни. $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, де $S_{\text{осн}} = \pi R^2 = 81\pi \text{ м}^2$; $H = 7 \text{ м}$. $V = 567\pi \text{ м}^3 \approx 1780 \text{ м}^3$. Оскільки $m = \rho V$, де m — маса нафти, ρ — її густина, то $m = 1780 \text{ м}^3 \cdot 0,85 \frac{\text{г}}{\text{см}^3} = 1780 \cdot 10^6 \cdot 0,85 \approx 1\,513\,000\,000 \text{ (г)} = 1513 \text{ (т)}$. *Відповідь:* $\approx 1513 \text{ т}$.

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учні розв'язують задачі з подальшою перевіркою розв'язань біля дошки.

1. Кожне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює 4 см, а гострий кут основи становить 30° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (*Відповідь:* 32 см^3 .)
2. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює 10 см і утворює із площиною основи кут 60° . Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо різниця сторін основи дорівнює 1 см. (*Відповідь:* $60\sqrt{3} \text{ см}^3$.)
3. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гіпотенузою 13 см і одним із катетів 12 см. Висота призми 5 см. Знайдіть об'єм призми. (*Відповідь:* 150 см^3 .)
4. Висота циліндра дорівнює 4 см, а діагональ осевого перерізу утворює із площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм циліндра. (*Відповідь:* $48\pi \text{ см}^3$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування

1. Повна поверхня куба дорівнює 96 м^2 . Знайдіть об'єм куба.
2. Об'єм куба дорівнює 64 см^3 . Знайдіть площу бічної поверхні куба.

3. У правильній трикутній призмі всі ребра рівні. Знайдіть об'єм призми.
4. Один із циліндрів утричі товщий за інший, але втричі коротший. Чи однакові в них об'єми?
5. У скільки разів збільшиться об'єм циліндра, якщо його висоту збільшити вдвічі?
6. У скільки разів збільшиться об'єм циліндра, якщо радіус його основи збільшити вдвічі?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 35	[3]: § 17, п. 1, 2
С	№ 1141, 1151	№ 289 (1)
Д	№ 1158	№ 289 (3)
В	№ 1167	№ 289 (4)

Індивідуально

В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб, діагоналі якого відносяться як 2:5. Знайти об'єм паралелепіпеда, якщо його діагоналі дорівнюють 17 см і 25 см. (Відповідь: 1200 см³.)

УРОК № 37

ТЕМА. ОБ'ЄМИ ПРИЗМИ І ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА.

Мета уроку: формувати вміння учнів обчислювати об'єми призми і паралелепіпедів, застосовуючи формули об'ємів призми і паралелепіпеда; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати формули об'ємів призми, прямокутного паралелепіпеда й уміти застосовувати ці формули для розв'язування задач.

Обладнання: підручник, моделі призми і паралелепіпедів.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні самостійно перевіряють домашнє завдання за відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ


Математичний диктант

Учні здійснюють взаємоперевірку за відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем.

1. Знайдіть об'єм куба, якщо: а) ребро дорівнює 5 см; б) площа повної поверхні становить 96 см^2 ; в) площа грані дорівнює S ; г) діагональ дорівнює d .
2. Об'єм куба дорівнює 27 см^3 . Знайдіть площу його повної поверхні.
3. Знайдіть довжину діагоналі куба, об'єм якого дорівнює V .
4. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 6 см, 9 см, 7 см.
5. Знайдіть об'єм прямої призми, висота якої дорівнює 7 см, а основою є прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см.
6. Основою прямої призми є трикутник зі стороною 12 см і висотою, проведеною до неї, 8 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 10 см.
7. Основою прямої призми є трапеція, середня лінія якої дорівнює 12 см, а висота — 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її бічне ребро 20 см. Чому дорівнює ребро куба, рівновеликого призмі?
8. У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює 4 см, а діагональ бічної грані — 5 см. Знайдіть об'єм призми.

Відповіді до математичного диктанту

1. а) 125 см^3 ; б) 64 см^3 ; в) $S\sqrt{S}$; г) $\frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.
2. 54 см^2 .
3. $\sqrt[3]{3\sqrt{3}V}$.
4. 378 см^3 .
5. 42 см^3 .
6. 480 см^3 .
7. 1200 см^3 ; $\sqrt[3]{1200}$.
8. 48 см^3 .

 Об'єм куба можна виразити через його діагональ d так: $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

На попередньому уроці ви мали можливість переконатися, що знання необхідних формул і вміння їх застосовувати дозволяють без особливих труднощів розв'язувати задачі прикладного характеру. Щоб вільно володіти формулами об'єму паралелепіпеда і призми, слід вдосконалити вміння й навички.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку замість задач, текст яких наведено нижче, можна скористатися посібником [5], СР 13 або СР 14.

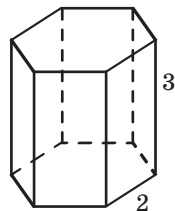
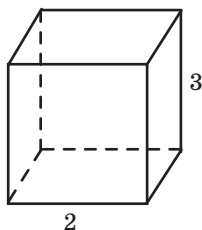
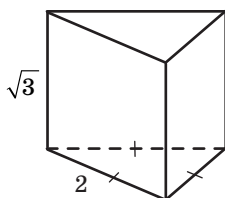
Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник із гострим кутом α і гіпотенузою c . Діагональ бічної грані, що містить гіпотенузу, утворює із площиною основи кут β . Знайдіть об'єм призми. (Відповідь: $\frac{1}{4}c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$.)
2. В основі прямого паралелепіпеда лежить ромб, менша діагональ якого дорівнює 6 см, а гострий кут становить 60° . Бічне ребро паралелепіпеда в 2 рази менше за сторону основи. Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (Відповідь: $27\sqrt{3} \text{ см}^3$.)
3. У правильній шестикутній призмі площа найбільшого діагонального перерізу дорівнює $16\sqrt{3} \text{ см}^2$, а менша діагональ основи — 4 см. Знайдіть об'єм призми. (Відповідь: $48\sqrt{3} \text{ см}^3$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Знайдіть об'єм куба з ребром 3 см.
2. Знайдіть об'єми правильних призм, зображених на рисунку.



VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 35	[3]: § 17, п. 1, 2
С	№ 1147	№ 291 (1–3)
Д	№ 1164	№ 291 (4–6)
В	№ 1165	№ 291 (7)

Індивідуально

Основа прямої призми — прямокутний трикутник із висотою, яка дорівнює 12 см. Бічне ребро призми дорівнює 5 см, а її об'єм — 750 см^3 . Знайти площу бічної поверхні призми.

ТЕМА. ОБ'ЄМ ЦИЛІНДРА.

Мета уроку: сформувати вміння обчислювати з необхідною точністю об'єми циліндрів; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати формулу об'єму циліндра й уміти застосовувати її для знаходження об'ємів циліндрів.

Обладнання: підручник, моделі циліндрів.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, які виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

Математичний диктант

Дано правильну трикутну призму, у якій сторона основи дорівнює a , а кут між стороною основи й діагоналлю бічної грані дорівнює α . Знайдіть:

- висоту призми;
- площу основи призми;
- об'єм призми;
- ребро куба, рівновеликого цій призми;
- площу основ правильної чотирикутної призми, якщо ребро її основи дорівнює довжині діагоналі бічної грані цієї призми.

Відповіді до математичного диктанту

а) $a \operatorname{tg} \alpha$; б) $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a^3 \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{4}$; г) $a \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha}$; д) $\frac{a^2}{\cos^2 \alpha}$.

Учні, здавши роботи, виконують самоперевірку за відповідями, заздалегідь підготовленими вчителем на відкидній дошці.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

- Чому дорівнює площа основи циліндра, радіус якого дорівнює R ?
- Чому дорівнює висота рівностороннього циліндра, якщо радіус його основи дорівнює R ?
- За допомогою якої формули можна знайти об'єм циліндра?
- Що являє собою переріз циліндра площиною, паралельною осі циліндра?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Для розв'язування задач прикладного характеру необхідно навчитися знаходити об'єми циліндричних тіл, знати зв'язок між масою, об'ємом і густиною. Наприклад, необхідно знайти діаметр мідного дроту завдовжки 25 м і масою 100,7 г, знаючи, що густина міді $8,94 \text{ г/см}^3$.

Щоб розв'язати таку задачу, достатньо знати, що $m = \rho V$, де m — маса тіла, V — його об'єм, ρ — густина, а також формулу об'єму циліндра $V = \pi R^2 H$ ($\pi \approx 3,14$). У нашій задачі $H = 25 \text{ м} = 2500 \text{ см}$.

Отже, $V = \frac{m}{\rho} \approx 11,264 \text{ см}^3$; $R^2 = 0,0143 \text{ (см}^2\text{)}$, $R \approx 0,038 \text{ см}$. Таким чином, діаметр дроту $\approx 0,075 \text{ см}$, або $\approx 0,75 \text{ мм}$.

Як бачимо, задачу розв'язано без особливих зусиль. Сьогодні ви вдосконалили свої вміння щодо знаходження об'ємів циліндрів, що, безумовно, стане у пригоді в повсякденному житті.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. У нижній основі циліндра проведено хорду, яку видно із центра нижньої основи під кутом 90° , а із центра верхньої основи — під кутом 60° . Знайдіть об'єм циліндра, якщо довжина хорди дорівнює 2 см. (Відповідь: $2\sqrt{2}\pi \text{ см}^2$.)
2. Об'єм циліндра дорівнює V , а площа осевого перерізу — S . Знайдіть площу основ циліндра. (Відповідь: $\frac{4V^2}{S^2\pi}$.)
3. Об'єм циліндра дорівнює V . Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра із точкою кола нижньої основи, утворює із віссю циліндра кут β . Знайдіть площу основи циліндра. (Відповідь: $\sqrt[3]{V^2\pi \text{tg}^2 \beta}$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. Один циліндр у 3 рази ширший за другий, але в 3 рази коротший. Чи однакові їхні об'єми?
2. Поясніть, як обчислити об'єм хокейної шайби.
3. Іграшкове відерце має розміри в 10 разів менші, ніж відро ємністю 12 л води. Чи поміститься в це відерце склянка води?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 35	[3]
С	№ 1154	№ 296 (1)
Д	№ 1353	№ 297
В	№ 1166	№ 296 (3, 4)

Індивідуально

У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайти відношення об'ємів циліндрів. (Відповідь: 4:1.)

УРОК № 39

ТЕМА. ОБ'ЄМ ПРИЗМИ І ЦИЛІНДРА.

Мета уроку: формувати вміння учнів знаходити об'єми циліндрів і призми; провести діагностичну самостійну роботу; розвивати просторову уяву, логічне мислення, уміння працювати в групі, відстоювати власну думку, правильно розраховувати час роботи; виховувати культуру спілкування під час роботи в групі, самостійність, цілеспрямованість, працьовитість, принциповість.

Очікувані результати: учні повинні вміти обчислювати з необхідною точністю об'єми призми і циліндрів, застосовуючи необхідні формули.

Обладнання: моделі призми і циліндрів, роздавальний матеріал.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учні об'єднуються в гетерогенні групи.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Робота в групах

Члени групи здійснюють взаємоперевірку за відповідями, запропонованими вчителем.

На цьому етапі уроку можна також скористатися посібником [5], СР 16.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Робота в групах

Члени групи по черзі ставлять одне одному запитання й пропонують завдання на знання формул для знаходження об'ємів куба, паралелепіпеда, призми, циліндра.

Орієнтовні запитання

1. Знайдіть об'єм куба з ребром 4 см.
2. Знайдіть об'єм куба із площею поверхні 150 см^2 .
3. Виразіть об'єм куба через його діагональ; через діагональ його грані.
4. Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами a, b, c ?
5. Чому дорівнює об'єм прямої призми?
6. Чому дорівнює об'єм циліндра з радіусом 5 см і висотою 8 см?
7. Площа осевого перерізу рівностороннього циліндра дорівнює S . Чому дорівнює його об'єм?
8. Осевий переріз циліндра — квадрат, діагональ якого дорівнює d . Знайдіть об'єм циліндра.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель нагадує учням про необхідність уміти працювати в групі й у конкретних часових межах і пропонує продемонструвати свої вміння на уроці.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Кожна група отримує задачу, розв'язання якої потім пояснює біля дошки.

1. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми утворює з бічним ребром кут β . Радіус кола, описаного навколо бічної грані, дорівнює R . Знайдіть об'єм призми. (Відповідь: $\sqrt{3}R^3 \sin \beta \sin 2\beta$.)
2. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює із площиною основи кут α , а із площиною бічної грані — кут β . Знайдіть об'єм паралелепіпеда. (Відповідь: $d^3 \sin \beta \sin \alpha \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.)
3. У циліндрі паралельно його осі проведено площину, яка перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра основи під кутом 2α . Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом β . Знайдіть об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює Q . (Відповідь: $\frac{\pi Q \sqrt{Q}}{4 \sin^2 \alpha \sqrt{\text{tg } \beta}}$.)

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

Самостійна робота

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

Позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть об'єм правильної трикутної призми зі стороною основи 3 см і висотою 6 см.

А 18 см^3 Б $\frac{27}{2} \sqrt{3} \text{ см}^3$ В $18\sqrt{3} \text{ см}^3$ Г $9\sqrt{3} \text{ см}^3$

2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 4 см, 6 см.

А 72 см^3 Б 13 см^3 В 39 см^3 Г 144 см^3

3. Знайдіть об'єм циліндра, радіус якого дорівнює 3 см, а твірна — 6 см.

А 54 см^3 Б 9 см^3 В $54\pi \text{ см}^3$ Г 18 см^3

Достатній рівень (3 бали)

4. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 3 см, а діагональ — 5 см. Прямокутник обертається навколо більшої своєї сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Високий рівень (3 бали)

5. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо площі трьох його граней дорівнюють 2 см^2 , 6 см^2 і 3 см^2 .

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

Позначте одну правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної призми зі стороною основи 3 см і висотою 6 см.

А 54 см^3 Б 18 см^3 В 72 см^3 Г 36 см^3

2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 2 см, 4 см, 5 см.

А 11 см^3 Б 40 см^3 В 38 см^3 Г 22 см^3

3. Знайдіть об'єм циліндра, радіус якого дорівнює 2 см, а твірна — 8 см.

А 4 см^3 Б $128\pi \text{ см}^3$ В 32 см^3 Г $32\pi \text{ см}^3$

Достатній рівень (3 бали)

4. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 4 см, а діагональ — 5 см. Прямокутник обертається навколо меншої своєї сторони. Знайдіть об'єм тіла обертання.

Високий рівень (3 бали)

5. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо площі трьох його граней дорівнюють 2 см^2 , 4 см^2 і 8 см^2 .

Відповіді до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. $36\pi\text{ см}^3$. 5. 6 см^3 .

Варіант 2. 1. А. 2. Б. 3. Г. 4. $48\pi\text{ см}^3$. 5. 8 см^3 .

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель, зібравши роботи, пропонує учням ознайомитися з відповідями й відповідає на запитання, що виникли в учнів.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 35	[3]: § 17, п. 3
С	№ 1138	№ 295 (1, 2)
Д	№ 1160	№ 295 (3)
В	№ 1342	№ 302

Індивідуально

Основа прямої призми — прямокутний трикутник із гіпотенузою, яка дорівнює 17 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см, а її об'єм — 600 см^3 . Знайти площу бічної поверхні призми.

УРОК № 40

ТЕМА. ОБ'ЄМ КОНУСА І ПІРАМІДИ.

Мета уроку: сформувати вміння учнів знаходити за формулами об'єми піраміди і конусів; розвивати просторову уяву, увагу, пам'ять; виховувати акуратність, наполегливість, працьовитість.

Очікувані результати: учні повинні знати формули об'ємів піраміди й конуса, уміти застосовувати їх під час розв'язування задач, із необхідною точністю обчислювати об'єми геометричних тел.

Основні поняття: об'єм піраміди, об'єм конуса.

Обладнання: підручник, моделі пірамід і конусів.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час розв'язування задач домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Що таке об'єм?
2. Які властивості об'єму вам відомі?
3. Що спільного мають об'єм призми й об'єм циліндра?
4. Яка піраміда називається правильною?
5. Наведіть приклади предметів побуту, що мають форму конуса.
6. Назвіть спільні властивості піраміди й конуса.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Фронтальна бесіда

Уявіть собі, що ви фермер і вам необхідно визначити масу стогу сіна (густина сіна $0,03 \text{ г/см}^3$), яка має форму циліндра з конічним верхом. Радіус основи стогу становить 2,5 м, а висота — 4 м, причому його циліндрична частина дорівнює 2,2 м.

Очевидно, що для розв'язання цієї задачі необхідно вміти обчислювати об'єм циліндра й об'єм конуса. І якщо знаходження об'єму циліндра не становить труднощів, то об'єми конусів ви ще не знаходили. Сьогодні заповнимо цю прогалину в знаннях.

Ви напевно чули про піраміду Хеопса. Це правильна чотирикутна піраміда з бічним ребром 218 м і ребром основи 230 м. Який же об'єм піраміди Хеопса? Чи можна його знайти за наявними в нас даними? На ці питання ви теж отримаєте відповідь на уроці.

V. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Робота з підручником

Учні за підручником вивчають і згадують формули об'ємів піраміди і конуса:

$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$; $V_{\text{пр}} = \frac{1}{3} S_{\text{мн}} \cdot H$, де $S_{\text{мн}}$ — площа многокутника, що лежить в основі піраміди, H — висота піраміди; $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, де R — радіус основи конуса, H — висота конуса.

Робота в парах

Учні, працюючи в парах, розв'язують задачі про фермера та піраміду Хеопса, розглянуті на початку уроку.

1. Об'єм V розглядуваного тіла — сума об'ємів циліндра й конуса. Причому $V_{\text{ц}} = \pi R^2 H$, де $R = 2,5$ м, $H = 2,2$ м; $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, де $R = 2,5$ м, $h = 4 - 2,2 = 1,8$ (м).

Тоді $V_{\text{ц}} \approx 43,175 \text{ м}^3$, $V_{\text{к}} = 11,775 \text{ м}^3$, $V = 43,175 + 11,775 = 54,95 \text{ (м}^3\text{)}$.

Оскільки $m = \rho V$, де $\rho = 0,03 \text{ г/см}^3$ — густина сіна, то $m \approx 1,6$ т.

Відповідь: $\approx 1,6$ т.

2. Знаючи, що ребро основи піраміди дорівнює 230 м, отримаємо:

$R = \frac{230}{\sqrt{2}}$ м — радіус описаного навколо основи кола. Тоді

$H = 218^2 - \left(\frac{230}{\sqrt{2}} \right)^2 \approx 145$ (м) — висота піраміди.

Отже, $V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 52\,900 \cdot 145 \approx 2\,556\,785 \text{ (м}^3\text{)}$.

Відповідь: $\approx 2\,556\,785 \text{ м}^3$.

VI. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 3 см. Бічне ребро піраміди утворює із площиною основи кут 60° .

Знайдіть об'єм піраміди. (*Відповідь:* $\frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3$.)

2. Площа основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 100 см^2 , а площа повної поверхні — 360 см^2 . Знайдіть об'єм піраміди. (*Відповідь:* 400 см^3 .)

3. Площа осевого перерізу конуса дорівнює $4\sqrt{3} \text{ см}^2$. Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна утворює із площиною основи кут 30° . (*Відповідь:* $8\pi \text{ см}^3$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Дано модель правильної піраміди. Які вимірювання треба виконати, щоб обчислити її об'єм?
2. Чи є правильним твердження, що піраміди, які мають спільну основу й вершини, розташовані у площині, паралельній основі, є рівновеликими? (*Відповідь:* так.)

3. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо її висоту буде збільшено в n разів, а сторону основи зменшено в стільки ж разів? (Відповідь: зменшиться в n разів.)
4. Об'єм рівностороннього конуса зменшено у 8 разів. Як змінився його радіус? (Відповідь: зменшився у 2 рази.)
5. Циліндр і конус мають спільну основу й висоту. Обчисліть об'єм циліндра, якщо об'єм конуса дорівнює $10\pi \text{ см}^3$. (Відповідь: $30\pi \text{ см}^3$.)

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Індивідуально

Знайти об'єм конуса, якщо його осьовий переріз — трикутник

з периметром P і тупим кутом α . (Відповідь: $\frac{\pi P^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{24 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^3}$.)

УРОК № 41

ТЕМА. ОБ'ЄМ ПІРАМІДИ.

Мета уроку: сформувати й удосконалити вміння учнів знаходити об'єми пірамід, у тому числі й зрізаних; розвивати логічне мислення, просторову уяву, пам'ять, увагу; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати формулу об'єму піраміди; уміти застосовувати цю формулу для розв'язування задач; знаходити об'єми зрізаних пірамід у найпростіших випадках.

Обладнання: підручник, моделі пірамід.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за відповідями, підготовленими вчителем.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Розв'язування задач усно за готовими рисунками

1. Обчисліть об'єм правильної піраміди, зображеної на рис. 1. (Відповідь: $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$.)
2. У піраміді, зображеній на рис. 2, $\angle ACB = 90^\circ$, MA — висота, $MA = AC$. Чому дорівнює об'єм піраміди? (Відповідь: $\frac{a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{6}$.)
3. Від прямої призми переріз відтинає піраміду, об'єм якої дорівнює V (рис. 3). Знайдіть об'єм призми. (Відповідь: $6V$.)

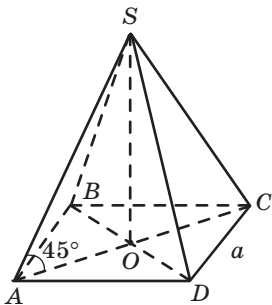


Рис. 1

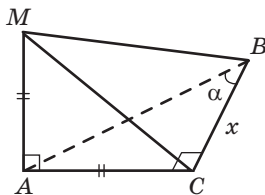


Рис. 2

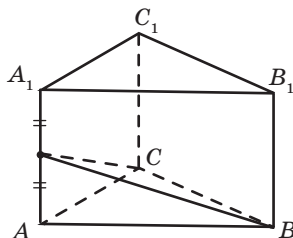


Рис. 3

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Уявіть собі, що ви знайшли золотий злиток, який має форму правильної зрізаної чотирикутної піраміди заввишки 30 см. Сторони основ дорівнюють 2 см і 4 см. Чи зможете ви забрати таку кількість золота? Врахуйте, що 1 м^3 золота важить приблизно 19 т. Відповісти на це запитання, не знаючи формули об'єму зрізаної піраміди, неможливо. З нею ви ознайомитеся сьогодні на уроці.

V. СПРИЙНЯТТЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Бесіда

Запишемо формулу об'єму зрізаної піраміди: $V_{\text{зріз. пір}} = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, де h — висота, S_1 і S_2 — площі основ зрізаної піраміди. А тепер повернемося до задачі, розглянутої на початку уроку.

Знайдемо об'єм зрізаної піраміди з огляду на те, що $h = 30$ см;
 $S_1 = 4$ см²; $S_2 = 16$ см².

$$V_{\text{зріз. пір}} = \frac{1}{3} h (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \cdot 30 (4 + 16 + \sqrt{4 \cdot 16}) =$$

$$= 10(20 + 8) = 280 \text{ (см}^3\text{)} = 0,00028 \text{ (м}^3\text{)}.$$

$$19 \cdot 0,00028 = 0,00532 \text{ (т)} = 5,32 \text{ (кг)}.$$

VI. ОСМИСЛЕННЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

Замість задач для колективного розв'язування можна скористатися посібником [5], СР 15.

1. Основа піраміди — прямокутний трикутник, один із кутів якого дорівнює 30° . Усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 5 см. (Відповідь: $\frac{125\sqrt{3}}{6}$ см³.)

2. Основа піраміди $SABCD$ — прямокутник $ABCD$. Ребро BS перпендикулярне до площини основи, а грані ASD і DSC утворюють із площиною відповідно кути 30° і 60° , висота піраміди дорівнює 4 см. Знайдіть об'єм піраміди. (Відповідь: $21\frac{1}{3}$ см³.)

3. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, висота якої дорівнює 3 см, а радіуси кіл, описаних навколо основ, — $\sqrt{2}$ см і $2\sqrt{2}$ см.

Розв'язання. Оскільки піраміда правильна, то її основи — квадрати, тоді сторони квадратів дорівнюють: $a_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ (см),

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4 \text{ (см)}, \text{ тоді } S_1 = a_1^2 = 4 \text{ см}^2, \text{ а } S_2 = a_2^2 = 16 \text{ см}^2.$$

$$V = \frac{1}{3} H \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (4 + 16 + \sqrt{4 \cdot 16}) = 20 + 8 = 28 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 28 см³.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда

1. З якою формулою ви сьогодні ознайомилися?
2. Які формули з курсу планіметрії застосовувалися на уроці?
3. Які теореми стереометрії були використані під час розв'язування задач?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 36	[3]: § 18, п. 2
С	№ 1181	№ 325 (1, 2)
Д	№ 1204	№ 325 (3, 4)
В	с. 276, СР 9 (В-1)	№ 326 (4)

Індивідуально

Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють a і b , а двограний кут при ребрі нижньої основи дорівнює α .

Знайти об'єм піраміди. (Відповідь: $\frac{a^3 - b^3}{24} \operatorname{tg} \alpha$.)

УРОК № 42

ТЕМА. ОБ'ЄМ КОНУСА.

Мета уроку: сформувати й удосконалити вміння учнів знаходити об'єми конусів, у тому числі й зрізаних; розвивати пам'ять, логічне мислення, просторову уяву, увагу; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати формули об'ємів конуса, зрізаного конуса; обчислювати об'єми конусів і зрізаних конусів із необхідною точністю.

Обладнання: підручник, моделі конусів, зрізаних конусів.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Розв'язування задач усно за готовими рисунками

Знайдіть об'єм конуса (рис. 1, $a-v$). (Відповідь: а) $\frac{1}{3} \pi R^3$;

б) $\frac{1}{3} \pi R^3$; в) $\frac{1}{3} \pi H^3$.)

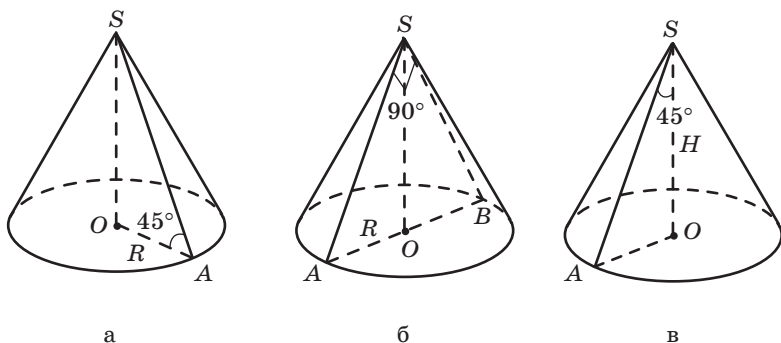


Рис. 1

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Слово вчителя

Як ви гадаєте, чи не заважким буде рупор, виготовлений з алюмінію, якщо діаметр одного кінця рупора дорівнює 0,43 м, другого — 0,036 м, а твірна — 1,42 м? Врахуйте, що густина алюмінію $\rho \approx 2,7 \text{ г/см}^3$.

Для розв'язання такої задачі необхідно знати, як знайти об'єм зрізаного конуса, адже $m = \rho V$. Сьогодні ви ознайомитеся із цією формулою.

IV. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота в парах

Учитель просить записати формулу об'єму зрізаного конуса:

$$V_{\text{зріз.к}} = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2), \text{ де } H \text{ — висота, } R \text{ і } r \text{ — радіуси основ}$$

зрізаного конуса.

Потім учні, працюючи в парах, розв'язують задачу, запропоновану на початку уроку. (Розв'язання. $R = 0,43 : 2 = 0,215$ (м); $r = 0,036 : 2 = 0,018$ (м). Нехай рівнобедрена трапеція AA_1B_1B — осьовий переріз зрізаного конуса (рис. 2). Знайдемо висоту зрізаного конуса із прямокутного трикутника AA_1K ($\angle AKA_1 = 90^\circ$): $AK = R - r = 0,197$ м, $AA_1 = 1,42$ м, $AK_1 = \sqrt{AA_1^2 - AK^2} \approx 1,41$ м.

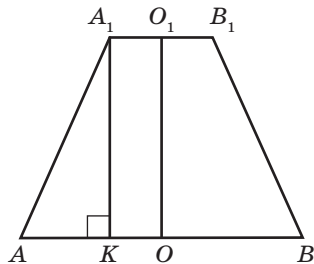


Рис. 2

Тоді $V \approx \frac{1}{3} \pi \cdot 1,41(0,04623 + 0,00032 + 0,00387) \approx 0,07 \text{ (м}^3\text{)}$. Отже,
 $m = \rho V = 2,7 \cdot 10^6 \cdot 0,07 = 189 \cdot 10^3 \text{ (г)} = 189 \text{ (кг)}$. *Відповідь:* 189 кг.)

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в парах

Учні розв'язують задачі з подальшою перевіркою розв'язань.

1. Твірна конуса дорівнює 6 см і нахилена до площини основи під кутом 60° . Знайдіть об'єм конуса. (*Відповідь:* $9\sqrt{3}\pi \text{ см}^3$.)
2. Через вершину конуса з радіусом основи 6 см проведено переріз, площа якого дорівнює $6\sqrt{13} \text{ см}^2$. Цей переріз перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи конуса під кутом 60° . Знайдіть об'єм конуса. (*Відповідь:* $60\pi \text{ см}^3$.)
3. Зрізаний конус, у якого радіуси основ 2 см і 10 см, треба перетворити на рівновеликий циліндр такої самої висоти. Чому дорівнюватиме радіус основи цього циліндра? (*Відповідь:* $\frac{2\sqrt{93}}{3} \text{ см}$.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

На цьому етапі уроку замість графічного диктанту, текст якого наведено нижче, можна скористатися посібником [5], СР 17.

Графічний диктант

Учні записують у зошиті відповіді, користуючись символами «так» \cap , «ні» — , а потім здійснюють самоперевірку за ключем-відповіддю, запропонованим учителем.

Чи є правильним твердження, що:

- 1) об'єм конуса з радіусом 2 см і висотою 2 см дорівнює $8\pi \text{ см}^3$;
- 2) коли висоту конуса збільшити в 3 рази, то його об'єм теж збільшиться в 3 рази;
- 3) коли радіус основи конуса збільшити в 3 рази, то його об'єм теж збільшиться в 3 рази;
- 4) коли об'єм циліндра дорівнює $24\pi \text{ см}^3$, то об'єм конуса — $8\pi \text{ см}^3$. Циліндр і конус мають спільну основу й висоту;
- 5) конус з висотою 3 см і довжиною кола основи $4\pi \text{ см}$ має об'єм $4\pi \text{ см}^3$;
- 6) коли кут між твірною і висотою конуса дорівнює 45° , а радіус основи конуса дорівнює 3 см, то його об'єм дорівнює $9\pi \text{ см}^3$?

Ключ-відповідь:

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 36	[3]: § 18, п. 2
С	№ 1173, 1192	№ 318 (1, 2)
Д	№ 1208	№ 318 (3, 4)
В	№ 1218	№ 318 (5, 6)

Індивідуально

Радіуси основ зрізаного конуса відносяться як $1:3$, а його твірна дорівнює 8 см і нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайти об'єм конуса. (Відповідь: 208π см³.)

УРОК № 43

ТЕМА. ОБ'ЄМ КОНУСА І ПІРАМІДИ.

Мета уроку: узагальнити та систематизувати знання й уміння учнів із теми «Об'єм конуса і піраміди»; провести діагностичну самостійну роботу; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати вміння спілкуватися в групах, чітко формулювати свою думку, коректно вести дискусію, розраховувати час роботи.

Очікувані результати: учні повинні знати формули об'ємів піраміди та конуса і вміти застосовувати їх для обчислення об'ємів пірамід і конусів.

Обладнання: підручник, моделі пірамід і конусів, роздавальний матеріал.

Тип уроку: комбінований.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пропонує учням об'єднатися в гетерогенні групи для роботи на уроці.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Робота в групах

Перевірка домашнього завдання проводиться в кожній групі за відповідями, запропонованими вчителем.

III. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Чому дорівнює об'єм піраміди; об'єм конуса?
2. Як зміниться об'єм правильної піраміди, якщо її висоту збільшити у 2 рази, а сторону основи зменшити у 2 рази?

- Чи будуть рівновеликими дві піраміди з рівними висотами, якщо їхніми основами є чотирикутники, у яких відповідні сторони рівні?
- Як знайти об'єм зрізаного конуса; зрізаної піраміди?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

☑ Слово вчителя

Ви вже вмієте знаходити об'єми призм і пірамід, циліндрів і конусів. Як ви могли переконалися, задачі на знаходження об'ємів тіл мають велике практичне значення. Необхідно знати формулу об'єму тіла, а також уміти правильно й швидко виконати обчислення, знати, яку саме формулу використовувати в розв'язанні. Сьогодні ви продемонструєте свої вміння, працюючи як у групах, так і самостійно, тож правильно розподіліть час.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Кожна група отримує задачу і працює над її розв'язанням.

☑ Робота в групах

- Площа повної поверхні конуса дорівнює $90\pi \text{ см}^2$, а його твірна більша за радіус основи на 8 см. Знайдіть об'єм конуса.
- В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з основою 12 см і кутом 60° при вершині. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут 30° . Знайдіть об'єм піраміди.
- Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетом b і протилежним йому гострим кутом β . Дві бічні грані, які містять катети цього трикутника, перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом α . Знайдіть об'єм піраміди.

Розв'язання до задач

- Нехай дано конус із висотою SO (рис. 1), площа його повної поверхні $S_{\text{повн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}} = \pi R^2 + \pi Rl$, де R — радіус основи, l — твірна, $l = SA$, $R = AO$. За умовою $S_{\text{повн}} = 90\pi \text{ см}^2$.
Нехай $R = x$ см ($x > 0$), тоді $AS = (x + 8)$ см.
Отримаємо: $\pi x^2 + \pi \cdot x(x + 8) = 90\pi$.
Тоді $x^2 + x^2 + 8x = 90$; $2x^2 + 8x - 90 = 0$;
 $x^2 + 4x - 45 = 0$; $x = -9$ або $x = 5$.
Отже, $R = 5$ см, $l = 13$ см.

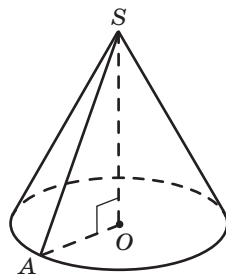


Рис. 1

Із трикутника SOA ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо:

$$SO = H = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}.$$

$$V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H = \frac{1}{3} \pi \cdot 25 \cdot 12 = 100\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: $100\pi \text{ см}^3$.

2. Дано трикутну піраміду $SABC$ (рис. 2), основою якої є рівнобедрений трикутник ABC , у якого $AB = AC$, $BC = 12$ см, $\angle BAC = 60^\circ$. За умовою всі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кути по 30° , тому основа висоти піраміди — точка O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC , а $AO = R$, де R — радіус цього кола. Проведемо $AK \perp BC$. Оскільки трикутник ABC рівнобедрений, то AK — висота, медіана, бісектриса, а отже, і серединний перпендикуляр до відрізка BC . $O \in AK$. $SO \perp (ABC)$, тоді AO — проекція AS на площину основи і $\angle SAO = 30^\circ$. Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$. $S_{\text{осн}} = \frac{BC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{12 \cdot 12 \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ (см²) (оскільки трикутник ABC рівнобедрений і має один кут 60° , то він і рівносторонній). $R = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ (см); $AO = 4\sqrt{3}$ см. Із трикутника AOS ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $SO = H = AO \cdot \text{tg } 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 4$ (см).

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} 36\sqrt{3} \cdot 4 = 48\sqrt{3} \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: $48\sqrt{3} \text{ см}^3$.

3. Нехай $SABC$ — дана трикутна піраміда (рис. 3). У трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = b$, $\angle B = \beta$. $BC = AC \cdot \text{ctg } \beta = b \text{ ctg } \beta$;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{b^2 \text{ ctg } \beta}{2}. \quad AB = \frac{b}{\sin \beta}.$$

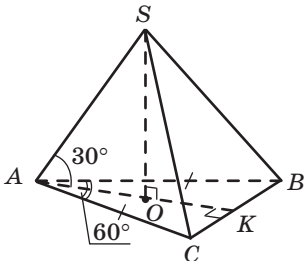


Рис. 2

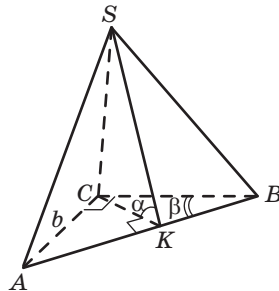


Рис. 3

Оскільки грані SCA і SCB перпендикулярні до площини основи піраміди, то їхнє спільне бічне ребро SC є висотою піраміди. Проведемо $CK \perp AB$, тоді $SK \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри, а отже, $\angle SKC = \alpha$ — кут нахилу грані SAB до площини основи піраміди.

Із трикутника ABC ($\angle C = 90^\circ$) отримаємо:

$$CK = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB} = \frac{2b^2 \operatorname{ctg} \beta \cdot \sin \beta}{2 \cdot b} = b \cos \beta.$$

Із трикутника SCK ($\angle SCK = 90^\circ$, SC — висота піраміди) отримаємо: $SC = CK \cdot \operatorname{tg} \angle SKC = b \cos \beta \operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{Тоді } V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SC = \frac{1}{3} \frac{b^2 \operatorname{ctg} \beta}{2} \cdot b \cos \beta \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{6} b^3 \operatorname{ctg} \beta \cos \beta \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{6} b^3 \operatorname{ctg} \beta \cos \beta \operatorname{tg} \alpha.$$

VI. ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

Самостійна робота

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на ваш погляд, відповідь.

1. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 3 см, а твірна нахилена до площини основи під кутом 45° .

А $3\pi \text{ см}^3$ Б $9\pi \text{ см}^3$ В 9 см^3 Г 3 см^3

2. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, діагональ основи якої дорівнює 6 см, а висота — 2 см.

А 12 см^3 Б 24 см^3 В $\frac{12}{\sqrt{2}} \text{ см}^3$ Г 36 см^3

3. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди зі стороною основи 2 см і висотою 6 см.

А $24\sqrt{3} \text{ см}^3$ Б 8 см^3 В $6\sqrt{3} \text{ см}^3$ Г $2\sqrt{3} \text{ см}^3$

Достатній рівень (3 бали)

4. Об'єм конуса дорівнює $100\pi \text{ см}^3$, а висота — 12 см. Обчисліть площу повної поверхні конуса.

Високий рівень (3 бали)

5. Основа піраміди — ромб із кутом 30° . Усі двогранні кути при ребрах основи становлять 60° . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює $3\sqrt{3}$ см.

Варіант 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–3 позначте правильну, на ваш погляд, відповідь.

1. Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 6 см, а кут між висотою і твірною конуса — 45° .

А $72\pi \text{ см}^3$ Б 72 см^3 В 6 см^3 Г $36\pi \text{ см}^3$

2. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди зі стороною основи 2 см і висотою 3 см.

А 6 см^3 Б 4 см^3 В 12 см^3 Г 18 см^3

3. Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди зі стороною основи 3 см і висотою 4 см.

А 12 см^3 Б $36\sqrt{3} \text{ см}^3$ В $3\sqrt{3} \text{ см}^3$ Г $12\sqrt{3} \text{ см}^3$

Достатній рівень (3 бали)

4. Об'єм конуса з радіусом основи 6 см дорівнює $96\pi \text{ см}^3$. Обчисліть площу повної поверхні конуса.

Високий рівень (3 бали)

5. Основа піраміди — ромб зі стороною 16 см і кутом 30° . Усі двогранні кути при ребрах основи становлять 60° . Знайдіть об'єм піраміди.

Відповіді та розв'язання до самостійної роботи

Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. $90\pi \text{ см}^2$. 5. $72\sqrt{3} \text{ см}^3$.

Варіант 2. 1. А. 2. Б. 3. В. 4. $96\pi \text{ см}^2$. 5. $\frac{512\sqrt{3}}{3} \text{ см}^3$.

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель пропонує учням ознайомитися з відповідями до самостійної роботи, заздалегідь підготовленими на відкидній дошці, і відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання роботи.

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 36	[3]: § 18, п. 2
С	№ 1194	№ 327 (1)
Д	№ 1212	№ 327 (3)
В	№ 1220	№ 328 (4–6)

Індивідуально

Сторони основи правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 8 см і 12 см, а бічне ребро утворює із площиною більшої основи кут 60° . Знайти об'єм цієї зрізаної піраміди.

ТЕМА. **ОБ'ЄМ КУЛІ.**

Мета уроку: сформувати вміння учнів знаходити об'єм кулі за формулою; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні знати формулу об'єму кулі й уміти застосовувати її для розв'язування задач.

Основні поняття: об'єм кулі.

Обладнання: підручник, моделі куль.

Тип уроку: засвоєння нових знань.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, що виникли в учнів під час виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліцопитування

1. Що являє собою переріз кулі площиною?
2. Як знайти площу круга?
3. Яка формула об'єму кулі?

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Постановка проблемного питання

Учитель пропонує учням розглянути задачу прикладного характеру з тим, щоб повернутися до неї пізніше.

Маса чавунної кулі регулятора становить 10 кг. Знайдіть діаметр кулі, якщо густина чавуну $7,2 \text{ г/см}^3$.

V. СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Робота з підручником

Учні самостійно працюють із підручником, знайомляться з виведенням формули об'єму кулі й записують формулу в зошит:

$$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

Учитель звертає увагу учнів на те, що для розв'язання розглянутої на початку уроку задачі необхідно знати формулу об'єму кулі. (Розв'язання. Оскільки $m = V\rho$ (де V — об'єм чавунної кулі,

m — маса, ρ — густина чавуну), то $V_{\text{кулі}} = \frac{m}{\rho} \approx 1388,9 \text{ см}^3$; оскільки $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$, то $R^3 \approx 332 \text{ см}^3$, $R \approx 7 \text{ см}$. Отже, діаметр кулі приблизно дорівнює 14 см. *Відповідь:* $\approx 14 \text{ см}$.)

VI. ОСМИСЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Довжина кола перерізу, що проходить через центр кулі (великого кола), дорівнює 8π см. Знайдіть об'єм кулі. (*Відповідь:* $\frac{256\pi}{3} \text{ см}^3$.)
2. На поверхні кулі позначено точки A і B , причому $AB=6$ см. Кут між відрізками, що сполучають центр кулі з точками A і B , становить 60° . Знайдіть об'єм кулі. (*Відповідь:* $288\pi \text{ см}^3$.)
3. Об'єм кулі дорівнює $\frac{32}{3}\pi \text{ см}^3$. Перпендикуляр, проведений із центра до площини перерізу кулі, утворює кут 45° із радіусом, проведеним у точку кола перерізу. Знайдіть площу перерізу. (*Відповідь:* $2\pi \text{ см}^2$.)

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бесіда

1. У скільки разів треба збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?
2. У скільки разів зменшиться об'єм кулі, якщо радіус зменшити в 3 рази?
3. Об'єми конуса й кулі рівні. Радіус основи конуса і радіус кулі дорівнюють 2 см. Якою є висота конуса?
4. Знайдіть об'єм кулі радіусом 3 см.
5. Площа великого круга збільшилася в 4 рази. Як змінився об'єм кулі?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 36	[3]: § 18
С	№ 1202	№ 328 (1)
Д	№ 1215	№ 328 (2)
В	№ 1217	№ 328 (3, 4)

Індивідуально

Вершини прямокутного трикутника з катетом a і прилеглим до нього гострим кутом α лежать на поверхні кулі, об'єм якої дорівнює V . Знайти відстань від центра кулі до площини трикутника.

ТЕМА. **ОБ'ЄМИ ТІЛ ОБЕРТАННЯ.**

Мета уроку: сформувати вміння учнів знаходити об'єми тіл обертання, застосовуючи основні формули, розбивати тіла на простіші; розвивати просторову уяву, логічне мислення, увагу, пам'ять; виховувати наполегливість, працьовитість, акуратність.

Очікувані результати: учні повинні вміти знаходити об'єми тіл обертання, отриманих унаслідок обертання плоских фігур, розбиваючи їх на тіла, об'єми яких вони вміють знаходити за формулами.

Обладнання: підручник, моделі тіл обертання.

Тип уроку: застосування знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

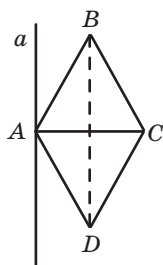
Учитель збирає зошити з домашнім завданням на перевірку. На цьому етапі уроку можна скористатися посібником [5], СР 18.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

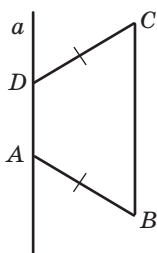
Робота в парах

Учні відповідають усно, користуючись рисунками, заздалегідь підготовленими на дошці.

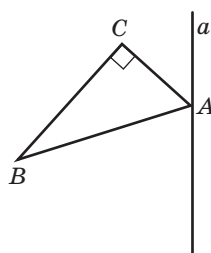
Схарактеризуйте тіла, які утворюються внаслідок обертання навколо прямої a фігур, зображених на рисунку.



а



б



в

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Колективне розв'язування задач під керівництвом учителя

1. Прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см, обертається навколо гіпотенузи. Знайдіть об'єм тіла обертання. (Відповідь: $76,8\pi$ см³.)
2. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо сторони, що дорівнює 14 см. Знайдіть об'єм тіла обертання. (Відповідь: 672π см³.)
3. Рівнобедрений трикутник обертається навколо прямої, паралельної його основі. Бічна сторона трикутника дорівнює 5 см, основа — 6 см. Знайдіть об'єм отриманого тіла обертання. (Відповідь: 64π см³.)

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Бліцопитування

1. Що являє собою тіло, отримане обертанням: а) прямокутного трикутника навколо більшої сторони; б) довільного трикутника навколо однієї зі сторін?
2. Тіло P складається з тіл P_1 і P_2 , об'єми яких дорівнюють V_1 і V_2 відповідно. Причому тіла P_1 і P_2 мають спільну частину, об'єм якої дорівнює V_3 . Який об'єм тіла P ?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 35	[3]: § 18
С	№ 1156	№ 309
Д	№ 1214	№ 312
В	№ 1219	№ 313

Індивідуально

1. Прямокутна трапеція з основами 2 см і 5 см і меншою бічною стороною 4 см обертається навколо більшої основи. Знайти об'єм тіла обертання. (Відповідь: 48π см³.)
2. Підготувати повідомлення на тему «Об'єми тіл».

ТЕМА. **ОБ'ЄМИ ТІЛ.**

Мета уроку: узагальнити й систематизувати вивчений матеріал із теми «Об'єми геометричних тіл»; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу, культуру математичних записів; виховувати наполегливість, працьовитість, принциповість, уміння вести дискусію, обстоювати свою думку.

Очікувані результати: учні повинні знати формули об'ємів призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі; уміти обчислювати з необхідною точністю об'єми тіл, використовуючи основні формули, здійснювати розбивку тіл на простіші тіла.

Обладнання: моделі геометричних тіл, роздавальний матеріал.

Тип уроку: узагальнення й систематизація знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учитель пропонує учням об'єднатися в групи для подальшої роботи на уроці.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ;
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ **Робота в групах**

Учні перевіряють правильність виконання домашнього завдання за відповідями, які вчитель пропонує кожній групі, потім кілька учнів роблять короткі повідомлення.

III. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

 Інтерактивна вправа «Закінчіть речення»

1. Якщо об'єм куба дорівнює 8 см^3 , то площа його поверхні...
2. Якщо площа основи піраміди дорівнює 6 см^2 , а висота — 9 см , то її об'єм дорівнює...
3. Якщо сторони основи правильної чотирикутної призми збільшили в 4 рази, а висоту зменшили в 4 рази, то об'єм призми...
4. Якщо сторони основи правильної n -кутної піраміди збільшили в 5 разів, то її об'єм збільшився в...
5. Якщо r і H — радіус і висота циліндра відповідно, то його об'єм дорівнює...
6. Якщо радіус конуса дорівнює 6 см , а висота — $\frac{2}{\pi} \text{ см}$, то об'єм конуса дорівнює...
7. Якщо радіус кулі дорівнює 3 см , то її об'єм дорівнює...

8. Якщо площа основи конуса дорівнює 27 см^2 , а висота — $\frac{1}{9} \text{ см}$, то його об'єм дорівнює...
9. Для того щоб об'єм циліндра збільшити в 9 разів, не змінюючи його висоти, треба збільшити радіус у...
10. Для того щоб об'єм конуса збільшити в 64 рази, не змінюючи його основи, треба висоту збільшити в...

Відповіді до математичного диктанту

1. 24 см^2 . 2. 18 см^3 . 3. Збільшиться в 4 рази. 4. 25 разів.
5. $\pi r^2 H$. 6. 24 см^3 . 7. $36\pi \text{ см}^3$. 8. 1 см^3 . 9. 3 рази. 10. 64 рази.

Після виконання вправи групи обмінюються роботами для взаємної перевірки й обговорення.

IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Оскільки урок останній перед контрольною роботою, то очевидно, що необхідно узагальнити й систематизувати все, що вивчено із зазначеної теми, і встигнути виконати завдання, які запропоновані групам.

V. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

Робота в групах

Кожна група працює над розв'язанням однієї із задач із подальшою презентацією розв'язання біля дошки.

1. Основа прямої призми — рівнобедрений прямокутний трикутник, катет якого дорівнює $2\sqrt{2} \text{ см}$. Кут між діагоналями рівних бічних граней, проведених з однієї вершини верхньої основи, становить 60° . Обчисліть об'єм призми.
2. Основа піраміди — ромб із кутом α . Усі двогранні кути при ребрах основи дорівнюють φ . Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює H .
3. Паралельно осі циліндра проведено переріз, який відтинає від кола основи дугу, градусна міра якої становить 60° . Площа перерізу дорівнює $12\sqrt{3} \text{ см}^2$, а кут між його діагоналлю й твірною циліндра становить 60° . Знайдіть об'єм циліндра.
4. Переріз конуса, що проходить через його вершину, перетинає основу конуса по хорді, яку видно із центра основи під кутом β . Площина перерізу утворює з висотою конуса кут φ . Знайдіть об'єм конуса, якщо його висота дорівнює H .

5. На відстані $\sqrt{11}$ см від центра кулі проведено переріз. Знайдіть довжину лінії перетину площини перерізу й поверхні кулі, якщо об'єм кулі дорівнює 288π см³.

Розв'язання задач

1. Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — пряма призма (рис. 1), в основі якої лежить трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = BC = 2\sqrt{2}$ см. Тоді грані AA_1C_1C і CC_1B_1B рівні, $\angle AC_1B = 60^\circ$. Оскільки AC і BC рівні, то AC_1 і BC_1 рівні як похилі, що відповідають рівним проєкціям (призма пряма, тоді $CC_1 \perp (ABC)$, BC і AC — проєкції відповідно BC_1 і AC_1 на площину основи). Отже, трикутник AC_1B рівнобедрений, а оскільки $\angle AC_1B = 60^\circ$, то й рівносторонній.

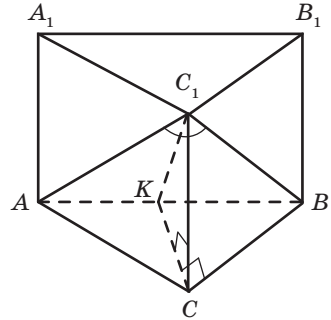


Рис. 1

Об'єм призми: $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, $H = CC_1$, оскільки призма пряма.

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} (2\sqrt{2})^2 = 4 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Проведемо $CK \perp AB$, тоді $C_1K \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри. C_1K — висота в рівносторонньому трикутнику AC_1B , тому $KC_1 = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Із трикутника ACB ($\angle C = 90^\circ$) отримаємо: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ (см). Отже, $KC_1 = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, а $KC = \frac{1}{2} AB = 2$ см (оскільки трикутник ABC рівнобедрений, то висота KC — і медіана в трикутнику ABC).

Із трикутника C_1CK ($\angle C = 90^\circ$) отримаємо: $CC_1 = H = \sqrt{KC_1^2 - KC^2} = \sqrt{12 - 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ (см).

Об'єм призми: $V = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (см³).

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см³.

2. Нехай $SABCD$ — піраміда (рис. 2), в основі якої ромб $ABCD$, $\angle BCD = \alpha$. Усі двогранні кути при ребрах основи рівні, тоді основа висоти SO — точка O — центр кола, вписаного в ромб, тобто O — точка перетину діагоналей ромба.

Проведемо $OK \perp DC$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $SK \perp DC$, кут SKO — лінійний кут двогранного кута при ребрі основи DC , $\angle SKO = \varphi$. Із трикутника SOK ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $OK = H \cdot \text{ctg } \varphi$. Проведемо $BN \perp DC$, тоді $BN \parallel OK$, а оскільки $ABCD$ — ромб, то $BO = OD$ і за теоремою Фалеса $DK = KN$. Отже, OK — середня лінія трикутника BND , тому $BN = 2OK = 2H \text{ ctg } \varphi$.

Із трикутника BNC ($\angle N = 90^\circ$) отримуємо: $BC = \frac{BN}{\sin \alpha} = \frac{2H \text{ ctg } \varphi}{\sin \alpha}$.

$$S_{\text{осн}} = DC \cdot BN = \frac{2H \text{ ctg } \varphi}{\sin \alpha} \cdot 2H \text{ ctg } \varphi = \frac{4H^2 \cdot \text{ctg}^2 \varphi}{\sin \alpha}, \quad V = \frac{4H^3 \cdot \text{ctg}^2 \varphi}{\sin \alpha}.$$

Відповідь: $\frac{4H^3 \cdot \text{ctg}^2 \varphi}{\sin \alpha}$.

3. Дано циліндр із віссю OO_1 (рис. 3). Паралельно осі проведено переріз, як відомо, це прямокутник. Переріз відтинає від кола дугу, що становить 60° , тоді $\angle AOD = 60^\circ$. Трикутник AOD рівнобедрений ($AO = OD$ як радіуси), а оскільки $\angle AOD = 60^\circ$, то цей трикутник є рівностороннім, тоді $AD = OA = OD = R$. $S_{ABCD} = 12\sqrt{3}$ см², тоді $AD \cdot CD = 12\sqrt{3}$ см². $\angle ACD = 60^\circ$. Із трикутника ADC ($\angle D = 90^\circ$) отримуємо: $AD = CD \cdot \text{tg } 60^\circ = CD \cdot \sqrt{3}$.

Отже, $CD \cdot \sqrt{3} \cdot CD = 12\sqrt{3}$; $CD^2 = 12$; $CD = H = 2\sqrt{3}$ см, $AD = R = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см).

Об'єм циліндра: $V = \pi R^2 \cdot H = \pi \cdot 36 \cdot 2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}\pi$ (см³).

Відповідь: $72\sqrt{3}\pi$ см³.

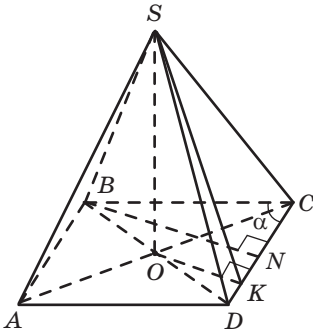


Рис. 2

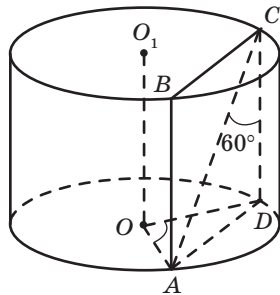


Рис. 3

4. Нехай дано конус із вершиною S і висотою SO (рис. 4). Переріз конуса, що проходить через його вершину, перетинає основу по хорді AB , яку видно із центра основи під кутом β , $\angle AOB = \beta$. Проведемо $OK \perp AB$, тоді $SK \perp AB$ за теоремою про три перпендикуляри. Оскільки $SK \perp AB$ і $OK \perp AB$, то $AB \perp (SOK)$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини, тоді оскільки $AB \subset (SAB)$, то $(SAB) \perp (SKO)$ за ознакою перпендикулярності площин. SK — лінія їх перетину. Проведемо $ON \perp SK$, тоді $ON \perp (SAB)$ за властивістю перпендикулярних площин, а отже, SN — проекція SO на площину SAB , кут OSN — кут між висотою SO і площиною перерізу, $\angle OSN = \varphi$. Об'єм конуса: $V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$, де $R = AO = BO$. Із трикутника SOK ($\angle O = 90^\circ$) отримаємо: $OK = H \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Трикутник AOB рівнобедрений ($AO = OB$ як радіуси), тоді висота OK є і бісектрисою. Із трикутника OKB ($\angle K = 90^\circ$) отримаємо:

$$OB = R = \frac{OK}{\cos \frac{\beta}{2}} = \frac{H \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\cos \frac{\beta}{2}}. \text{ Отже, } V = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{H^2 \operatorname{tg}^2 \varphi}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} \cdot H = \frac{\pi H^3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{3 \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$$

Відповідь: $\frac{\pi H^3 \operatorname{tg}^2 \varphi}{3 \cos^2 \frac{\beta}{2}}.$

5. Нехай у кулі (рис. 5) із центром у точці O проведено переріз. Як відомо, будь-який переріз кулі площиною є колом, його центр — точка O_1 — основа перпендикуляра, проведеного із центра кулі на січну площину, тому OO_1 — відстань від центра кулі до січної площини. $OO_1 = \sqrt{11}$ см. Об'єм кулі: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. За умовою $V = 288\pi \text{ см}^3$. $\frac{4}{3} \pi R^3 = 288\pi$; $R^3 = 216$; $R = 6$ см. $R = OA$. Із трикутника OO_1A ($\angle O_1 = 90^\circ$) отримаємо: $O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1^2} = \sqrt{36 - 11} = \sqrt{25} = 5$ (см). Тоді довжина лінії перетину площини перерізу й поверхні кулі: $c = 2\pi \cdot O_1A = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ (см). Відповідь: 10π см.

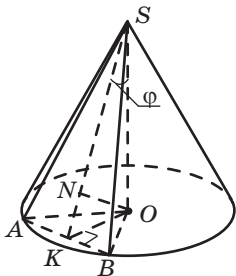


Рис. 4

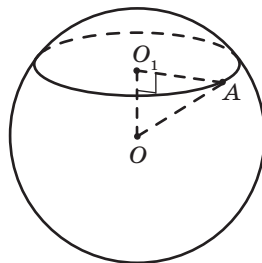


Рис. 5

VI. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальна бесіда за технологією «Мікрофон»

1. Яка із груп, на вашу думку, впоралася з поставленою задачею найкраще?
2. Які задачі викликали найбільші труднощі у вашій групі? У чому причина цього?
3. На які моменти слід звернути увагу під час підготовки до контрольної роботи?

VII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

	[2]: § 36	[3]: § 19
С	№ 1193	№ 319 (1, 2)
Д	№ 1206	№ 319 (3, 5)
В	№ 1216	№ 319 (4)

Індивідуально

У правильній чотирикутній піраміді радіус кола, описаного навколо основи, дорівнює 4 см, а бічні грані утворюють із площиною основи кут 45° . Знайти об'єм піраміди.

Додатковий матеріал

Визначати об'єми деяких тіл люди навчилися давно. Давньоєгипетські пам'ятки, що дійшли до нас, свідчать про те, що понад 3000 років тому люди вміли знаходити об'єм куба, прямокутного паралелепіпеда і піраміди із квадратною основою. Звісно, ні про які теореми не йшлося, оскільки тоді не було геометрії як науки. Єгиптяни знали тільки способи, знайдені дослідним шляхом, які дозволяли їм знаходити об'єми.

Загальний підхід до визначення об'ємів відкрив грецький філософ-математик Демокріт. Теореми про об'єми піраміди й призми довів Евдокс (IV в. до н.е.). Для окремого випадку чотирикутної піраміди із двома бічними гранями, нахиленими під кутом 45° до горизонтальної основи, об'єм був обчислений давніми вавилонянами. Формула об'єму будь-якої піраміди була вперше знайдена Демокрітом. А для доведення того, що піраміда є третьою частиною призми тієї ж висоти й з тією ж основою, потрібно неявно або явно використовувати операцію переходу до межі. Ось чому формулу об'єму піраміди можна строго встановити або античним методом вичерпування, або сучасним методом меж. У найдавніших єгипетських і вавилонських пам'ятках відсутні приклади на обчислення об'єму повної піраміди, але зустрічається обчислення об'єму зрізаної піраміди із квадратною основою, що розглядається як окремий випадок призми.

Об'єми зрізаних пірамід із квадратною основою обчислюються як об'єми паралелепіпедів, замість площі основи яких береться середня арифметична площ основ зрізаної піраміди.

ТЕМА. **КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5.**

Мета уроку: перевірити рівень засвоєння учнями теми «Об'єми геометричних тіл»; розвивати просторову уяву, логічне мислення, пам'ять, увагу, уміння застосовувати отримані знання в стандартних і нестандартних ситуаціях; виховувати наполегливість, принциповість, чесність, уміння працювати самостійно, уміння правильно розраховувати час роботи

Очікувані результати: учні повинні продемонструвати вміння самостійно застосовувати знання, отримані під час вивчення теми «Об'єми геометричних тіл».

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: контроль і корекція знань, умінь і навичок.

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ; МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель звертає увагу учнів на необхідність працювати вдумливо й самостійно, нагадує, що в завданнях 7–9 необхідно дати докладне пояснення розв'язання.

IV. ПЕРЕВІРКА ЗНАТЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК

На цьому етапі уроку можна виконати контрольну роботу, текст якої наведено нижче, або скористатися посібником [5], КР 3 (завдання 1, 2, 4, 6–9).

Контрольна робота № 5

Варіант 1

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Якщо S — площа основи піраміди, H — її висота, то об'єм піраміди обчислюється за формулою:

А $V = \frac{1}{2}SH$ Б $V = SH$ В $V = S + H$ Г $V = \frac{1}{3}SH$

2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 см, 8 см, 7 см.

А 18 см^3 Б 168 см^3 В 56 см^3 Г 84 см^3

3. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її основою є прямокутний трикутник із катетами 5 см і 12 см, а висота дорівнює 4 см.
 А 40 см^3 Б 240 см^3 В 120 см^3 Г 21 см^3
4. Знайдіть об'єм прямої призми, в основі якої лежить трикутник зі сторонами 2 см і 6 см і кутом між ними, що становить 30° , якщо висота призми дорівнює 5 см.
 А $30\sqrt{3} \text{ см}^3$ Б 30 см^3 В 15 см^3 Г $15\sqrt{3} \text{ см}^3$
5. Знайдіть об'єм кулі діаметром 6 см.
 А $9\pi \text{ см}^3$ Б $288\pi \text{ см}^3$ В $108\pi \text{ см}^3$ Г $36\pi \text{ см}^3$
6. Знайдіть об'єм конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см.
 А $72\pi \text{ см}^3$ Б $24\pi \text{ см}^3$ В $12\pi \text{ см}^3$ Г 24 см^3

Достатній рівень (3 бали)

7. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює α , а відстань від центра основи до твірної конуса — a . Знайдіть об'єм конуса.
8. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 6 см, а діагональний переріз є рівностороннім трикутником.

Високий рівень (3 бали)

9. У пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник з основами 5 см і 12 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм цієї призми.

В а р і а н т 2

Початковий і середній рівні (6 балів)

У завданнях 1–6 позначте правильну, на вашу думку, відповідь.

1. Якщо S — площа основи призми, H — її висота, то об'єм призми обчислюється за формулою:
 А $V = \frac{1}{3}SH$ Б $V = \frac{1}{2}SH$ В $V = SH$ Г $V = S + H$
2. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда з вимірами 2 см, 6 см, 5 см.
 А 13 см^3 Б 60 см^3 В 30 см^3 Г 180 см^3
3. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її основою є прямокутний трикутник зі сторонами 5 см і 12 см, а висота дорівнює 4 см.
 А 21 см^3 Б 120 см^3 В 40 см^3 Г 80 см^3

4. Знайдіть об'єм прямої призми, в основі якої лежить трикутник зі сторонами 8 см і 3 см і кутом між ними, що становить 150° , якщо висота призми дорівнює 20 см.

А 120 см^3 Б $120\sqrt{3} \text{ см}^3$ В 240 см^3 Г $240\sqrt{3} \text{ см}^3$

5. Знайдіть об'єм кулі діаметром 18 см.

А $2826\pi \text{ см}^3$ Б $36\pi \text{ см}^3$ В $972\pi \text{ см}^3$ Г 288 см^3

6. Знайдіть об'єм конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник зі стороною $12\sqrt{3}$ см.

А $162\pi \text{ см}^3$ Б $648\pi \text{ см}^3$ В $972\pi \text{ см}^3$ Г 324 см^3

Достатній рівень (3 бали)

7. Кут при основі осьового перерізу конуса дорівнює β , а відстань від центра основи до твірної конуса — a . Знайдіть об'єм конуса.
8. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 18 см, а діагональний переріз є прямокутним трикутником.

Високий рівень (3 бали)

9. У пряму призму, основою якої є прямокутний трикутник із гіпотенузою 17 см і катетом 15 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм цієї призми.

Відповіді та розв'язання до контрольної роботи

Варіант 1. 1. Г. 2. Б. 3. А. 4. В. 5. Г. 6. Б.

7. Нехай осьовий переріз даного конуса (рис. 1) — трикутник SAB , SO — висота конуса, $\angle ASB = \alpha$, $AS = BS$ — твірні конуса.

Оскільки трикутник SAB рівнобедрений з основою AB , то

$$\angle A = \angle B = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Проведемо $OM \perp SA$, $OM = a$.

Із трикутника AMO ($\angle AMO = 90^\circ$) отримаємо: $AO = \frac{OM}{\sin \angle A} = \frac{a}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}$.

$AO = OB$ — радіус основи конуса.

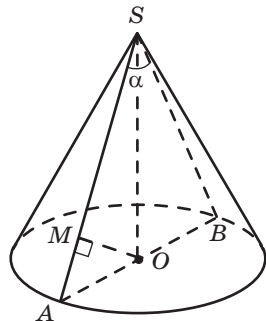


Рис. 1

Із трикутника SOA ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо:

$$SO = AO \operatorname{tg} \angle A = \frac{a \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Отже, } V_{\kappa} = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi \frac{a^2}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\pi a^3}{3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

8. Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда (рис. 2), основою якої є квадрат $ABCD$. $AB = BC = CD = AD = 6$ см. Тоді $S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = AB^2 = 36 \text{ см}^2$; $AC = 6\sqrt{2}$ см — діагональ квадрата. Трикутник SAC — діагональний переріз піраміди — рівносторонній трикутник $AC = SA = SC = 6\sqrt{2}$ см. SO — висота трикутника SAC і висота піраміди; $SO = \frac{AC\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{6}}{2} = 3\sqrt{6}$ (см).

$$V_{\text{пір}} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 3\sqrt{6} = 36\sqrt{6} \text{ (см}^3\text{)}. \text{ Відповідь: } 36\sqrt{6} \text{ см}^3.$$

9. Нехай у пряму призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3) вписано кулю, тоді діаметр кулі дорівнює висоті призми, а радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в прямокутний трикутник ABC . Основа призми — трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 5$ см, $BC = 12$ см, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$ (см).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ (см}^2\text{)}; r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{5 + 12 - 13}{2} = 2 \text{ см —}$$

радіус кола, вписаного в трикутник ABC . Тоді радіус кулі дорівнює 2 см, $H = 4$ см — висота призми. $V_{\text{п}} = S_{\text{осн}} \cdot H = 30 \cdot 4 = 120 \text{ (см}^3\text{)}$.
Відповідь: 120 см^3 .

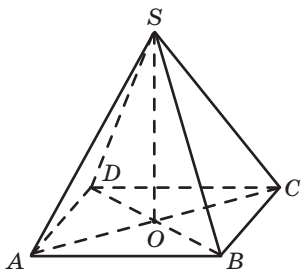


Рис. 2

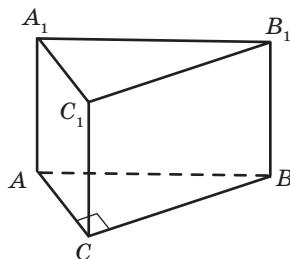


Рис. 3

Варіант 2. 1. В. 2. Б. 3. Г. 4. А. 5. В. 6. Б.

7. Нехай осьовий переріз даного конуса (рис. 4) — трикутник SAB ; SO — висота конуса, $\angle SAB = \angle SBA = \beta$. Нехай точка M — середина твірної SA . Тоді $OM = a$. Із трикутника SOA ($\angle SOA = 90^\circ$) отримаємо: OM — медіана, проведена до гіпотенузи. Отже, $SA = 2OM = 2a$; $AO = SA \cos \angle SAB = 2a \cos \beta$; $SO = SA \sin \angle SAB = 2a \sin \beta$; $AO = OB$ — радіус основи конуса.

$$\text{Отже, } V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \pi \cdot AO^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \pi 4a^2 \cos^2 \beta \cdot 2a \sin \beta = \frac{8}{3} \pi a^3 \cos^2 \beta \sin \beta.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{8}{3} \pi a^3 \cos^2 \beta \sin \beta.$$

8. Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда (рис. 5), в основі якої лежить квадрат $ABCD$. $AB = BC = CD = AD = 18$ см. Тоді $S_{\text{осн}} = S_{ABCD} = AB^2 = 18^2 = 324$ (см²); $AC = 18\sqrt{2}$ см — діагональ квадрата. Трикутник SAC — діагональний переріз піраміди, $\angle ASC = 90^\circ$, $SA = SC$ — ребра піраміди. SO — висота трикутника SAC і висота піраміди; $SO = \frac{1}{2} AC = 9\sqrt{2}$ см. SO — висота і медіана, проведена до основи прямокутного рівнобедреного трикутника SAC . $V_{\text{піп}} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 324 \cdot 9\sqrt{2} = 972\sqrt{2}$ (см³).

$$\text{Відповідь: } 972\sqrt{2} \text{ см}^3.$$

9. Нехай у пряму призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 6) вписано кулю, тоді діаметр кулі дорівнює висоті призми, а радіус кулі дорівнює радіусу кола, вписаного в трикутник ABC . Основа призми — трикутник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $AB = 17$ см, $AC = 15$ см, $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$ (см).

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 15}{2} = 60 \text{ (см}^2\text{)}; r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{8 + 15 - 17}{2} = 3 \text{ (см)} —$$

радіус кола, вписаного в трикутник ABC . Тоді радіус кулі дорівнює 3 см, $H = 6$ см — висота призми. $V_{\text{п}} = S_{\text{осн}} \cdot H = 60 \cdot 6 = 360$ (см³).

$$\text{Відповідь: } 360 \text{ см}^3.$$

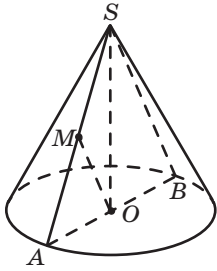


Рис. 4

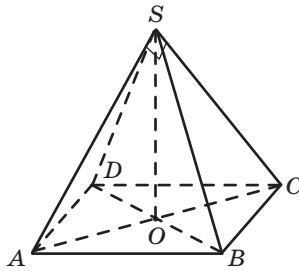


Рис. 5

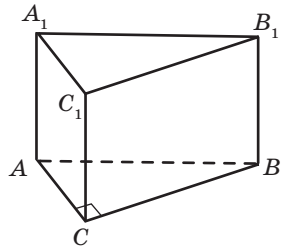


Рис. 6

V. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Учитель пропонує учням ознайомитися з відповідями до контрольної роботи й відповідає на запитання, що виникли в процесі її виконання.

УРОК № 46* (1)

ТЕМА. ОБ'ЄМИ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ І ПЛОЩІ ЇХНІХ ПОВЕРХОНЬ.

Мета уроку: узагальнити й систематизувати знання, уміння й навички учнів розв'язувати задачі на знаходження об'ємів многогранників і тіл обертання; розвивати логічне мислення, просторову уяву; формувати здатність до узагальнення й систематизації вивчених раніше фактів; виховувати позитивне ставлення до навчання, інтерес до математики; удосконалювати навички самоконтролю, бажання працювати в групі, культуру спілкування.

Очікувані результати: учні повинні знати формули для обчислення об'ємів деяких многогранників і тіл обертання та формули площ поверхонь цих тіл; уміти застосовувати вивчені формули для обчислення об'ємів і площ поверхонь запропонованих геометричних тіл.

Обладнання: підручник, роздавальний матеріал.

Тип уроку: прес-конференція (узагальнення й систематизація знань).

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ; АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Учні здають зошити з домашнім завданням на перевірку.

Бліц-інтерв'ю

1. Як обчислити площу трикутника за відомою стороною й високою, проведеною до неї?
2. За якою формулою обчислюється площа трапеції?
3. Як визначити площу правильного шестикутника?
4. Виразьте площу круга через його радіус; через діаметр.

**III. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

Слово вчителя

Відомий математик Р. Беллман сказав, що математик може вважати свою проблему вирішеною лише тоді, коли усвідомлює суть оптимального підходу до її розв'язання. Тісні зв'язки математики з усіма сферами нашого побуту, із природою дозволяють нам за допомогою математики оптимально розв'язувати не тільки математичні, а й життєві проблеми.

Як гласить народна мудрість, кожна людина має посадити дерево, побудувати будинок, виховати дитину. Чи посадили ви вже дерево? А може, брали участь у зведенні будинку? Ні? Підготуватися до цього можна вже сьогодні.

**IV. ПРЕС-КОНФЕРЕНЦІЯ
(СПРИЙНЯТТЯ Й УСВІДОМЛЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ)**

Учитель пояснює учням, у якій формі проходитиме урок, і просить об'єднатися в групи, а потім вручає групам рисунки із зображенням циліндра, кулі, конуса, піраміди або призми. Кожна група повинна записати на аркуші паперу формулу для обчислення об'єму та площі поверхні зображеної фігури. Після завершення роботи представники груп вивішують на дошці свій рисунок і розповідають про геометричну фігуру.

Бесіда за технологією «Мікрофон»

1. Із яких фігур складається будинок? (Відповідь: шестикутна правильна призма, півсфера, конус.)
2. Що незвичайного ви хотіли б мати в будинку? (Відповідь: стіл зі стільницею, що має форму циліндра, заввишки 4 см.)

**V. ПРЕЗЕНТАЦІЯ ПРОЕКТУ БУДИНКУ
(УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК)**

Робота в групах

Завдання для роботи груп

1. Необхідно обчислити радіус стола, за яким повинні поміститися 18 гостей, при цьому на кожного гостя має припадати 0,6 м поверхні стільниці.

2. У будинку передбачений акваріум у формі прямої трикутної призми, у якої основою є трикутник зі сторонами 0,2 м, 0,3 м, 0,4 м і бічним ребром 0,5 м. Обчислити об'єм води в акваріумі, якщо вода не буде доходити до верху акваріума на 0,15 м.
3. Обчислити, скільки знадобиться квадратних метрів скла для виготовлення такого акваріума.
4. У дворі будинку слід побудувати водогінний канал. Обчислити його пропускну здатність (у кубічних метрах), якщо його переріз — рівнобедрений трикутник, основа якого становить 1,4 м, висота — 1,2 м, а швидкість води дорівнює 2 м/с.
5. У дворі діятиме фонтанчик. Вода, налита в конічну посудину заввишки 0,18 м і з діаметром основи 0,24 м, переливається в циліндричну посудину, діаметр основи якої становить 0,1 м. Наскільки високо розташований рівень води в посудині?
6. Для опалення приміщення буде використано паровий котел, що має насос, який складається із двох водяних циліндрів діаметром 80 мм. Хід поршня циліндрів становить 150 мм. Обчислити продуктивність насоса за годину, якщо кожен поршень робить 50 робочих ходів за хвилину.
7. Двір треба звільнити від купи щебеню, що має конічну форму. Радіус основи конуса дорівнює 2 м, а твірна — 3,5 м. Знайти об'єм купи щебеню і суму, яку необхідно заплатити за вивіз щебеню, якщо за 1 м^3 сміття необхідно заплатити 100 грн.

VI. РОЗРОБКА ВАРТОСТІ ПРОЕКТУ (ЗАСТОСУВАННЯ ЗНАНЬ, УМІНЬ І НАВИЧОК)

Робота в групах

Група проектувальників

1. Обчислити об'єм стін і площу вибраного об'єкта. Оскільки основою правильної шестикутної призми є правильний шестикутник, то:
 - а) зовнішня частина — шестикутник, що має сторону 5,2 м, тоді $S_{\text{осн}} \approx 93,6 \text{ м}^2$ і $V_{\text{зовн}} = 93,6 \cdot 4 \approx 374,4 \text{ м}^3$ (тобто висота будинку 4 м);
 - б) внутрішня частина — шестикутник, що має сторону 4,9 м. $S_{\text{осн}} = 83,79 \text{ м}^2$. $V_{\text{внутр}} = 83,79 \cdot 4 \approx 335,16 (\text{м}^3)$.
 $V = V_{\text{зовн}} - V_{\text{внутр}} = 39,24 \text{ м}^3$ — об'єм стіни будинку.
2. Знайти площу поверхні даху. Дах матиме форму півсфери радіусом 4 м. Знайдемо площу поверхні купола: $S = \frac{1}{2} S_{\text{сф}} = 2\pi R^2 \approx 6,28 \cdot 16 = 100,48 (\text{м}^2)$.

Шпиль купола має форму конуса з радіусом 2,2 м і твірною 1 м.
Площа поверхні шпиля: $S = \pi Rl = 3,14 \cdot 2,2 \cdot 1 = 6,91 \text{ (м}^2\text{)}$.

3. Обчислити об'єм стільниці.

Об'єм стільниці: $V = S_{\text{осн}} \cdot H$, $H = 4 \text{ см} = 0,04 \text{ м}$.

$$R = \frac{0,6 \cdot 18}{2\pi} \approx 1,72 \text{ (м)}. \quad S_{\text{осн}} = \pi R^2 = 3,14 \cdot 2,96 \approx 9,29 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$V \approx 9,29 \cdot 0,04 = 0,25 \text{ (м}^3\text{)}.$$

4. Знайти об'єм акваріума.

$$S_{\text{біч}} = P_{\text{осн}} \cdot H = (0,2 + 0,3 + 0,4) \cdot 0,5 = 0,9 \cdot 0,5 = 0,45 \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{\text{осн}} = \sqrt{0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,6 \cdot 0,5} \approx 0,43 \text{ (м}^2\text{)}; \quad S_{\text{повн}} = 0,45 + 0,43 = 0,88 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Враховуючи відходи, треба купити 1 м^2 скла.

Знайти об'єм води, яку потрібно залити в акваріум, з огляду на те, що $h = H - 0,15 = 0,5 - 0,15 = 0,35 \text{ (м)}$.

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = 0,43 \cdot 0,35 = 0,1505 \text{ (м}^3\text{)} = 150,5 \text{ (дм}^3\text{)} \approx 151 \text{ л}.$$

5. Обчислити пропускну здатність водогінного каналу.

$V = S_{\text{осн}} \cdot l$, де l — довжина бічного ребра. $l = vt$, $t = 1 \text{ ч} = 3600 \text{ с}$.

$$S_{\text{осн}} = 0,5 \cdot 1,4 \cdot 1,2 = 0,84 \text{ (м}^2\text{)}; \quad V = sv t = 0,84 \cdot 2 \cdot 3600 = 6048 \text{ (м}^3\text{)}.$$

6. Обчислити рівень води у фонтанчику.

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} \cdot h; \quad V_{\text{цил}} = \frac{\pi D^2}{4} H. \quad \text{Оскільки об'єм рідини в посудинах}$$

однаковий, то $V_{\text{к}} = V_{\text{цил}}$; $\frac{1}{3} \frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi D^2}{4} H$.

$$H = \frac{d^2 h}{3D^2} = \frac{0,24^2 \cdot 0,18}{3 \cdot 0,1^2} = 0,3456 \approx 0,35 \text{ (м)}.$$

7. Знайти погодинну продуктивність насоса.

Нехай $n = 2$ — число циліндрів, $N = 50$ — число робочих ходів.

$$1 \text{ год} = 60 \text{ хв}. \quad V_{\text{цил}} = \frac{\pi D^2}{4} H \quad \text{— об'єм одного циліндра.}$$

Погодинна продуктивність насоса

$$Q = n V_{\text{цил}} \cdot N \cdot 60 = n \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot H \cdot N \cdot 60 \approx 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 80^2}{4} \cdot 150 \cdot 50 \cdot 60 \approx$$

$$\approx 2 \cdot \frac{3,14 \cdot 80^2}{4} \cdot 150 \cdot 50 \cdot 60 \approx 4521,6 \cdot 10^6 \text{ (мм}^3\text{)} \approx 4,5 \text{ (м}^3\text{)}.$$

8. Знайти об'єм купи щебеню.

$$H = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5 \text{ (м)} \quad \text{— висота конуса;}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{1}{3} 3,14 \cdot 2^2 \cdot 1,5 \approx 6,28 \text{ (м}^3\text{)} \approx 6,3 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Група економістів

- Обчислити вартість цегляної стіни.
Відомо, що цеглина має виміри 0,3 м, 0,2 м і 0,1 м. Отже, $V_{\text{цегл}} = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006$ (м³). Для стіни з об'ємом 39,24 м³ потрібно $39,24 : 0,006 \approx 6540$ (шт. цеглин).
Вартість 1 тисячі цеглин становить 600 грн. Отже, доведеться заплатити $600 \cdot 6,54 = 3840$ (грн).
- Обчислити вартість покриття даху і шпиль.
Для покриття даху необхідний матеріал, вартість 1 м² якого становить 50 грн. Отже, маємо: $50 \cdot 100,48 \approx 5024$ (грн).
Для покриття шпиль необхідний матеріал, вартість 1 м² якого становить 30 грн. Отже, маємо: $30 \cdot 6,91 = 207,3$ (грн).
- Обчислити вартість стільниці.
Для стільниці знадобиться: $1,05 \cdot 220 \approx 231$ (грн).
- Обчислити вартість скла.
1 м² скла для акваріума коштує 35 грн.
- Обчислити вартість вивозу будівельного сміття.
Щоб вивезти 1 м³ щебеню, потрібно 200 грн. Отже, маємо: $6,3 \text{ м}^3 \cdot 200 = 1260$ грн.
- Обчислити загальну вартість проекту.

	Вартість, грн
Цегла для стіни	3840
Покриття купола	5024
Покриття шпиль	207,3
Стільниця	231
Скло	35
Вивіз сміття	1260
Разом	$\approx 10\ 597$

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Обговорення результатів

- Що не було враховано? (Відповідь: вартість роботи за кладку цегли, фундаменту, вікон і дверей, роботи спеціалістів, робіт із внутрішнього оздоблення, фарби, клею, шпалер.)
- Чи готові ви до зведення будинку? Яку б оцінку ви поставили за урок своїй групі? Чому?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Підготувати й обчислити проект будівлі корпусу для старшої школи.

ТЕМА. **РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОГО ХАРАКТЕРУ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ФОРМУЛ ОБ'ЄМІВ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ.**

Мета уроку: систематизувати й узагальнити знання учнів із теми «Об'єми геометричних тіл»; удосконалити вміння й навички обчислення за формулами об'ємів геометричних тіл; розвивати креативність, логічне мислення, просторову уяву; виховувати культуру спілкування; продемонструвати прикладне значення математики.

Очікувані результати: учні повинні знати формули об'ємів геометричних тіл; уміти складати математичну модель прикладної задачі й розв'язувати її.

Обладнання: роздавальний матеріал.

Тип уроку: відкритий урок (узагальнення й систематизація знань).

Хід уроку

I. ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ ЕТАП

Учні об'єднуються в гетерогенні групи для роботи на уроці.

II. ПЕРЕВІРКА ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

Учитель відповідає на запитання, які виникли в учнів у процесі виконання домашнього завдання.

III. АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАТЬ

Бліц-інтерв'ю

1. Що називають математичною моделлю?
2. Перелічіть кроки розв'язування задачі в будь-якій галузі із застосуванням математики.
3. Які задачі називають прикладними?

**IV. ФОРМУЛЮВАННЯ ТЕМИ, МЕТИ Й ЗАВДАНЬ УРОКУ;
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ**

Слово вчителя

Німецький філософ І. Кант сказав, що геометрія закладає в основу чисте споглядання простору. Але ми не просто споглядаємо, а й переробляємо навколишній світ, що зробити без математики було б неможливо.

V. ПОВТОРЕННЯ Й АНАЛІЗ ФАКТІВ

Теоретична розминка

Учитель показує рисунок із зображенням многогранника або тіла обертання, а група називає формулу для обчислення його об'єму.

VI. УДОСКОНАЛЕННЯ ВМІНЬ І НАВИЧОК

☑ Робота в малих групах

Учні розв'язують задачі прикладного характеру.

1. Три латунні куби з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавили в один куб. Яким є ребро цього куба?

Розв'язання. За властивістю об'єму об'єм нового куба дорівнює сумі об'ємів трьох даних кубів. Нехай V_1 , V_2 і V_3 — об'єми першого, другого і третього кубів відповідно. Тоді $V = V_1 + V_2 + V_3$. Оскільки $V_1 = 3^3$; $V_2 = 4^3$; $V_3 = 5^3$, то $V = 27 + 64 + 125 = 216$; оскільки

$V = a^3$, то $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{216} = 6$ (см). *Відповідь:* 6 см.

2. Зовнішнє ребро металевого куба дорівнює 10,2 см, маса куба становить 514,15 г. Товщина стінок дорівнює 0,1 см. Знайдіть густину металу, з якого виготовлено куб.

Розв'язання. Нехай зовнішнє ребро куба a , внутрішнє — b . За умовою задачі $b = a - 2 \cdot 0,1 = 10,2 - 0,2 = 10$ см. Об'єм металу дорівнює різниці об'ємів $V_1 = a^3$ і $V_2 = b^3$, отже, $V = 10,2^3 - 10^3$. Маса металу

$m = 514,5$ г. Густина металу: $\rho = \frac{m}{V} = \frac{514,15}{10,2^3 - 10^3} \approx 8,4$ (г/см³).

Відповідь: 8,4 г/см³.

3. Резервуар для води ємністю 10 м³ необхідно встановити на майданчику розмірами 2,5 × 1,75 м. Майданчик є дном резервуара. Якою має бути висота резервуара?

Розв'язання. Оскільки $V = SH$, то $H = \frac{V}{S}$.

Маємо: $S = 2,5 \cdot 1,75 = 4,375$ (м²) і $V = 10$ м³.

Звідси $H = \frac{V}{S} = \frac{10}{4,375} \approx 2,29$ (м). *Відповідь:* 2,29 м.

4. Чавунна труба має квадратний переріз. Зовнішній розмір труби 25 см, товщина стінок — 3 см. Яка маса одного лінійного метра труби? Густина чавуну $\rho = 7,3$ г/см³.

Розв'язання. Нехай a — зовнішній розмір труби. Знаходимо внутрішній розмір труби b ; $b = 25 - 2 \cdot 3 = 25 - 6 = 19$ (см).

Об'єм металу одного лінійного метра труби дорівнює різниці об'ємів $V_1 = a^2 \cdot 1 = a^2 = 25^2 = 625$ (см³), де a — ширина зовнішньої частини труби; $V_2 = b^2 \cdot 1 = 19^2 = 361$ (см³). $m = \rho V$, де $V = V_1 - V_2 = 625 - 361 = 264$ (см³). Тоді $m = 7,3 \cdot 264 = 192,72$ (кг).

Відповідь: ≈ 193 кг.

5. Переріз залізничного насипу має форму трапеції. Нижня основа трапеції дорівнює 14 м, верхня — 8 м, а висота — 3,2 м. Скільки кубометрів землі припадає на 1 км насипу?

Розв'язання. Насип являє собою пряму призму з основою у вигляді трапеції та бічним ребром 1 км = 1000 м.

$$S_{\text{трап}} = \frac{14+8}{2} \cdot 3,2 = 35,2 \text{ (м}^2\text{)}; V = SH = 35,2 \cdot 1000 = 35\,200 \text{ (м}^3\text{)}.$$

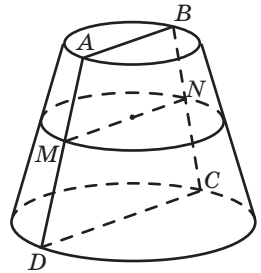
Відповідь: 35 200 м³.

6. Кінці соснової колоди мають діаметри 42 см і 25 см. Довжина колоди 15,5 м. Якої похибки (у відсотках) припускаються під час обчислення об'єму колоди, тобто в разі множення довжини на площу поперечного перерізу посередині колоди?

Розв'язання. В осьовому перерізі зрізаного конуса — рівнобедренна трапеція $ABCD$ (см. рисунок), MN — її середня лінія.

$$MN = \frac{AB+DC}{2} = \frac{0,25+0,42}{2} = 0,335 \text{ (м)}.$$

$$\begin{aligned} \text{Об'єм колоди: } V &= \frac{1}{3}\pi h = (R^2 + Rr + r^2) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot 3,14 \cdot 15,5(0,21^2 + 0,21 \cdot 0,125 + 0,125^2) \approx \\ &\approx 1,395 \text{ (м}^3\text{)}. \end{aligned}$$



Об'єм колоди, який отримаємо, помноживши довжину на площу поперечного перерізу посередині колоди:

$$V_1 = \pi \frac{D^2}{4} \cdot h = 3,14 \cdot \frac{0,335^2}{4} \cdot 15,5 \approx 1,365 \text{ (м}^3\text{)}. \text{ Знаходимо похибку:}$$

$$\frac{V - V_1}{V} \cdot 100 \% = \frac{1,395 - 1,365}{1,395} \cdot 100 \% \approx 2,15 \% \approx 2 \%. \text{ Відповідь: } \approx 2 \%.$$

7. Із дерев'яного циліндра, висота якого дорівнює діаметру основи, виточили кулю найбільшого діаметра. Скільки відсотків матеріалу сточено?

Розв'язання. У цьому випадку ми маємо кулю, вписану в циліндр. Отже, радіус кулі дорівнює радіусу циліндра, а діаметр кулі дорівнює висоті циліндра.

$V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$; $V_{\text{цил}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$. V — об'єм сточеного матеріалу. $V = V_{\text{цил}} - V_{\text{кулі}}$. Знаходимо відсоток сточеного матеріалу:

$$\begin{aligned} \frac{V_{\text{цил}} - V_{\text{кулі}}}{V_{\text{цил}}} \cdot 100 \% &= \left(1 - \frac{V_{\text{кулі}}}{V_{\text{цил}}}\right) \cdot 100 \% = \left(1 - \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{2\pi R^3}\right) \cdot 100 \% = \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot 100 \% = 33\frac{1}{3} \%. \text{ Відповідь: } 33\frac{1}{3} \%. \end{aligned}$$

VII. ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ

Фронтальне опитування за технологією «Мікрофон»

1. Що спільного у розв'язанні всіх задач?
2. Чи досягнуто мети уроку?
3. Як ви оціните роботу своєї групи?

VIII. ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Дібрати три задачі прикладного характеру, які слід розв'язати з використанням формул об'ємів геометричних тіл.

РЕЗЕРВНИЙ ЧАС І ПОВТОРЕННЯ

УРОКИ № 48–51

Резерв навчального часу вчитель може використовувати на свій розсуд: для повторення окремих тем курсу, які важко давалися учням, для розв'язування задач під час підготовки до ДПА та ЗНО.

ДОДАТОК

ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДО ПОСІБНИКА [4]

СР 1

До уроку 4

B-1. 1. Б. 2. $(2; +\infty)$. 3. $2\frac{1}{25}$. 4. 3. 5. 3.

B-2. 1. А. 2. $(2; +\infty)$. 3. 79. 4. -2. 5. -2.

СР 2

До уроку 5

B-1. 1. -3. 2. $7^{\log_7 2}$. 3. -2. 4. 3. 5. $n+2$.

B-2. 1. $\frac{1}{2}$. 2. $5^{\log_5 3}$. 3. -2. 4. 3. 5. $n-3$.

СР 3

До уроку 7

B-1. 1. $(-2; +\infty)$. 2. а) $\log_5 3 < \log_5 \sqrt{12}$; б) $\log_8 2 < 3$.

4. Див. рис. 1.

B-2. 1. $(1; +\infty)$. 2. а) $\log_{\frac{2}{3}} \sqrt{7} > \log_{\frac{2}{3}} 5$; б) $\log_3 27 < 5$.

4. Див. рис. 2.

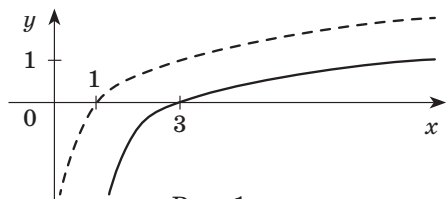


Рис. 1

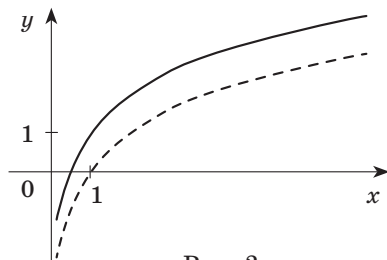


Рис. 2

СР 4

До уроку 8

B-1. 1. а) 3; б) 2. 2. -2; 3. 3. 1. 4. 1.

B-2. 1. а) 3; б) 3. 2. 2; 3. 3. 2. 4. 1.

СР 5

B-1. 1. а) $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; -2]$. 2. -10. 3. $\left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. 4. 4.

B-2. 1. а) $\left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$; б) $\left[-\frac{4}{5}; +\infty\right)$. 2. 12. 3. $(-\infty; -3]$. 4. 4.

СР 6

До уроку 10

B-1. 1. 1. 2. $(-2; 1)$. 3. 3 4. $(-3; 2]$. 5. $3\frac{1}{81}$.

B-2. 1. 7. 2. $(3; 7)$. 3. 2. 4. $(-2; 1]$. 5. $2\frac{1}{64}$.

КР 1

До уроку 12

B-1. 1. Б. 2. Б. 3. -2. 4. $(-\infty; \frac{1}{2}]$. 5. Див. рис. 3. 6. 0. 7. 2.

B-2. 1. Г. 2. Б. 3. -3. 4. $[-1; +\infty)$. 5. Див. рис. 4. 6. 0. 7. 2.

B-3. 1. В. 2. В. 3. -1. 4. $[-2\frac{2}{3}; +\infty)$. 5. Див. рис. 5. 6. 4. 7. 2.

B-4. 1. Б. 2. В. 3. -4. 4. $[\frac{4}{5}; +\infty)$. 5. Див. рис. 6. 6. ± 1 . 7. 2.

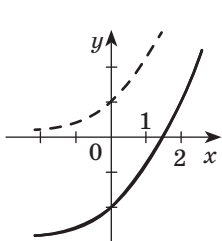


Рис. 3

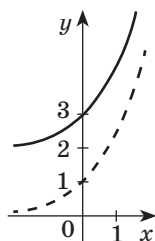


Рис. 4

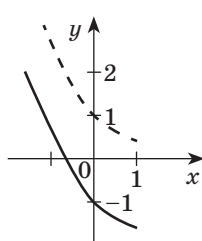


Рис. 5

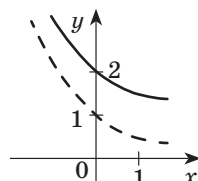


Рис. 6

КР 2

B-1. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. Г. 5. 3. 6. $(1; 2) \cup (3; 4)$.

7. $y = \log_5(5 \log_{x-2}(x-2)) = 1$ (рис. 7).

B-2. 1. Б. 2. Г. 3. Г. 4. Б. 5. 2. 6. $(1; 2) \cup (8; 9)$.

7. $y = \log_3(9 \log_{x-4}(x-4)) = 2$ (рис. 8).

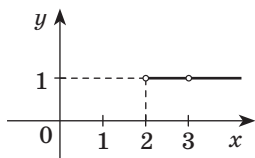


Рис. 7

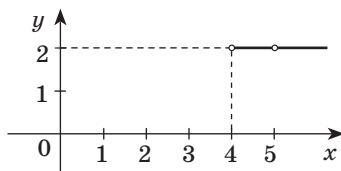


Рис. 8

В-3. 1. Б. 2. А. 3. Б. 4. В. 5. $\sqrt[4]{2}$. 6. $(-1;1) \cup (3;5)$.

$$7. y = \log_2(x-2) \cdot \frac{1}{\log_2(x-2)} = 1 \text{ (рис. 9).}$$

В-4. 1. А. 2. Г. 3. А. 4. Б. 5. 2. 6. (1;6).

$$7. y = \log_5(x-3) \cdot \frac{1}{\log_5(x-3)} = 1 \text{ (рис. 10).}$$

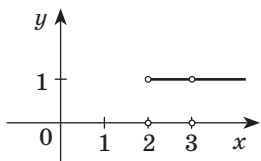


Рис. 9

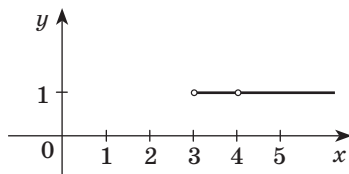


Рис. 10

СР 7

До уроку 15

В-1. 1. -12. 2. 20. 3. 0; -1. 4. $f'(-5) = f'(3) = 0$; $f'(7)$ не існує.

В-2. 1. 24. 2. 12. 3. $\sqrt{3}$; 0. 4. $f'(-2) = f'(3) = 0$; $f'(-4)$, $f'(0)$ не існує.

СР 8

До уроку 17

В-1. 1. а) $y' = 6x^2 - 6x$; б) $y' = 5x^4 - 2x$; в) $y' = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2}$. 2. $-1\frac{1}{4}$.
3. 1.

В-2. 1. а) $y' = 9x^2 + 16x$; б) $y' = 5x^4 - 3x^2$; в) $y' = \frac{x^2 + 2x + 2}{(x+1)^2}$. 2. $3\frac{1}{3}$.
3. 1.

СР 10

До уроку 25

В-1. 1. $x_{\max} = -1$; $y_{\max} = -6$. $x_{\min} = 1$; $y_{\min} = -10$. 2. $y \downarrow$ при $x \in (-\infty; -1,5)$; $y \uparrow$ при $x \in (1,5; +\infty)$. 3. $y_{\text{найм}} = 3$; $y_{\text{найб}} = 28$.

В-2. 1. $x_{\max} = -2$; $y_{\max} = 19$. $x_{\min} = 2$; $y_{\min} = -13$. 2. $y \downarrow$ при $x \in (-\infty; -1,5)$; $y \uparrow$ при $x \in (-1,5; +\infty)$. 3. $y_{\text{найб}} = 16$; $y_{\text{найм}} = 6$.

КР 3

До уроку 26

В-1. 1. Г. 2. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 3. 6. 4. -3. 5. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

6. $y_{\text{дор}} = 7x - 9$. 7. $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{3}$.

В-2. 1. В. 2. $\frac{1}{6}$. 3. 4. 4. 2. 5. $(-\infty; 0) \cup (0; \frac{4}{3})$.

6. $y_{\text{дор}} = -7x - 4$. 7. $\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$.

B-3. 1. А. 2. $1\frac{1}{4}$. 3. 2. 4. -3. 5. $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup (0; +\infty)$.

6. $y_{\text{дог}} = 16x - 31$. 7. $\frac{7\pi}{12}; \frac{11\pi}{12}$.

B-4. 1. В. 2. 1,5. 3. 4. 4. 4. 5. $(-\infty; 2)$. 6. $y_{\text{дог}} = -8x - 9$.

7. $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$.

КР 4

B-1. 1. Б. 2. Б. 3. $y \uparrow$ при $x \in (-3; 0); (4; 9]$.

4. $(-2; 0) \cup (1; +\infty)$. 5. 1. 6. $a = \pm 2$. 7. 8.

B-2. 1. Б. 2. В. 3. $y \downarrow$ при $x \in (-8; -3); (0; 4)$.

4. $(-1; 0); (4; +\infty)$. 5. 2. 6. $a = \pm 3$. 7. 3.

B-3. 1. В. 2. В. 3. $y \uparrow$ при $x \in (-8; -3); (0; 4)$.

4. $(-\infty; -1); (1; +\infty)$. 5. 2. 6. $a = \pm 2$. 7. 5.

B-4. 1. Г. 2. А. 3. $y \downarrow$ при $x \in (-3; 0); (4; 9]$.

4. $(-\infty; 0); (2; +\infty)$. 5. 2. 6. $a = \pm 3$. 7. 5.

СР 11

До уроку 29

B-1. 1. $F'(x) = 3x^3 - 6x = f(x)$. 2. а) $F(x) = 8\sqrt{x} + \frac{1}{5}x^5 + C$;

б) $F(x) = 9\sin\left(\frac{x}{3} + 2\right) + C$. 3. $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x + 4$.

B-2. 1. $F'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 2 = f(x)$. 2. а) $F(x) = 10\sqrt{x} - \frac{x^4}{4} + C$;

б) $F(x) = -16\cos\left(\frac{x}{4} - 1\right) + C$. 3. $F(x) = x^3 - x^2 + 5x - 7$.

СР 12

До уроку 31

B-1. 1. $24\frac{1}{6}$. 2. а) 20; б) 0. 3. 48.

B-2. 1. $-4\frac{1}{2}$. 2. а) 21; б) 2. 3. 16.

СР 13

До уроку 33

B-1. 1. $2\frac{1}{3}$. 2. 4,5. B-2. 1. 1. 2. $10\frac{2}{3}$.

КР 5

До уроку 36

B-1. 1. В. 2. В. 3. 8. 4. $F(x) = -\cos x + 1,5$. 5. а) $F(x) = -5\text{ctg}x + C$; б) $F(x) = \frac{x^4}{4} + \sin x + C$. 6. $-\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 7. $2\frac{1}{3}$.

B-2. 1. В. 2. В. 3. 19. 4. $F(x) = \sin x + 0,5$.

5. а) $F(x) = 3\text{tg}x + C$; б) $F(x) = \frac{x^3}{3} + \cos x + C$. 6. $3\sqrt{2}$. 7. $1\frac{1}{3}$.

B-3. 1. Г. 2. Г. 3. 12. 4. $F(x) = -2\cos x + 2$.

5. а) $F(x) = -4\text{ctg}x + C$; б) $F(x) = x^4 + \cos x + C$. 6. 3. 7. $2\frac{5}{6}$.

B-4. 1. Г. 2. В. 3. 36. 4. $F(x) = 2\sin x + 2$. 5. а) $F(x) = 7\text{tg}x + C$;

б) $F(x) = x^3 - \sin x + C$. 6. $4\sqrt{2} - 8$. 7. $3\frac{1}{3}$.

СР 15

До уроку 45

B-1. 1.

Оцінка	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Кількість	1	0	0	2	1	1	3	2	3	1	2

2. 10; 8 і 10; 8,5; 8,25. 2. 30; 40; 43.

B-2. 1.

Оцінка	6	7	8	9	10	11	12
Кількість	3	2	1	4	2	2	2

 6; 9; 9; 8,875.

2. 20; 40; 42,33.

ВІДПОВІДІ ТА РОЗВ'ЯЗАННЯ ДО ПОСІБНИКА [5]

СР 1

До уроку 2

B-1. 1. А. 2. В. 3. А. 4. 3. 5. $D(3; 3; 3)$.

B-2. 1. Г. 2. Г. 3. А. 4. 3. 5. $B(-9; -5; -6)$.

СР 2

До уроку 3

B-1. 1. В. 2. Г. 3. Д. 4. 12. 5. Точки лежать на одній прямій.

B-2. 1. В. 2. Г. 3. В. 4. 12. 5. Точки не лежать на одній прямій.

СР 3

До уроку 6

B-1. 1. В. 2. В. 3. Д. 4. $\overline{AB}(1; -2; -1)$. 5. 3.

B-2. 1. В. 2. Б. 3. Г. 4. $\overline{AB}(-1; -1; 1)$. 5. 3.

CP 4

B-1. 1. Д. 2. Б. 3. В. 4. 24. 5. -2.

B-2. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. 12. 5. 10.

KP 1**До уроку 10**

B-1. 1. А. 2. В. 3. Б. 4. В. 5. Г. 6. Г. 7. $B(-1; 1; -4)$; 5.

8. $C(-4; 0; 0)$. 9. $\frac{1}{2}$.

B-2. 1. Г. 2. Г. 3. Г. 4. Б. 5. В. 6. Г. 7. $B(5; 1; 4)$; 5.

8. $C(0; -1; 0)$. 9. $\frac{1}{2}$.

B-3. 1. В. 2. В. 3. Г. 4. Б. 5. Г. 6. Б. 7. $B(-2; 2; 5)$; 5.

8. $C(0; 0; 0)$. 9. $\frac{1}{2}$.

B-4. 1. Г. 2. Г. 3. Г. 4. А. 5. В. 6. Д. 7. $B(4; 2; 3)$; 5.

8. $C(0; 0; 0)$. 9. $\frac{1}{2}$.

CP 6**До уроку 13**

B-1. 1. А. 3. В. B-2. 1. В. 3. Д.

CP 7

B-1. 1. В. 3. Г. B-2. 1. Г. 3. Д.

CP 10

B-1. 4. $300\pi \text{ см}^2$. 5. $\frac{\pi l^2 \cos^2 \alpha}{4}$; $\frac{l^2}{2} \sin 2\alpha$.

B-2. 4. $200\pi \text{ см}^2$. 5. $\frac{\pi l^2 \sin^2 \alpha}{4}$; $\frac{l^2}{2} \sin 2\alpha$.

CP 8**До уроку 16**

B-1. 1. В. 3. Б. 4. 342 см^2 . B-2. 1. А. 3. Г. 4. 360 см^2 .

CP 11

B-1. 2. А. 4. 15 см. 5. $\pi l^2 \sin^2 \alpha$; $\frac{l^2}{2} \sin 2\alpha$.

B-2. 2. Б. 4. 20 см. 5. $\pi l^2 \cos^2 \alpha$; $\frac{l^2}{2} \sin 2\alpha$.

B-1. 1. Г. 2. В. 3. Г. 4. $8\sqrt{3}$ см².

5. Усі грані куба є рівними квадратами (рис. 1), $A_1B = A_1C_1 = A_1D = DB = BC_1 = DC_1$ як діагоналі рівних квадратів. Тоді всі грані тетраедра A_1BC_1D — рівні правильні трикутники, тобто тетраедр правильний, що і треба було довести.

B-2. 1. Б. 2. Б. 3. Д. 4. 3 см.

5. Усі грані куба є рівними квадратами (рис. 2), $AB_1 = AD_1 = AC = D_1B = D_1C = B_1C$ як діагоналі рівних квадратів. Тоді всі грані тетраедра AB_1CD_1 — рівні правильні трикутники, тобто тетраедр правильний, що і треба було довести.

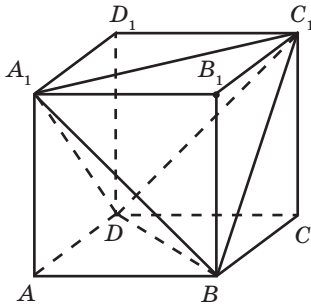


Рис. 1

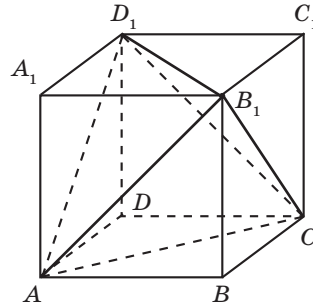


Рис. 2

KP 2

До уроку 19

B-1. 1. Б. 2. Д. 3. Г. 4. Б. 5. Г. 6. В. 7. $4\sqrt{3}$ см².

8. $412,5\pi$ см². 9. $a^2 \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right)$.

B-2. 1. Г. 2. Г. 3. Г. 4. А. 5. Г. 6. Б. 7. 8 см². 8. $412,5\pi$ см². 9. $4d^2 \cos \varphi (\cos \varphi + 1)$.

B-3. 1. Г. 2. Д. 3. Г. 4. Г. 5. Г. 6. В. 7. 16 см². 8. 500π см². 9. $4H^2 (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \cos \varphi)$.

B-4. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. Б. 5. Г. 6. Г. 7. 24 см². 8. 500π см². 9. $\frac{d^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi} \right)$.

CP 12

До уроку 22

B-1. 1. Б. 2. Г. 3. Д. 4. 49π см². 5. 4π см².

B-2. 1. Г. 2. Г. 3. Г. 4. 20 см. 5. 5π см.

CP 6
До уроку 28

- B-1. 2. Д. 4. 236 см^2 . 5. $1,5d^2 \sin 2\alpha$.
 B-2. 2. В. 4. 376 см^2 . 5. $1,5d^2 \sin 2\alpha$.

CP 8
До уроку 30

- B-1. 2. В. 5. Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні, то трикутник SBC рівносторонній (рис. 3), BM — його медіана (за умовою) і висота, тобто $BM \perp SC$. Аналогічно $DM \perp SC$. Тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини $(BMD) \perp SC$, що і треба було довести.
 B-2. 2. В. 5. Оскільки всі бічні ребра піраміди рівні, то трикутник SAB рівносторонній (рис. 4), AK — його медіана (за умовою) і висота, тобто $AK \perp SB$. Аналогічно $CK \perp SB$. Тоді за ознакою перпендикулярності прямої і площини $(AKC) \perp SB$, що і треба було довести.

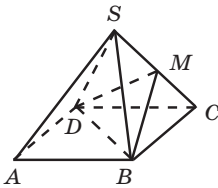


Рис. 3

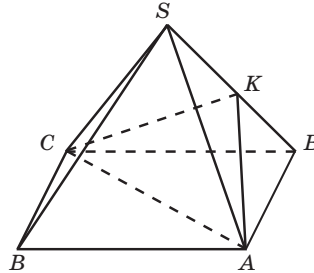


Рис. 4

CP 19
До уроку 33

- B-1. 1. Г. 2. В. 3. В. 4. $25\pi \text{ см}^2$. 5. $\frac{\pi d^2 \sin \alpha (\sin \alpha + 2 \cos \alpha)}{2}$.
 B-2. 1. Д. 2. Г. 3. Б. 4. $49\pi \text{ см}^2$. 5. $\frac{\pi d^2 \cos \alpha (\cos \alpha + 2 \sin \alpha)}{2}$.

CP 20
До уроку 34

- B-1. 1. Г. 2. Д. 3. Г. 4. $\pi a^2 \sqrt{2} \text{ см}^2$. 5. $\pi H \operatorname{ctg} \alpha \left(\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$.
 B-2. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. $\pi a^2 \sqrt{2} \text{ см}^2$. 5. $\pi H^2 \operatorname{tg} \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right)$.

КР 3
До уроку 35

- B-1. 3. Г. 5. А. B-2. 3. Д. 5. В.
 B-3. 3. В. 5. Б. B-4. 3. Б. 5. Д.

CP 13**До уроку 37**

- B-1. 1. Б. 2. Б. 3. Г. 4. 8 см^3 . 5. $H^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha$.
 B-2. 1. Б. 2. Д. 3. А. 4. 8 см^3 . 5. $a^3 \operatorname{tg} \alpha$.

CP 14

- B-1. 1. Д. 2. А. 3. В. 4. 12 см^3 . 5. $\frac{\sqrt{3}d^3}{4} \cos^2 \alpha \sin \alpha$.
 B-2. 1. В. 2. Б. 3. Б. 4. $24\sqrt{2} \text{ см}^3$. 5. $\frac{\sqrt{3}d^3}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

CP 16**До уроку 39**

- B-1. 1. Г. 2. В. 3. Д. 4. $90\pi \text{ см}^3$. 5. $\frac{\pi l^3}{4} \cos^2 \alpha \sin \alpha$.
 B-2. 1. В. 2. Д. 3. Б. 4. $250\pi \text{ см}^3$. 5. $\frac{\pi l^3}{4} \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

CP 15**До уроку 41**

- B-1. 1. Б. 2. А. 3. Б. 4. 96 см^3 . 5. $\frac{a^3}{12} \operatorname{tg} \alpha$.
 B-2. 1. А. 2. Б. 3. В. 4. 48 см^3 . 5. $\frac{a^3}{24} \operatorname{tg} \alpha$.

CP 17**До уроку 42**

- B-1. 1. А. 2. В. 3. В. 4. $3456\pi \text{ см}^3$. 5. $\frac{\pi R^3}{3} \operatorname{ctg} \alpha$.
 B-2. 1. Б. 2. А. 3. Б. 4. $2592\pi \text{ см}^3$. 5. $\frac{\pi R^3}{3} \operatorname{tg} \alpha$.

CP 18**До уроку 45**

- B-1. 1. В. 2. Б. 3. Д. 4. $684\pi \text{ см}^3$. 5. $\frac{4}{3} \sqrt{\frac{S^3}{\pi}}$.
 B-2. 1. Д. 2. Г. 3. Д. 4. $\frac{244}{3} \pi \text{ см}^3$. 5. $\frac{C^3}{6\pi^2}$.

KP 3**До уроку 47**

- B-1. 1. В. 2. В. 4. Д. 6. А. 7. 360 см^3 . 8. 3 см .
 9. $\sqrt{3}b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$.
 B-2. 1. Г. 2. А. 4. Б. 6. Б. 7. 420 см^3 . 8. 3 см .
 9. $\sqrt{3}b^3 \cos \alpha \sin^2 \alpha$.
 B-3. 1. В. 2. В. 4. А. 6. В. 7. 840 см^3 . 8. 3 см .
 9. $\frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha$.
 B-4. 1. Д. 2. Г. 4. Г. 6. Д. 7. 600 см^3 . 8. 3 см .
 9. $\frac{\sqrt{3}}{4} b^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Програма з математики для 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту.— К., 2010.
2. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Математика. Підруч. для 11 класу загальноосвіт. навч. закл. Рівень стандарту.— К.: Генеза, 2011.
3. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Підруч. для 11 класу загальноосвіт. навч. закл. / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко.— К.: Освіта, 2010.
4. Зінченко О. Г. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Комплексний зошит для контролю знань (Алгебра і початки аналізу).— Х.: Вид-во «Ранок», 2011.
5. Роганін О. М. Математика. 11 клас. Рівень стандарту: Комплексний зошит для контролю знань (Геометрія).— Х.: Вид-во «Ранок», 2011.
6. Ершова А. П., Голобородько В. В. Самостоятельные и контрольные работы по геометрии для 10–11 классов.— М.: Илекса; Харьков: Гимназия, 2002.
7. Земляков А. Н. Геометрия в 11 классе.— М.: Просвещение, 1991.
8. Литвиненко Г. М., Федченко Л. Я., Швець В. О. Збірник завдань для екзамену з математики на атестат про середню освіту.— Львів: ВНТЛ, 1997.
9. Лукин Р. Д., Лукина Т. К., Якунина М. С. Устные упражнения по алгебре и началам анализа.— М.: Просвещение, 1989.
10. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Г. М., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу: Збірник задач і завдань для тематичного оцінювання. 11 клас.— Х.: Гімназія, 2006.
11. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях: Навч. посібник для учнів 7–11 класів.— Х.: Світ дитинства, 1998.
12. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвіт. навч. закл.— Х.: Світ дитинства, 2007.
13. Нелін Є. П. Геометрія в таблицях: Навч. посіб. для учнів старших класів.— Х.: Світ дитинства, 1996.
14. Погорелов О. В. Геометрія. Підручник для 10–11 класів.— К.: Освіта, 1995.
15. Смирнова И. М. Сборник устных задач и уравнений по геометрии для 10–11 классов средней школы.— М.: Аквариум, 1998.

ЗМІСТ

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ (РІВЕНЬ СТАНДАРТУ)

Передмова	3
ТЕМА 3. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ	
Урок № 1. Повторення відомостей про функцію	8
Урок № 2. Степінь із довільним дійсним показником	11
Урок № 3. Властивості та графіки показникової функції	14
Урок № 4. Логарифми та їхні властивості	18
Урок № 5. Основні властивості логарифмів.	23
Урок № 6. Логарифмічна функція. Її графік і властивості	27
Урок № 7. Показникові рівняння і нерівності	30
Урок № 8. Показникові рівняння і нерівності	33
Урок № 9. Логарифмічні рівняння і нерівності	36
Урок № 10. Логарифмічні рівняння і нерівності	39
Урок № 11. Показникова і логарифмічна функції	42
Урок № 12. Контрольна робота № 1	45
Урок № 11*. Показникова і логарифмічна функції	49
ТЕМА 4. ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ	
Урок № 13. Границя функції в точці	53
Урок № 14. Похідна функції	56
Урок № 15. Похідна функції. Її геометричний і фізичний зміст	60
Урок № 16. Правила диференціювання	64
Урок № 17. Похідна складеної функції	67
Урок № 18. Правила диференціювання	70
Урок № 19. Ознаки сталості, зростання і спадання функцій	73
Урок № 20. Екстремуми функції	76
Урок № 21. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків	80
Урок № 22. Застосування похідної до дослідження функцій та побудови їх графіків	83
Урок № 23. Найбільше і найменше значення функції на проміжку	86
Урок № 24. Найбільше і найменше значення функції на проміжку	90
Урок № 25. Похідна та її застосування	93
Урок № 26. Контрольна робота № 2	96
Урок № 25*. Похідна та її застосування	100
ТЕМА 5. ІНТЕГРАЛ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ	
Урок № 27. Первісна та її властивості	103
Урок № 28. Правила знаходження первісних	106
Урок № 29. Визначений інтеграл, його геометричний зміст	110
Урок № 30. Визначений інтеграл, його геометричний зміст	115
Урок № 31. Визначений інтеграл, його геометричний зміст	118
Урок № 32. Обчислення площ плоских фігур	121
Урок № 33. Обчислення площ плоских фігур	126
Урок № 34. Застосування інтеграла в фізиці й техніці	130
Урок № 35. Інтеграл та його застосування	132
Урок № 36. Контрольна робота № 3	135
Урок № 35*. Інтеграл та його застосування.	139

ТЕМА 6. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Урок № 37.	Випадкова подія. Відносна частота подій. Ймовірність події ...	144
Урок № 38.	Випадкова подія. Ймовірність події	147
Урок № 39.	Елементи комбінаторики. Комбінаторні правила суми й добутку	151
Урок № 40.	Перестановки, розміщення, комбінації	154
Урок № 41.	Застосування елементів комбінаторики для обчислення ймовірності подій	158
Урок № 42.	Початкові відомості про статистику	162
Урок № 43.	Графічне подання інформації про вибірку	165
Урок № 44.	Характеристики вибірки: розмах вибірки, мода, медіана, середнє значення	168
Урок № 45.	Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики ...	171
Урок № 46.	Контрольна робота № 4	175
Урок № 45*.	Елементи математичної статистики	179
РЕЗЕРВНИЙ ЧАС І ПОВТОРЕННЯ		
Уроки 47–54	184

ГЕОМЕТРІЯ (РІВЕНЬ СТАНДАРТУ)

ТЕМА 3. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

Урок № 1.	Прямокутні координати в просторі	185
Урок № 2.	Відстань між точками в просторі. Координати середини відрізка	188
Урок № 3.	Вектори в просторі	191
Урок № 4.	Вектори в просторі. Дії над векторами	195
Урок № 5.	Координати вектора в просторі. Формула для обчислення довжини вектора	198
Урок № 6.	Додавання векторів. Множення вектора на число. Колінеарні вектори	201
Урок № 7.	Скалярний добуток векторів. Кут між векторами	204
Урок № 8.	Дії над векторами, заданими координатами	207
Урок № 9.	Декартові координати і вектори у просторі	210
Урок № 10.	Контрольна робота № 1	213
Урок № 9*.	Декартові координати і вектори у просторі	216

ТЕМА 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА. ОБ'ЄМИ І ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Урок № 11.	Циліндри і призми	221
Урок № 12.	Циліндри і призми	224
Урок № 13.	Циліндри і призми	227
Урок № 14.	Конуси і піраміди	230
Урок № 15.	Деякі види пірамід	234
Урок № 16.	Піраміди і конуси	237
Урок № 17.	Зрізана піраміда і зрізаний конус	241
Урок № 18.	Правильні многогранники	244
Урок № 19.	Контрольна робота № 2	248
Урок № 20.	Куля, сфера. Площина, дотична до сфери	253
Урок № 21.	Куля і сфера	258

Урок № 22. Куля і сфера. Тіла обертання	260
Урок № 23. Комбінації геометричних тіл	265
Урок № 24. Комбінації геометричних тіл	268
Урок № 25. Комбінації геометричних тіл	270
Урок № 26. Контрольна робота № 3	274
Урок № 27. Площа поверхні призми	279
Урок № 28. Площа поверхні призми	282
Урок № 29. Площа поверхні піраміди	284
Урок № 30. Площа поверхні піраміди	286
Урок № 31. Площі поверхонь многогранників	289
Урок № 32. Площа поверхні циліндра	292
Урок № 33. Площа поверхні конуса	295
Урок № 34. Площа поверхні сфери	299
Урок № 35. Контрольна робота № 4	302
Урок № 36. Об'єм призми і циліндра	307
Урок № 37. Об'єми призми і паралелепіпеда	310
Урок № 38. Об'єм циліндра	313
Урок № 39. Об'єм призми і циліндра	315
Урок № 40. Об'єм конуса і піраміди	318
Урок № 41. Об'єм піраміди	321
Урок № 42. Об'єм конуса	324
Урок № 43. Об'єм конуса і піраміди	327
Урок № 44. Об'єм кулі	332
Урок № 45. Об'єми тіл обертання	334
Урок № 46. Об'єми тіл	336
Урок № 47. Контрольна робота № 5	342
Урок № 46*(1). Об'єми геометричних тіл і площі їхніх поверхонь	347
Урок № 46*(2). Розв'язування задач прикладного характеру із застосуванням формул об'ємів геометричних тіл	352

РЕЗЕРВНИЙ ЧАС І ПОВТОРЕННЯ

Уроки № 48–51.....	355
Додаток	356
Література	365

Папір, на якому надрукована ця книга,



безпечний для здоров'я
та повністю
переробляється



зроблений зі вторинної
целюлози —
не постраждало жодне дерево



при вибілюванні паперу
не використовувався
хлор

Разом дбаємо про екологію та здоров'я

ВИДАВНИЦТВО
РАНOK

«НОВИЙ МАЙСТЕР-КЛАС» зробить ваш урок яскравим!

ПОСІБНИК ДОПОМОЖЕ ВЧИТЕЛЕВІ:

- ❖ спланувати й провести урок методично правильно
- ❖ оптимізувати навчально-виховний процес
- ❖ реалізувати принципи профільного навчання
- ❖ розкрити потенціал кожного учня
- ❖ збагатити власний педагогічний досвід

Створено вчителями для вчителів!

ISBN 978-617-540-549-9



9 786175 405499

ВИДАВНИЦТВО
РАНОК
www.ranok.com.ua

Навчально-методична література видавництва «РАНОК»

УСІ КНИГИ ТУТ!

КУПИТИ: WWW.RANOK.COM.UA

ЗАВАНТАЖИТИ: WWW.E-RANOK.COM.UA

ЗАМОВИТИ: pochta@ranok.com.ua

безкоштовний каталог видань: (057) 717-74-55

www.e-ranok.com.ua