

Профільна  
школа

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Старша школа  
нова програма

А. Р. Гальперіна, І. О. Золотарьова

# Алгебра і початки аналізу

Збірник завдань  
для контролю знань

10  
клас

Містить понад **800**  
різномірних завдань

ВИДАВНИЦТВО  
**РАНOK**

Старша школа  
нова програма

Профільна  
школа

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

А. Р. Гальперіна, І. О. Золотарьова

# Алгебра і початки аналізу

# 10

клас

Збірник завдань  
для контролю знань

ВИДАВНИЦТВО  
**РАНОК**

УДК 51(07)

ББК 74.262

Г17

Рекомендовано для учнів 10 класу; відповідає чинній програмі з математики для загальноосвітніх навчальних закладів, затвердженій МІНІСТЕРСТВОМ ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**Гальперіна А. Р.**

Г17 Алгебра і початки аналізу. 10 клас. Профільний рівень: Збірник завдань для контролю знань / А. Р. Гальперіна, І. О. Золотарьова. — Х.: Вид-во «Ранок», 2010. — 176 с.

ISBN 978-611-540-677-7

Посібник відповідає чинній програмі з математики для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень) і містить понад 800 завдань, диференційованих за чотирма рівнями складності.

Матеріал, наведений у збірнику, об'єднаний в 4 теми. Кожна тема містить стислі теоретичні відомості; тренувальні вправи, тести і контрольні роботи у двох варіантах.

Посібник призначений для учнів 10 класу, учителів математики.

УДК 51(07)

ББК 74.262

Навчальне видання

*ГАЛЬПЕРІНА Альбіна Романівна,  
ЗОЛОТАРЬОВА Інна Олександрівна*

**АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ**  
**10 клас. Профільний рівень**  
**Збірник завдань для контролю знань**

Редактор Г. Ю. Венрік. Технічний редактор *О. В. Сміян*

Код Т11475У. Підписано до друку 20.07.2010. Формат 60×90/16.

Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний. Ум. друк. арк. 11,0

ТОВ Видавництво «Ранок». Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008.

61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.

Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а.

Тел. (057) 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.

Для листів: 61045 Харків, а/с 3355. E-mail: office@ranok.kharkov.ua

З питань реалізації звертатися за тел.:

у Харкові – (057) 712-91-44, 712-90-87; Києві – (044) 599-14-53, 417-20-80.

E-mail: pochta@ranok.kharkov.ua

[www.ranok.com.ua](http://www.ranok.com.ua)

ISBN 978-611-540-677-7

© А. Р. Гальперіна, І. О. Золотарьова, 2010

© ТОВ «Видавництво "Ранок"», 2010

# ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

ТЕСТИ

КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

За темами:

- Функції, многочлени, рівняння і нерівності
  - ▶▶ множини
  - ▶▶ числові функції
  - ▶▶ розв'язування рівнянь і нерівностей
- Степенева функція
- Тригонометричні функції
- Тригонометричні рівняння і нерівності.  
Обернені тригонометричні функції



Збірник завдань з алгебри та початків аналізу для 10 класу складений відповідно до вимог чинної програми з математики для загальноосвітніх навчальних закладів (профільний рівень).

Матеріал, наведений у збірнику, об'єднаний в 4 теми, відповідно до навчальної програми 10 класу. Кожна тема містить стислі теоретичні відомості, тренувальні вправи, тести і контрольні роботи у двох варіантах.

Теоретичні відомості підібрані таким чином, щоб максимально систематизувати і доповнити теоретичний матеріал підручників.

Тренувальні вправи наведені у двох варіантах: варіант 1 призначений для роботи в класі під керівництвом учителя, варіант 2 — для самостійної роботи в класі і вдома. Відповідні завдання варіантів 1 і 2 аналогічні одне одному. До всіх завдань варіанта 1 і до завдань високого рівня варіанта 2 наведені відповіді. Відповіді до всіх тренувальних вправ, тестових завдань і контрольних робіт можна знайти на сайті видавництва «Ранок»: [www.ranok.com.ua](http://www.ranok.com.ua).

Тести, наведені в збірнику, автори рекомендують використовувати для проведення поточного контролю або для узагальнення, систематизації та корекції знань учнів перед контрольною роботою.

Об'єм тестів і контрольних робіт є орієнтовним, учитель може варіювати його, виходячи з рівня підготовки учнів та особливостей психолого-педагогічної характеристики класу.

Усі завдання (понад 800), що увійшли до збірника, диференційовані за рівнями складності і мають такі позначення:

- |          |                      |          |                    |
|----------|----------------------|----------|--------------------|
| <b>П</b> | — початковий рівень; | <b>С</b> | — середній рівень; |
| <b>Д</b> | — достатній рівень;  | <b>В</b> | — високий рівень.  |

Зміст і структура запропонованого дидактичного матеріалу дозволяє об'єктивно оцінити рівень засвоєння учнями програми, а також підготувати учнів до олімпіад із математики.

# ТЕМА 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

## ЧАСТИНА 1. МНОЖИНИ

### Стислі теоретичні відомості

Запис  $x \in A$  означає, що  $x$  є елементом множини  $A$ .

Запис  $\emptyset$  означає порожню множину.

Запис  $A \subset B$  означає, що множина  $A$  є підмножиною множини  $B$ , тобто кожний елемент множини  $A$  є елементом множини  $B$ .

Множину можна задати переліком її елементів, наприклад  $A = \{1; 2; 3\}$ , і заданням його *характеристичної властивості*. Запис  $A = \{x \mid x^2 - 2x = 0\}$  означає, що множина  $A$  складається з коренів рівняння  $x^2 - 2x = 0$ , тобто з чисел 0 і 2. Умова « $x$  — корінь рівняння  $x^2 - 2x = 0$ » називається *характеристичною властивістю* множини  $A$ . Характеристична властивість множини записується після вертикальної риси, наприклад запис  $B = \{2n + 1 \mid n \text{ — ціле число}\}$  означає, що  $B$  — множина всіх непарних цілих чисел.

Приведемо загальноприйняті позначення деяких числових множин.

$N$  — множина всіх натуральних чисел;

$Z$  — множина всіх цілих чисел;

$Q$  — множина всіх раціональних чисел;

$R$  — множина всіх дійсних чисел.

*Перерізом* множин  $A$  і  $B$  є множина, що складається з елементів, які належать кожній із множин  $A$  і  $B$ . Позначення:  $A \cap B$  ( $AB$  — добуток множин).

*Об'єднанням* множин  $A$  і  $B$  є множина, що складається з елементів, які належать хоча б одній з множин  $A$  або  $B$ . Позначення:  $A \cup B$  ( $A+B$  — сума множин).

*Різницею* множин  $A$  і  $B$  є множина, що складається зі всіх елементів множини  $A$ , які не належать множині  $B$ . Позначення:  $A \setminus B$  ( $A-B$  — різниця множин).

Між множинами  $A$  і  $B$  встановлено *взаємно однозначну відповідність*, якщо кожному елементу  $a \in A$  поставлено у відповідність один елемент  $b \in B$ , і при цьому кожний елемент  $b \in B$  відповідає одному й тільки одному елементу  $a \in A$ .

Назвемо довільні множини  $A$  і  $B$  *еквівалентними*, якщо між їхніми елементами можна встановити взаємно однозначну відповідність. Говорять, що множини  $A$  і  $B$  мають однакову потужність.

Нескінченна множина називається *зліченною*, якщо вона еквівалентна множині натуральних чисел. Будь-яка нескінченна підмножина  $A$  натурального ряду чисел  $N$  зліченна.

Незлічені множини — нескінченні множини, елементи яких не можна пронумерувати. Найпростіший приклад — множина всіх точок відрізка  $[0; 1]$ . Такі множини називаються континуальними. Ірраціональні числа утворюють континуальні множини. Рахункова і континуальна множини не є еквівалентними.

**Тренувальні вправи** .....  
 ..... *Варіант 1* .....

- С** 1. Назвіть множину:
- а) людей, які живуть на території України;
  - б) людей, які живуть у місті;
  - в) учнів, які вчаться в одному класі;
  - г) квітів, що стоять у вазі;
  - д) точок земної поверхні, рівновіддалених від Північного полюса;
  - е) кораблів.

- С** 2. Запишіть множину:
- а) усіх дільників числа 18;
  - б) простих чисел, менших за 35;
  - в) натуральних степенів числа 2, менших за 60;
  - г) цілих чисел, більших від 10, але не більших від 15;
  - д) спільних дільників чисел 24 і 30;
  - е) трицифрових чисел, складених із цифр 1; 2; 3, якщо цифри в числах не повторюються.

- С** 3. Запишіть множину коренів:
- а) рівняння  $3 - 2x = -5$ ;
  - б) рівняння  $5(4 - 2x) - 3 = 6 + (3x - 2)$ ;
  - в) квадратного рівняння  $x^2 - 7x + 12 = 0$ ;
  - г) рівняння  $(x + 3)(x + 1)\sqrt{x - 1} = 0$ ;
  - д) рівняння  $3x^2 + 4 = 0$ ;
  - е) рівняння  $|x - 1| \cdot (|x| - 2) = 0$ .

- Д** 4. Запишіть множину:
- а) цілих розв'язків нерівності  $(1 - x)(1 + x) \geq 0$ ;
  - б) що складається з найбільшого цілого значення розв'язків нерівності  $\frac{1}{x} \geq 1$ ;
  - в) цілих розв'язків нерівності  $\sqrt{5 - x^2} > 1$ ;
  - г) натуральних розв'язків нерівності  $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$ ;
  - д) цілих розв'язків нерівності  $(3 + x)(x - 3)^2(2 + x) \leq 0$ .

Д

5. Знайдіть переріз множин  $A$  і  $B$ , якщо:

- а)  $A = \{1; 3; 7; 9\}$ ,  $B = \{11; 9; 3; -1\}$ ;  
 б)  $A$  — множина всіх парних чисел,  $B$  — множина всіх непарних чисел;  
 в)  $A$  — множина всіх простих чисел,  $B$  — множина натуральних чисел;  
 г)  $A$  — множина всіх ромбів,  $B$  — множина всіх прямокутників;  
 д)  $A$  — множина коренів рівняння  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ,  $B$  — множина коренів рівняння  $x^2 - 3x + 2 = 0$ ;  
 е)  $A$  — множина чисел, які належать відрізку  $[0; 4]$ ,  $B$  — множина чисел, які належать відрізку  $[1; 5]$ .

В

6. Опишіть множину точок  $M$  у просторі:

- а) таких, що  $OM = 4$ ;  
 б) таких, що  $OM \leq R$ ;  
 в) віддалених від площини  $\alpha$  на відстань 1;  
 г) віддалених від прямої  $l$  на відстань  $d$ .

В

7. Укажіть множину точок  $M(x; y)$  на площині, для яких:

- а)  $y \geq 3x - 2$ ;      б)  $(x-4)^2 + (y-1)^2 \leq 36$ ;      в)  $y \leq x^2 - 6x + 5$ ;  
 г)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ y \geq \frac{4}{9}x^2; \end{cases}$       д)  $\begin{cases} |y| > |x-1|, \\ |y| \leq x; \end{cases}$       е)  $\begin{cases} |x-2y| \leq 1, \\ |x-1| > 1. \end{cases}$

Д

8. Задайте переліком елементів множину  $A$ , яка задана характеристичною властивістю:

- а)  $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$ ;      б)  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -11 < x \leq -3\}$ ;  
 в)  $A = \{x \mid x^4 - 10x^2 + 9 = 0\}$ ;      г)  $A = \left\{x \mid \sqrt{(x^2+2)(x-2)} = 2x^2 - x^3\right\}$ .

Д

9. Знайдіть об'єднання множин  $A$  і  $B$ , якщо:

- а)  $A = \{-1; 1; 4; 0\}$ ,  $B = \{0; 1; 2\}$ ;  
 б)  $A$  — множина всіх парних чисел,  $B$  — множина всіх непарних чисел;  
 в)  $A$  — множина всіх простих чисел,  $B$  — множина натуральних чисел;  
 г)  $A$  — множина чисел, що належать відрізку  $[-1; 2]$ ,  $B$  — множина чисел, що належать відрізку  $[1; 4]$ .  
 д)  $A$  — множина всіх цілих чисел, що не діляться на 6,  $B$  — множина всіх цілих чисел, що не діляться на 9.

**С 10.** Визначте числову множину ( $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ , ірраціональних чисел), до якої належать числа:

а)  $5$ ;  $\pi$ ;  $\frac{11}{5}$ ;  $\frac{3}{22}$ ;  $-21,2$ ;  $3,(034)$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $-1001$ ;

б)  $-7,1 + \frac{1}{3}$ ;  $5\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ ;  $(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 - \sqrt{60}$ .

**Д 11.** Зазначте, чи є наведене висловлення правильним:

- а) будь-яке ціле число є натуральним;
- б) будь-яке ірраціональне число є дійсним;
- в) будь-яке ціле число є раціональним;
- г) порожня множина є підмножиною множини натуральних чисел;
- д) будь-який ромб є квадратом;
- е) будь-який прямокутник є паралелограмом.

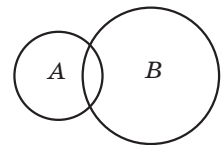
**Д 12.** Знайдіть різницю множин  $A$  і  $B$  ( $A \setminus B$ ), якщо:

а)  $A = \left\{ \frac{1}{2}; -1; 3 \right\}$ ,  $B = \left\{ -1; \frac{1}{2}; 5; 0 \right\}$ ;

б)  $A$  — множина всіх правильних багатокутників,  $B$  — множина всіх рівносторонніх трикутників.

**Д 13.** а) Користуючись рисунком, знайдіть різницю множин  $A$  і  $B$ .

б)  $A$  — множина всіх учнів 9-х класів школи,  $B$  — множина всіх дівчат, які вчаться в цій школі. Знайдіть і назвіть множину  $A \setminus B$ .



в) Множина  $A$  — відрізок  $[1; 4]$ , множина  $B$  — відрізок  $[2; 6]$ . Знайдіть:  $B \setminus A$ ;  $A \setminus B$ ;  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .

**С 14.** Запишіть перші три елементи множини,  $n$ -й елемент якої дорівнює:

а)  $a_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ ; б)  $a_n = n^2 - n + 5$ ; в)  $a_n = \frac{n^3 + 1}{2^n}$ ; г)  $a_n = 2^{n^2}$ .

**В 15.** Зазначте, чи є зліченною множина:

- а)  $Z$  усіх цілих чисел;
- б)  $\{2n \mid n \in N\}$ ;
- в)  $\{n^2 + 3n - 1 \mid n \in N\}$ ;
- г)  $x \in [a; b]$ ;
- д)  $N \cup \{0; 1\}$ .

**В 16.** Установіть, чи існує взаємно однозначна відповідність між множинами  $A$  і  $B$ , якщо:

а)  $A$  — множина кіл,  $B$  — множина рівносторонніх трикутників, описаних навколо цих кіл;

- б)  $A$  — множина кіл,  $B$  — множина центрів цих кіл;  
 в)  $A$  — множина всіх парабол, осі симетрії яких паралельні осі  $Oy$ ,  $B$  — множина точок, що задовольняють рівняння  $y = ax^2 + bx + c$ ;  
 г)  $A$  — множина трикутників площини,  $B$  — множина відрізків, довжини яких дорівнюють довжині висоти кожного трикутника.

..... *Варіант 2* .....

С

**1.** Назвіть множину:

- а) людей, які живуть у місті Харкові;  
 б) людей, які живуть в одному селі;  
 в) людей, які вчаться у вищих навчальних закладах;  
 г) артистів, які працюють в одному театрі;  
 д) точок земної поверхні, рівновіддалених від обох полюсів;  
 е) військовослужбовців.

С

**2.** Запишіть множину:

- а) усіх дільників числа 28;  
 б) простих чисел, більших від 20, але менших за 40;  
 в) усіх натуральних степенів числа 3, менших за 80;  
 г) цілих чисел, менших за 6, але не менших за  $-1$ ;  
 д) спільних дільників чисел 36 і 42;  
 е) трицифрових чисел, складених із цифр 1; 2.

С

**3.** Запишіть множину коренів:

- а) рівняння  $-7 + 4x = 5$ ;  
 б) рівняння  $-3(-2 + 3x) + 5 = 6 - 2(1 - x)$ ;  
 в) квадратного рівняння  $x^2 + 5x - 6 = 0$ ;  
 г) рівняння  $(2 - x)\sqrt{x - 4} (2x - 10) = 0$ ;  
 д) рівняння  $-x^2 - 8 = 0$ ;  
 е) рівняння  $|2 - x| \cdot (|x| - 3) = 0$ .

Д

**4.** Запишіть множину:

- а) цілих розв'язків нерівності  $x^2 - 9 \leq 0$ ;  
 б) що складається з цілих розв'язків нерівності  $\frac{4}{x^2} > 1$ ;  
 в) цілих розв'язків нерівності  $\sqrt{2 - x} < x$ ;  
 г) натуральних розв'язків нерівності  $x^2 - 2x \leq 0$ ;  
 д) цілих розв'язків нерівності  $(x + 4)(x + 3)^2 x < 0$ .

Д

**5.** Знайдіть переріз множин  $A$  і  $B$ , якщо:

- а)  $A = \{-1; 2; 5; 8\}$ ,  $B = \{4; 2; 0; -1\}$ ;

- б)  $A$  — множина чисел, кратних 2,  $B$  — множина чисел, кратних 3;  
 в)  $A$  — множина простих чисел,  $B$  — множина складених чисел;  
 г)  $A$  — множина прямокутних трикутників,  $B$  — множина рівнобедрених трикутників;  
 д)  $A$  — множина коренів рівняння  $4x - x^2 = 0$ ,  $B$  — множина коренів рівняння  $x^3 - 8x^2 + 16x = 0$ ;  
 е)  $A$  — множина чисел, що належать відрізку  $[-2; 3]$ ,  $B$  — множина чисел, що належать відрізку  $[0; 6]$ .

**В** 6. Опишіть множину точок  $N$  у просторі:

- а) таких, що  $ON = 2$ ;  
 б) таких, що  $ON \leq 10$ ;  
 в) віддалених від поверхні циліндра на однакову відстань;  
 г) віддалених від площини  $\alpha$  на відстань  $l$ .

**В** 7. Укажіть множину точок  $M(x; y)$  площини, для яких:

- а)  $y < 2 - 4x$ ;      б)  $(x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 4$ ;      в)  $y > x^2 + 3x + 2$ ;  
 г)  $\begin{cases} y \leq 4 - x^2, \\ x^2 + y^2 \geq 1; \end{cases}$       д)  $\begin{cases} |y| > x - 1, \\ y \leq |x + 1|; \end{cases}$       е)  $\begin{cases} |2x - 2y| > 1, \\ |y + 1| \leq 1. \end{cases}$

**Д** 8. Задайте переліком елементів множину  $A$ , яка задана характеристичною властивістю:

- а)  $A = \left\{ x \mid \frac{2}{7}x^2 = \frac{7}{2} \right\}$ ;  
 б)  $A = \{x \mid x \in N; -15 \leq x < 2\}$ ;  
 в)  $A = \left\{ x \mid (x+1)^4 + 5(x+1)^2 - 6 = 0 \right\}$ ;  
 г)  $A = \left\{ x \mid \sqrt{(1-2x)(x^3 - 3x^2)} = x(1-2x) \right\}$ .

**Д** 9. Знайдіть об'єднання множин  $A$  і  $B$ , якщо:

- а)  $A = \{-5; -1; 3; 7; 11\}$ ,  $B = \{-1; 0; 3\}$ ;  
 б)  $A$  — множина натуральних чисел,  $B$  — множина цілих чисел;  
 в)  $A$  — множина всіх від'ємних чисел,  $B$  — множина всіх додатних чисел;  
 г)  $A$  — множина чисел, що належать відрізку  $[3; 7]$ ,  $B$  — множина чисел, що належать відрізку  $[-1; 4]$ .  
 д)  $A$  — множина всіх цілих чисел, що не діляться на 4,  $B$  — множина всіх цілих чисел, що не діляться на 6.

**С** 10. Визначте числову множину ( $N$ ,  $Z$ ,  $Q$ , ірраціональних чисел), до якої належать числа:

- а)  $1,010010001\dots$ ;  $\frac{5}{9}$ ;  $-16$ ;  $158$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $0,(32)$ ;  $-\frac{1}{3}$ ;  $\frac{6}{2}$ ;  
 б)  $-7\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ ;  $(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ ;  $\frac{1}{5} - 1,3$ ;  $5 \cdot 1,(513)$ .

**Д** 11. Зазначте, чи є наведене висловлення правильним:

- а) будь-яке раціональне число є дійсним числом;  
 б) будь-яке раціональне число є цілим числом;  
 в) будь-яке натуральне число є ірраціональним числом;  
 г) порожня множина є підмножиною множини цілих чисел;  
 д) множина рівносторонніх трикутників є підмножиною множини гострокутних трикутників;  
 е) будь-який паралелограм є квадратом.

**Д** 12. Знайдіть різницю множин  $A$  і  $B$  ( $A \setminus B$ ), якщо:

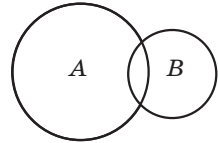
а)  $A = \left\{ -\frac{1}{3}; 1; \frac{1}{3} \right\}$ ,  $B = \left\{ 1; \frac{1}{3}; 0; 3 \right\}$ ;

б)  $A$  — множина всіх правильних многокутників,  $B$  — множина всіх квадратів.

**Д** 13. а) Користуючись рисунком, знайдіть різницю множин  $A$  і  $B$ .

б)  $A$  — множина всіх учнів 10-х класів даної школи,  $B$  — множина всіх хлопчиків цього віку в даному місті. Знайдіть і назвіть  $A \setminus B$ .

в) Множина  $A$  — відрізок  $[2; 7]$ , множина  $B$  — відрізок  $[4; 8]$ . Знайдіть:  $B \setminus A$ ;  $A \setminus B$ ;  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ .



**С** 14. Запишіть перші три елементи множини,  $n$ -й елемент якої дорівнює:

а)  $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ; б)  $a_n = 3 - 2n^2$ ; в)  $a_n = \frac{n^2 - n}{3^n}$ ; г)  $a_n = \frac{2^{2n-3}}{n}$ .

**В** 15. Зазначте, чи є зліченною множина:

- а) ірраціональних чисел; б)  $\{2n-1 \mid n \in N\}$ ;  
 в)  $\{-2n+3n^2+2 \mid n \in N\}$ ; г)  $x \in [-3; 2)$ ; д)  $Q \cup \{-4\}$ .

**В** 16. Установіть, чи існує взаємно однозначна відповідність між множинами  $A$  і  $B$ , якщо:

а)  $A$  — множина трикутників,  $B$  — множина кіл, вписаних у ці трикутники;



- б)  $A$  — множина чотирикутників,  $B$  — множина кіл, вписаних у ці чотирикутники;  
 в)  $A$  — множина паралелограмів,  $B$  — множина висот цих паралелограмів;  
 г)  $A$  — множина всіх кіл на площині,  $B$  — множина всіх квадратів, уписаних у ці кола.

Тест 1. Множини

Варіант 1

- П 1. Знайдіть добуток елементів множини всіх дільників числа 20.

А	Б	В	Г	Д
800	8000	400	1600	20

- П 2. Укажіть множину, що складається з коренів рівняння  $(4-x^2)\sqrt{x}=0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\{2; -2\}$	$\{-2; 0; 2\}$	$\{0\}$	$\{0; 2\}$	$\{2\}$

- П 3. Укажіть множину цілих розв'язків нерівності  $|x| < 3$ .

А	Б	В	Г	Д
$\{0\}$	$\{1; 2\}$	$\{0; 1; 2\}$	$\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$	$\{-2; -1; 0; 1; 2\}$

- П 4. Укажіть елементи множини  $A$ , якщо

$$A = \left\{ x \mid \sqrt{4-x^2} > 2, x \in \mathbf{Z} \right\}.$$

А	Б	В	Г	Д
$\{-1; 0; 1\}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0; 1; 2\}$	$\{-2; -1; 0; 1; 2\}$

- П 5. Укажіть числа, що належать множині  $\mathbf{Q}$  раціональних чисел:  $\frac{2}{3}$ ;  $\sqrt{7}$ ;  $-8,3$ ;  $\pi$ ;  $0,(71)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left\{ \frac{2}{3}; -8,3; 0,(71) \right\}$	$\left\{ \frac{2}{3}; -8,3 \right\}$	$\left\{ \frac{2}{3}; \sqrt{7}; -8,3 \right\}$	$\{\sqrt{7}; \pi\}$	$\{\sqrt{7}; 0,(71)\}$

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

- С 6. Установіть відповідність між операціями з множинами  $A$  і  $B$  (1–4) і множинами, отриманими в результаті цих операцій (А–Д), якщо  $A = \{9; -1; 3; -5; 6\}$ ;  $B = \{-1; 2; 4; -5\}$ .

1	$A \cap B$	А	$\{9; 3; 6\}$
2	$A \cup B$	Б	$\{-5; -1; 3\}$
3	$A \setminus B$	В	$\{9; -1; 3; -5; 2; 4; 6\}$
4	$B \setminus A$	Г	$\{2; 4\}$
		Д	$\{-1; -5\}$

- С 7. Укажіть множину розв'язків рівняння  $-x^4 + 5x^2 - 4 = 0$ .

- С 8. Укажіть множину натуральних розв'язків нерівності  $\frac{8}{x} \geq x^2$ .

- Д 9. Запишіть третій і четвертий елементи множини,  $n$ -й елемент якої дорівнює  $a_n = 5n - n^2 - 6$ .

- Д 10.  $A$  — множина чисел, що належать проміжку  $(-1; 3]$ .  $B$  — множина чисел, що належать проміжку  $[0; 4)$ . Знайдіть  $A \cup B \setminus A$ .

- В 11. Укажіть множину точок площини, для яких  $\begin{cases} xy \geq 1, \\ y > x^2 - 1. \end{cases}$

..... *Варіант 2* .....

- П 1. Знайдіть добуток елементів множини всіх дільників числа 15.

А	Б	В	Г	Д
450	45	75	15	225

- П 2. Укажіть множину, що складається з коренів рівняння  $(x^2 - 9)\sqrt{x - 4} = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$\{4\}$	$\{3; 4\}$	$\{-3; 3; 4\}$	$\emptyset$	$\{-3; 3\}$

- П 3. Укажіть множину натуральних розв'язків нерівності  $|x| \leq 4$ .

А	Б	В	Г	Д
$\{\pm 4; \pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$	$\{0; 1; 2; 3; 4\}$	$\{1; 2; 3; 4\}$	$\{0; 1; 2; 3\}$	$\{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$

П 4. Укажіть елементи множини  $A$ , якщо

$$A = \left\{ x \mid \sqrt{2+x^2} \leq \sqrt{2}, x \in \mathbf{Z} \right\}.$$

А	Б	В	Г	Д
$\{-1; 0; 1\}$	$\{-2\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\{0; 1\}$

П 5. Укажіть числа, що належать множині  $\mathbf{Z}$  цілих чисел:  $-7, 3; 158; 0, (803); -\frac{10}{5}; \sqrt{7}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\left\{ -\frac{10}{5}; \sqrt{7} \right\}$	$\left\{ 158; -\frac{10}{5} \right\}$	$\{158\}$	$\emptyset$	$\{-7, 3; 158\}$

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

С 6. Установіть відповідність між операціями з множинами  $A$  і  $B$  (1–4) і множинами, отриманими в результаті цих операцій (А–Д), якщо  $A = \{-8; -4; 0; 4\}; B = \{-3; 0; 2; 4\}$ .

1 $A \cap B$	А	$\{-8; -4; -3; 0; 2; 4\}$
2 $A \setminus B$	Б	$\{-3; 2\}$
3 $A \cup B$	В	$\{0; 4\}$
4 $B \setminus A$	Г	$\{-3\}$
	Д	$\{-8; -4\}$

С 7. Укажіть множину розв'язків рівняння  $(x^2 - 2x)^2 + 3(x^2 - 2x) + 2 = 0$ .

С 8. Укажіть множину цілих розв'язків нерівності  $\frac{4}{x^2} > 1$ .

Д 9. Запишіть другий і третій елементи множини,  $n$ -й елемент якої дорівнює  $a_n = -2(n-1)(2-3n)$ .

Д 10.  $A$  — множина чисел, що належать проміжку  $(-4; 2]$ .  $B$  — множина чисел, що належать проміжку  $[-1; 3]$ . Знайдіть  $B \setminus (A \cap B)$ .

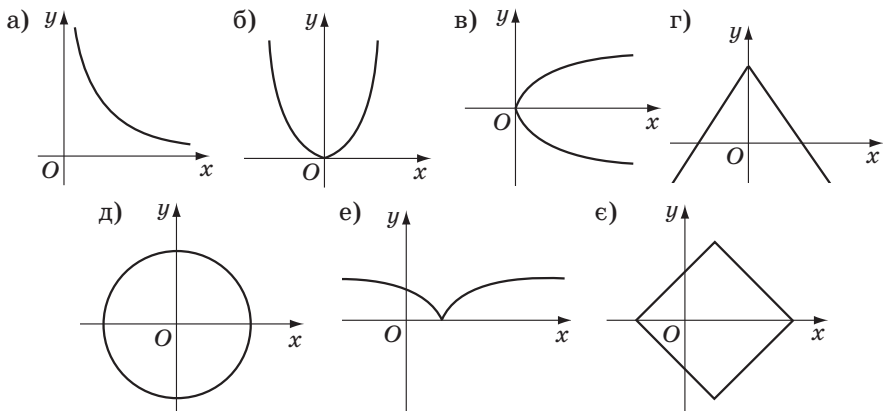
В 11. Укажіть множину точок площини, для яких 
$$\begin{cases} y \leq 4 - x^2, \\ x^2 + (y - 3)^2 \leq 4. \end{cases}$$

**ЧАСТИНА 2. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ**

Тренувальні вправи

*Варіант 1*

**С** 1. Серед наведених на рисунках графіків укажіть графіки функцій.



**С** 2. Знайдіть значення функції при заданому значенні аргументу:

- а)  $f(x) = 3 - x$  при  $x = -0,3$ ;    б)  $f(n) = \frac{n+2}{1-2n}$  при  $n = -1$ ;  
 в)  $f(x) = x^3 - 5x + 7$  при  $x = 4$ ;    г)  $f(t) = \frac{2}{3} \cdot 3^{t-1}$  при  $t = 2$ ;  
 д)  $f(z) = \sqrt{2z + \sqrt{z-3}}$  при  $z = 4$ ;    е)  $f(y) = \sqrt{(2y-1)^2 + 8y}$  при  $y = -4$ .

**С** 3. Знайдіть значення функції:

- а)  $f(-x)$ ;  $f(0)$ ;  $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ , якщо  $f(x) = \frac{1+x}{x-1}$ ;  
 б)  $f(-1)$ ;  $f(2)$ , якщо  $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{при } x < 0, \\ 2-x^2 & \text{при } x \geq 0; \end{cases}$   
 в)  $f(-5)$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ;  $f(12)$ , якщо  $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{при } x < -1, \\ x^3 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ 2-x & \text{при } x > 1. \end{cases}$

**Д** 4. Знайдіть область визначення функції:

- а)  $y = \frac{3}{x-1}$ ;    б)  $y = -\frac{7}{x+3}$ ;    в)  $y = \frac{2}{x(x-1)}$ ;  
 г)  $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x-4}$ ;    д)  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{x}$ ;    е)  $y = \frac{1}{|x|-1}$ .

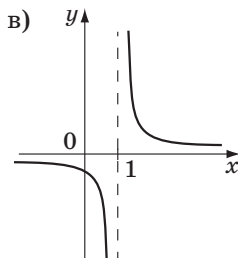
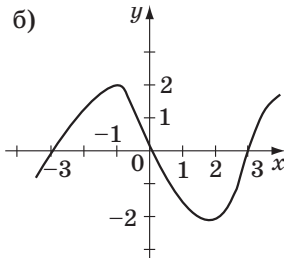
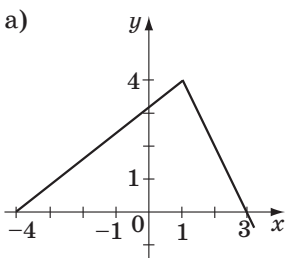
**Д** 5. Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = \sqrt{(x-1)(x+4)}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{x+4}{x-1}}$ ; в)  $y = \sqrt{x} + \sqrt{25-x^2}$ ;  
г)  $f(x) = \frac{3x}{x^2-1} + \sqrt{4-x^2}$ ; д)  $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-3}}$ ; е)  $f(x) = \sqrt{3+2x-x^2}$ .

**С** 6. Знайдіть множину значень функції:

а)  $y = 3x^2$ ; б)  $y = 4-x^2$ ; в)  $y = x^2+5$ ; г)  $y = 3x+2$ ;  
д)  $y = \sqrt{x}$ ; е)  $y = x^2+x+2$ ; є)  $y = \frac{3}{x}$ ; ж)  $y = \frac{1}{x-2} + 1$ .

**С** 7. Користуючись рисунком, знайдіть проміжки зростання і спадання функції, заданої графічно:



**Д** 8. Доведіть, що функція, яка задана формулою:

а)  $y = 2-x$ , спадає на всій області визначення;  
б)  $y = \frac{1}{x-1}$ , спадає при  $x \in (1; +\infty)$ ;  
в)  $y = x^2+1$ , зростає при  $x \in [0; +\infty)$ ;  
г)  $y = (x-2)^2+1$ , зростає при  $x \in [2; +\infty)$ ;  
д)  $y = \sqrt{x-1}$ , зростає при  $x \in [1; +\infty)$ ;  
е)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ , зростає при  $x \in (-\infty; -1)$ .

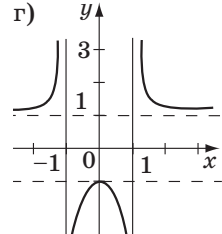
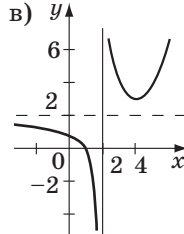
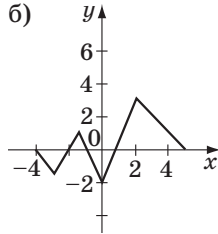
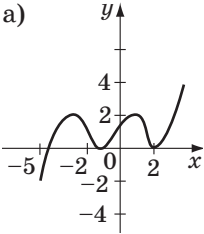
9. Дослідіть на парність функцію, що задана формулою:

**С** а)  $y = 3x^2-2$ ; б)  $y = 5x^3$ ; в)  $y = \frac{4}{x}$ ; г)  $y = \frac{1-x^2}{x-4}$ ;

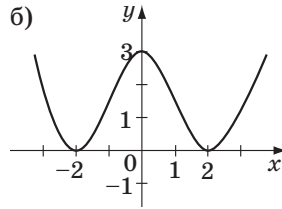
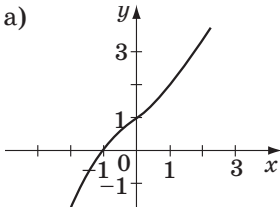
**Д** д)  $y = x^2 - |x|$ ; е)  $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2-1}}$ ;

**В** є)  $y = \frac{(1-x)^2}{x+2} - \frac{(1+x)^2}{x-2}$ ; ж)  $y = |x-1| + |1+x|$ .

**С 10.** Користуючись заданим на рисунку графіком, установіть властивості функції (знайдіть нулі функції, область визначення і множину значень, проміжки зростання і спадання, найбільші та найменші значення функції; дослідіть функцію на парність):



**С 11.** Користуючись заданим на рисунку графіком, знайдіть значення функції при значеннях аргументу  $x=0; 2; -1$  і значення аргументу за значеннями функції  $g(x)=-1; 3; 2$ :



**С 12.** Побудуйте графік лінійної функції. Укажіть, чи є функція зростаючою або спадною:

- |                    |                    |                         |
|--------------------|--------------------|-------------------------|
| а) $y = -2x$ ;     | б) $y = 3x + 2$ ;  | в) $y = -x - 2$ ;       |
| г) $2x - y = -2$ ; | д) $-x + 2y = 4$ ; | е) $-3x + 2y - 6 = 0$ ; |
| є) $x = -4$ ;      | ж) $y = 1$ ;       | з) $y + 2 = 0$ .        |

**С 13.** Побудуйте графік функції; укажіть її область визначення; дослідіть функцію на парність:

- |                        |                         |                          |
|------------------------|-------------------------|--------------------------|
| а) $y = \frac{1}{x}$ ; | б) $y = -\frac{2}{x}$ ; | в) $xy = 3$ ;            |
| г) $y = x^2$ ;         | д) $y = -2x^2$ ;        | е) $y = \frac{x^2}{2}$ . |

**С 14.** Побудуйте графік функції. Встановіть, чи є функція не-парною. Укажіть, якщо це можливо, найменше значення функції:

- |                |                 |                     |                      |                |
|----------------|-----------------|---------------------|----------------------|----------------|
| а) $y = x^3$ ; | б) $y = -x^3$ ; | в) $y = \sqrt{x}$ ; | г) $y = -\sqrt{x}$ ; | д) $y =  x $ . |
|----------------|-----------------|---------------------|----------------------|----------------|

- С 15.** Побудуйте коло. Укажіть координати центра кола:  
 а)  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ ; б)  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ ; в)  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ;  
 г)  $x^2 + (y+3)^2 = 4$ ; д)  $(x+3)^2 + y^2 = 9$ ; е)  $x^2 + y^2 = 5$ .
- С 16.** Побудуйте графік квадратичної функції. Укажіть координати вершини параболи:  
 а)  $y = x^2 + 2x$ ; б)  $y = x^2 - 2x + 3$ ; в)  $y = -x^2 + 5x - 6$ ;  
 г)  $y = (2-x)(x-4)$ ; д)  $y = x^2 + 4x + 4$ ; е)  $y = -x^2 - 2x - 1$ .
- С 17.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(x-a)$ . Укажіть область визначення функції.  
 а)  $y = \sqrt{x-1}$ ; б)  $y = \frac{1}{x+1}$ ; в)  $y = |x+2|$ ; г)  $y = -(x-2)^2$ ;  
 д)  $y = (x-1)^3$ ; е)  $y = \sqrt{x+2}$ ; є)  $y = -\frac{1}{x-1}$ ; ж)  $y = |1-x|$ .
- Д 18.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(x)+b$ . Знайдіть множину значень функції:  
 а)  $y = \sqrt{x-1}$ ; б)  $y = \frac{1}{x} + 1$ ; в)  $y = |x| + 2$ ; г)  $y = -x^2 - 2$ ;  
 д)  $y = x^3 - 1$ ; е)  $y = \sqrt{x} + 2$ ; є)  $y = -\frac{1}{x} - 1$ ; ж)  $y = 1 - |x|$ .
- Д 19.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(x-a)+b$ :  
 а)  $y = (x-1)^2 + 1$ ; б)  $y = \sqrt{x+1} - 2$ ; в)  $y = 3 - (x+2)^2$ ;  
 г)  $y = 1 - \sqrt{x}$ ; д)  $y = |x-1| - 1$ ; е)  $y = \frac{1}{x+1} - 2$ ;  
 є)  $y = -\frac{1}{x-1} + 1$ ; ж)  $y = -|x+2| + 1$ .
- Д 20.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(-x)$ ,  $y = -f(x)$  або  $y = kf(x)$ :  
 а)  $y = \sqrt{-x}$ ; б)  $y = 2(x-2)^2$ ; в)  $y = -3|x+1|$ ;  
 г)  $y = -2\sqrt{-x}$ ; д)  $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 1$ ; е)  $y = \frac{3}{2-x} - 1$ .
- Д 21.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(kx)$ :  
 а)  $y = \sqrt{2x}$ ; б)  $y = |3x|$ ; в)  $y = -\frac{2}{3x-1}$ .
- Д 22.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(|x|)$ :  
 а)  $y = \sqrt{|x|-1}$ ; б)  $y = \frac{1}{|x|-1} + 1$ ; в)  $y = (|x|-1)^2 - 1$ ;  
 г)  $y = 2 - |x|$ ; д)  $y = x^2 + 2|x| + 1$ ; е)  $y = \frac{1}{|x|+1} + 1$ .

Д 23. Побудуйте графік функції виду  $y = |f(x)|$ :

- а)  $y = |3x+4|$ ;      б)  $y = |4-x^2|$ ;      в)  $y = \left| \frac{1}{x-2} - 2 \right|$ ;  
г)  $y = |x^3-1|$ ;      д)  $y = |x^2+2x|$ ;      е)  $y = ||x-1|-1|$ .

В 24. Побудуйте графік функції виду  $y = |f(|x|)|$ :

- а)  $y = \left| (|x|-2)^2 - 1 \right|$ ;      б)  $y = \left| \frac{2}{1-|x|} - 1 \right|$ ;  
в)  $y = \left| \sqrt{|x|-1} - 2 \right|$ ;      г)  $y = |(1-|x|)(|x|-3)|$ .

В 25. Побудуйте графік рівняння  $|y| = f(x)$ :

- а)  $|y| = 3-x$ ;      б)  $|y| = 4-x^2$ ;      в)  $|y| = x^2-2x-3$ ;  
г)  $|y| = 1+|x|$ ;      д)  $|y| + |x| = 1$ ;      е)  $|x-2y| = 2$ .

Д 26. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

- а)  $y = \frac{x^2-5x+6}{x-2}$ ;      б)  $y = \frac{x+1}{x^2-1}$ ;      в)  $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ ;  
г)  $y = \frac{|x|-1}{|x|}$ ;      д)  $y = \frac{x(x+1)(x-2)\sqrt{3-x}}{x(x+1)(x-2)}$ .

В 27. Побудуйте графік функції:

- а)  $y = x-2+|2-x|$ ;      б)  $y = |2x+3|-2x-4$ ;  
в)  $y = |x+2|+|x-2|$ ;      г)  $y = |3-x|-|x+1|$ .

В 28. Побудуйте графік функції:

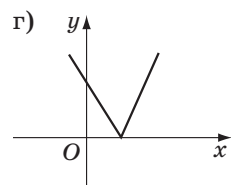
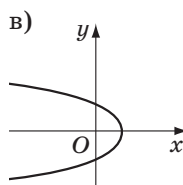
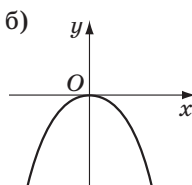
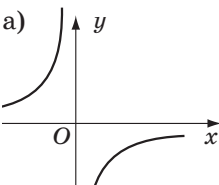
- а)  $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-2x+1}$ ;      б)  $y = -x + \sqrt{(x+2)^2-8x}$ ;  
в)  $y = \sqrt{x^2} + \sqrt{x^2-2x+1} - x$ .

В 29. Побудуйте графік функції:

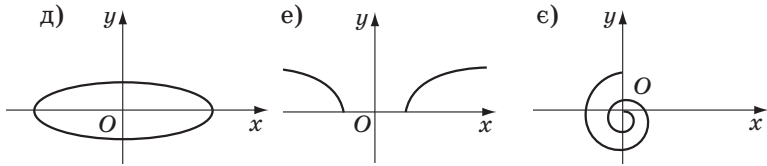
- а)  $y = \frac{|x-1|}{|x|-1}$ ;      б)  $y = |x|(x-1)$ ;      в)  $y = x(|x|-1)$ ;  
г)  $y = x \cdot |x-1|$ ;      д)  $y = |x-1|(|x|-1)$ .

..... *Варіант 2* .....

С 1. Серед наведених на рисунках графіків укажіть графіки функцій:







**С** 2. Знайдіть значення функції при заданому значенні аргументу:

- а)  $f(x) = 4x + 1$  при  $x = -\frac{1}{4}$ ;  
 б)  $f(n) = \frac{5-2n}{1+n}$  при  $n = 1$ ;  
 в)  $f(x) = 2x - 3 - x^3$  при  $x = 3$ ;  
 г)  $f(t) = \frac{3}{5} \cdot 5^{1-t}$  при  $t = -1$ ;  
 д)  $f(z) = \sqrt{\sqrt{4-z} - z + 1}$  при  $z = -5$ ;  
 е)  $f(y) = \sqrt{(3y+2)^2 - 24y}$  при  $y = -1$ .

**С** 3. Знайдіть значення функції:

- а)  $f(0)$ ;  $f(-x)$ ;  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ , якщо  $f(x) = \frac{2-x}{x+2}$ ;  
 б)  $f(0)$ ;  $f(3)$ , якщо  $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{при } x < 2, \\ (x-2)^2 + 1 & \text{при } x \geq 2; \end{cases}$   
 в)  $f(-10)$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ;  $f(3)$ , якщо  $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x < -1, \\ -1 & \text{при } -1 \leq x \leq 1, \\ (x-1)^2 - 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$

**Д** 4. Знайдіть область визначення функції:

- а)  $y = -\frac{5}{x+1}$ ; б)  $y = \frac{6}{2-x}$ ; в)  $y = \frac{3}{(x-3)x}$ ;  
 г)  $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{4}{x-2}$ ; д)  $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ ; е)  $y = \frac{3}{|x|-2}$ .

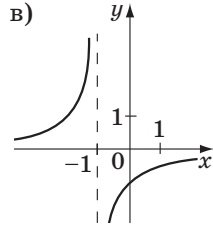
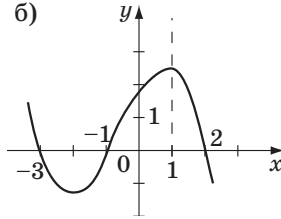
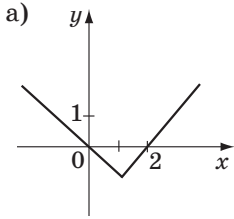
**Д** 5. Знайдіть область визначення функції:

- а)  $y = \sqrt{(2-x)(3-x)}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{2-x}{3+x}}$ ; в)  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{9-x^2}$ ;  
 г)  $f(x) = \frac{5x}{x^2-4} - \sqrt{9-x^2}$ ; д)  $y = \frac{1}{\sqrt{|x|-4}}$ ; е)  $f(x) = \sqrt{-4-5x-x^2}$ .

**С** 6. Знайдіть множину значень функції:

- а)  $y = -2x^2$ ; б)  $y = x^2 + 1$ ; в)  $y = -x^3$ ; г)  $y = |5-4x|$ ;  
 д)  $y = \sqrt{2-x}$ ; е)  $y = x^2 - 2x + 1$ ; є)  $y = -\frac{2}{x}$ ; ж)  $y = -\frac{1}{x+1} - 1$ .

**С** 7. Користуючись рисунком, знайдіть проміжки зростання і спадання функції, заданої графічно:



**Д** 8. Доведіть, що функція, яка задана формулою:

- а)  $y = x + 3$ , зростає на всій числовій прямій;
- б)  $y = \frac{1}{x} + 1$ , спадає при  $x \in (-\infty; 0)$ ;
- в)  $y = 4 - x^2$ , зростає при  $x \in (-\infty; 0]$ ;
- г)  $y = (x + 1)^2 - 1$ , спадає при  $x \in (-\infty; -1]$ ;
- д)  $y = \sqrt{2 - x}$ , спадає при  $x \in (-\infty; 2]$ ;
- е)  $y = \frac{x + 1}{x - 2}$ , спадає при  $x \in (2; +\infty)$ .

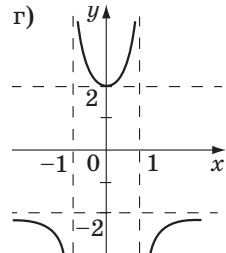
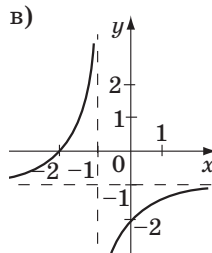
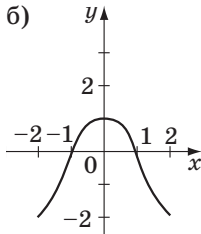
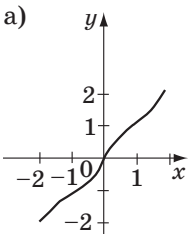
9. Дослідіть на парність функцію, що задана формулою:

**С** а)  $y = 1 - 2x$ ; б)  $y = 5 - x^2$ ; в)  $y = \frac{1}{3}x^3$ ; г)  $y = -\frac{3}{x}$ ;

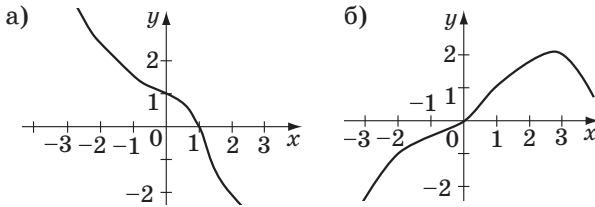
**Д** д)  $y = \sqrt{\frac{8 + x^2}{1 - x^8}}$ ; е)  $y = \frac{x + 2}{x^2 - 9}$ ;

**В** є)  $y = x^4 + x^2 + |x|$ ; ж)  $y = |3 - x| - |3 + x|$ ; з)  $y = \frac{(3 + x)^2}{2 - x} + \frac{(3 - x)^2}{2 + x}$ .

**С** 10. Користуючись заданим на рисунку графіком, установіть властивості функції (знайдіть нулі функції, область визначення і множину значень, проміжки зростання і спадання, найбільші та найменші значення функції; дослідіть функцію на парність):



- С 11. Користуючись заданим на рисунку графіком, знайдіть значення функції при значеннях аргументу  $x = -3; -2; 1$  і значення аргументу за значеннями функції  $f(x) = -2; 1; 2$ .



- С 12. Побудуйте графік лінійної функції. Укажіть, чи є функція зростаючою або спадною:

- а)  $y = 3x$ ;      б)  $y = -x - 1$ ;      в)  $y = 2 - 3x$ ;  
 г)  $-4x + y = 4$ ;      д)  $2x - y = 2$ ;      е)  $2x - 3y + 6 = 0$ ;  
 є)  $x + 1 = 0$ ;      ж)  $y = -1$ ;      з)  $0 \cdot x - 2y = -6$ .

- С 13. Побудуйте графік функції; знайдіть її область визначення; дослідіть функцію на парність.

- а)  $y = -\frac{1}{x}$ ;      б)  $y = \frac{3}{x}$ ;      в)  $xy = -2$ ;  
 г)  $y = -x^2$ ;      д)  $y = \frac{1}{3}x^2$ ;      е)  $y = 2x^2$ .

- С 14. Побудуйте графік функції. Встановіть, чи є функція парною. Укажіть найбільше значення функції, якщо воно є:

- а)  $y = x^4$ ;      б)  $y = -x^5$ ;      в)  $y = 2x^3$ ;      г)  $y = -|x|$ ;      д)  $y = 2\sqrt{x}$ .

- С 15. Побудуйте коло. Укажіть координати центра кола:

- а)  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$ ;      б)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ ;      в)  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ ;  
 г)  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ;      д)  $x^2 + y^2 = 4$ ;      е)  $x^2 + y^2 = 10$ .

- С 16. Побудуйте графік квадратичної функції. Укажіть координати вершини параболи:

- а)  $y = x^2 - 4x$ ;      б)  $y = x^2 + 3x + 2$ ;      в)  $y = 3x^2 - 2x - 1$ ;  
 г)  $y = (x-3)(1-x)$ ;      д)  $y = -x^2 + 6x - 9$ ;      е)  $y = x^2 + 2x + 4$ .

- С 17. Побудуйте графік функції виду  $y = f(x-a)$ . Укажіть область визначення функції:

- а)  $y = \sqrt{x-3}$ ;      б)  $y = \frac{1}{x-2}$ ;      в)  $y = |x-3|$ ;      г)  $y = -(x+1)^2$ ;  
 д)  $y = (x+1)^3$ ;      е)  $y = \sqrt{1+x}$ ;      є)  $y = -\frac{2}{x+1}$ ;      ж)  $y = -|3+x|$ .

**Д 18.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(x) + b$ . Знайдіть множину значень функції:

а)  $y = 1 + \sqrt{x}$ ; б)  $y = 1 + \frac{2}{x}$ ; в)  $y = 2 - |x|$ ; г)  $y = x^2 - 4$ ;  
 д)  $y = -x^3 + 1$ ; е)  $y = 2 - \sqrt{x}$ ; є)  $y = -\frac{1}{x} + 2$ ; ж)  $y = 1 + |x|$ .

**Д 19.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(x - a) + b$ :

а)  $y = (x - 2)^2 - 1$ ; б)  $y = \sqrt{x - 1} + 2$ ; в)  $y = -1 - (x + 1)^2$ ;  
 г)  $y = 3 - \sqrt{x + 2}$ ; д)  $y = |x + 3| + 1$ ; е)  $y = \frac{1}{x - 1} + 1$ ;  
 є)  $y = -\frac{1}{x + 1} - 2$ ; ж)  $y = -|x - 1| - 2$ .

**Д 20.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(-x)$ ,  $y = -f(x)$  або  $y = kf(x)$ :

а)  $y = \sqrt{1 - x}$ ; б)  $y = -2(x + 1)^2$ ; в)  $y = \frac{1}{2}|x - 1|$ ;  
 г)  $y = -3\sqrt{x}$ ; д)  $y = -2 - (1 - x)^2$ ; е)  $y = -\frac{2}{3 + x} + 2$ .

**Д 21.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(kx)$ :

а)  $y = \sqrt{-3x - 6}$ ; б)  $y = \sqrt{-2x^2}$ ; в)  $y = \left| \frac{x}{2} \right|$ ; г)  $y = \frac{3}{2x + 1}$ .

**Д 22.** Побудуйте графік функції виду  $y = f(|x|)$ :

а)  $y = \sqrt{|x| + 1}$ ; б)  $y = \frac{1}{|x| - 2} - 1$ ; в)  $y = (|x| - 2)^2 + 1$ ;  
 г)  $y = -1 - 2|x|$ ; д)  $y = x^2 - 2|x| - 3$ ; е)  $y = \frac{1}{|x| + 2} - 2$ .

**Д 23.** Побудуйте графік функції виду  $y = |f(x)|$ :

а)  $y = |3x - 1|$ ; б)  $y = |x^2 - 1|$ ; в)  $y = \left| \frac{2}{x + 1} - 1 \right|$ ;  
 г)  $y = |\sqrt{x - 1} - 1|$ ; д)  $y = |x^2 + 2x - 3|$ ; е)  $y = ||x + 1| - 2|$ .

**В 24.** Побудуйте графік функції виду  $y = |f(|x|)|$ :

а)  $y = |x^2 - |x| - 6|$ ; б)  $y = |x^2 + 3|x| + 2|$ ;  
 в)  $y = |\sqrt{1 - |x|} - 1|$ ; г)  $y = \left| \frac{2}{|x| + 1} - 1 \right|$ .

**В 25.** Побудуйте графік рівняння  $|y| = f(x)$ :

а)  $|y| = 2 + x$ ; б)  $|y| = 1 - x^2$ ; в)  $|y| = x^2 + 2x + 3$ ;  
 г)  $|x| - |y| = 2$ ; д)  $|2x| + |y| = 2$ ; е)  $|2x + 3y| = 6$ .

**Д** 26. Знайдіть область визначення і побудуйте графік функції:

а)  $y = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 5}$ ;      б)  $y = \frac{2 - x}{x^2 - 4}$ ;      в)  $y = \frac{|x + 1|}{x + 1}$ ;  
 г)  $y = \frac{2 - |x|}{|x|}$ ;      д)  $y = \frac{(x - 1)(x + 2)(x + 3)}{(x - 1)(x + 2)(x + 3)} \sqrt{x + 4}$ .

**В** 27. Побудуйте графік функції:

а)  $y = x + 3 - |3 - x|$ ;      б)  $y = |1 - 2x| + 3 - 2x$ ;  
 в)  $y = |x| + |x - 2|$ ;      г)  $y = |2 - x| - |x + 3|$ .

**В** 28. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} - \sqrt{x^2}$ ;      б)  $y = 2x + \sqrt{(2x - 1)^2 + 8x}$ ;  
 в)  $y = \sqrt{(1 - x)^2} + \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x$ .

**В** 29. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \frac{|x| + 1}{|x + 1|}$ ;      б)  $y = (x + 1)|x|$ ;      в)  $y = |x + 1| \cdot x$ ;  
 г)  $y = (|x| + 1)x$ ;      д)  $y = |x + 1|(|x| + 1)$ .

**Тест 2. Числові функції** .....

*Варіант 1* .....

**П** 1. Дослідіть на парність функцію  $y = \sqrt{3x - 2}$ .

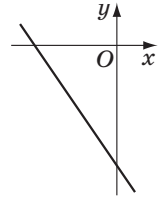
А	Б	В	Г	Д
Парна	Непарна	Непарна при $x \geq \frac{2}{3}$	Ні парна, ні непарна	Визначити неможливо

**П** 2. Відомо, що для будь-якого  $x > 0$   $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + 1}$ . Знайдіть  $f(x)$ .

А	Б	В	Г	Д
$x + 1$	$\frac{1}{x + 1}$	$\frac{x}{x + 1}$	$\frac{1}{x - 1}$	$\frac{x}{x - 1}$

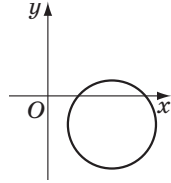
**П** 3. Укажіть функцію, яка найточніше відповідає графіку, зображеному на рисунку.

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x - 3$	$y = -2x + 3$	$y = 2x + 3$	$y = -2x$	$y = 2x - 3$



**П 4.** Виберіть рівняння, яке задає множину точок, що найточніше відповідає графіку, зображеному на рисунку.

А	Б	В
$x^2 - 6x + y^2 + 5 = 0$	$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4$	$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$
Г		Д
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$		$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$



**П 5.** Укажіть правильне твердження.

А	Б	В
Будь-яка функція має найбільше значення	Область визначення будь-якої функції дорівнює її множині значень	Функція $y = 2x^2 -  x $ — парна
Г		Д
Області визначення функції $y = \sqrt{(x-1)(x+2)}$ належить нуль		Множині значень функції $y = \frac{x+3}{x-2}$ належить 1

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

**С 6.** Установіть відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції  $y = x^2$  (1–4) і функціями, графіки яких отримані в результаті цих перетворень (А–Д).

- |   |   |                  |
|---|---|------------------|
| 1 | Графік функції $y = x^2$ перенесли вздовж осі $Ox$ на дві одиниці праворуч  | А $y = -x^2 - 2$ |
| 2 | Графік функції $y = x^2$ перенесли вгору вздовж осі $Oy$ на дві одиниці   | Б $y = 2x^2$     |
| 3 | Графік функції $y = x^2$ відобразили симетрично відносно осі $Ox$ , а потім перенесли вздовж осі $Oy$ на дві одиниці вниз | В $y = (x-2)^2$  |
| 4 | Графік функції $y = x^2$ розтягли у два рази від осі $Ox$   | Г $y = (2x)^2$   |
|   |   | Д $y = x^2 + 2$  |

**С 7.** Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{x^2(1-x)}{1+x}}$ .

**Д 8.** Укажіть парність функції  $y = (5-x)^2 - (5+x)^2$ .

Д 9. Дано функцію  $y = \frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}$ .

- а) Знайдіть область визначення функції;  
 б) знайдіть множину значень функції;  
 в) дослідіть функцію на парність;  
 г) знайдіть множину значень  $x$ , при яких функція спадає;  
 д) побудуйте графік функції.

В 10. Побудуйте графік функції  $y = \frac{|x+1|}{(x+1)^2}$ .

Варіант 2

П 1. Дослідіть функцію  $y = \sqrt{1+2x}$  на парність.

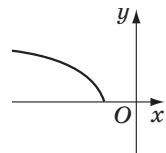
А	Б	В	Г	Д
Непарна при $x < -\frac{1}{2}$	Непарна	Парна	Ні парна, ні непарна	Визначити неможливо

П 2. Відомо, що для будь-якого  $x > 0$   $f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Знайдіть  $f\left(\frac{1}{x}\right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{1-x}$	$x-1$	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x+1}{x}$	$\frac{x}{1-x}$

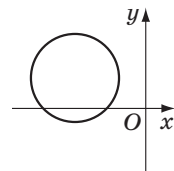
П 3. Укажіть функцію, яка найточніше відповідає графіку, зображеному на рисунку.

А	Б	В
$y = \sqrt{4-x}$	$y = \sqrt{x+4}$	$y = -\sqrt{-4-x}$
Г	Д	
$y = \sqrt{x-4}$	$y = \sqrt{-x-4}$	



П 4. Виберіть рівняння, яке задає множину точок, що найточніше відповідає графіку, зображеному на рисунку.

А	Б	
$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 4$	$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$	
В	Г	Д
$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$	$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 1$	$x^2 + 6x + y^2 = 8$



**П** 5. Укажіть неправильне твердження.

	<p align="center"><b>А</b></p> <p>На рисунку зображено графік парної функції</p>	<p align="center"><b>Б</b></p> <p>Функція <math>y = (x-1)^2</math> зростає на всій числовій прямій</p>
<p align="center"><b>В</b></p> <p><math>y = \frac{x^3}{1+x^2}</math> — непарна функція</p>	<p align="center"><b>Г</b></p> <p>Областю визначення функції <math>y = \frac{1}{x^2+1} \in \mathbf{R}</math></p>	<p align="center"><b>Д</b></p> <p>Множина значень функції <math>y = \frac{1}{x^4}</math> <math>E(y) = (0; +\infty)</math></p>

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

**С** 6. Установіть відповідність між геометричними перетвореннями графіка функції  $y = \sqrt{-x}$  (1–4) і функціями, графіки яких отримані в результаті цих перетворень (А–Д).

- |   |  |                              |
|---|--|------------------------------|
| 1 | Графік функції $y = \sqrt{-x}$ перенесли вздовж осі $Ox$ на дві одиниці праворуч | А $y = \sqrt{-2x}$           |
| 2 | Графік функції $y = \sqrt{-x}$ перенесли вздовж осі $Oy$ на дві одиниці вниз     | Б $y = \sqrt{-x+2}$          |
| 3 | Графік функції $y = \sqrt{-x}$ стисли до осі $Oy$ у два рази                     | В $y = 2\sqrt{-x}$           |
| 4 | Графік функції $y = \sqrt{-x}$ стисли до осі $Ox$ у два рази                     | Г $y = \sqrt{-x-2}$          |
|   |  | Д $y = \frac{1}{2}\sqrt{-x}$ |

**С** 7. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{1+x}{x^2(2-x)}}$ .

**Д** 8. Укажіть парність функції  $y = (3+x)^2 + (3-x)^2$ .

**Д** 9. Дано функцію  $y = \frac{(x+1)(4-x^2)}{x+1}$ .

- Знайдіть область визначення функції;
- знайдіть множину значень функції;
- дослідіть функцію на парність;
- знайдіть множину значень  $x$ , при яких функція зростає;
- побудуйте графік функції.

**В** 10. Побудуйте графік функції  $y = \frac{|x-2|}{(x-2)^2}$ .



**☑ Контрольна робота 1. Числові функції** .....

..... *Варіант 1* .....

**П**

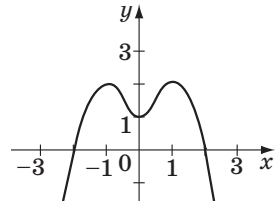
**1. Знайдіть:**

- а) значення функції  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  при  $x = -1$ ;
- б) область визначення функції  $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}$ ;
- в) множину значень функції  $y = \frac{1}{x^2+1}$ .

**П**

**2. Функцію задано графічно (див. рисунок). Укажіть:**

- а) нулі функції та її парність;
- б) проміжки зростання і спадання функції;
- в) значення  $x$ , при яких функція додатна;
- г) найбільше значення функції.



**С**

**3. Дослідіть функцію на парність:**

- а)  $y = x^8 + 4x^3$ ;
- б)  $y = \sqrt{4-x^2}$ ;
- в)  $y = \frac{|x|}{x^3+2x}$ .

**С**

**4. Використовуючи геометричні перетворення, побудуйте графік функції:**

- а)  $y = (x-1)^2$ ;
- б)  $y = \sqrt{x} + 2$ ;
- в)  $y = \frac{3}{x+1} + 1$ .

**Д**

**5. Побудуйте графік:**

- а)  $y = x^2 - 2|x| - 8$ ;
- б)  $y = |1 - \sqrt{x-1}|$ ;
- в)  $|y| = \frac{1}{x+1} - 1$ .

**В**

**6. Зобразіть на координатній площині  $xOy$  множину точок, координати яких задовольняють задане рівняння:**

- а)  $y = \frac{|x|-2x}{|x|}$ ;
- б)  $|y| + x = |x|$ ;
- в)  $(|x|-1)^2 + (|y|-2)^2 = 1$ .

..... *Варіант 2* .....

**П**

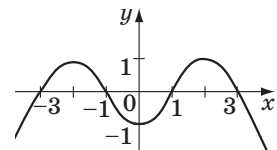
**1. Знайдіть:**

- а) значення функції  $f(x) = 2 - x - 2x^2$  при  $x = 1$ ;
- б) область визначення функції  $y = \sqrt{1-x} - \sqrt{x+5}$ ;
- в) множину значень функції  $y = \frac{2}{x^2+3}$ .

**П**

**2. Функцію задано графічно (див. рисунок). Укажіть:**

- а) нулі функції та її парність;
- б) проміжки зростання і спадання функції;



- в) значення  $x$ , при яких функція від'ємна;  
 г) найбільше значення функції.

**С** 3. Дослідіть функцію на парність:

а)  $y = \frac{x^3 - 3x^5}{x - 3}$ ;      б)  $y = \sqrt{x^2 - 6}$ ;      в)  $y = \frac{3x^3 + x^5 + x}{|x|}$ .

**С** 4. Використовуючи геометричні перетворення, побудуйте графік функції:

а)  $y = (x + 2)^2$ ;      б)  $y = 1 - \sqrt{x}$ ;      в)  $y = -\frac{1}{x - 1} - 2$ .

**Д** 5. Побудуйте графік:

а)  $y = x^2 - |x| - 6$ ;      б)  $y = |\sqrt{x + 2} - 1|$ ;      в)  $|y| = \frac{1}{x - 1} + 1$ .

**В** 6. Зобразіть на координатній площині  $xOy$  множину точок, координати яких задовольняють задане рівняння:

а)  $y = \frac{x - 2|x|}{x}$ ;      б)  $|y| - 2x = |x|$ ;      в)  $(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 1$ .

### ЧАСТИНА 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Тренувальні вправи

Варіант 1

► Розв'язування рівнянь

**С** 1. Укажіть, чи є рівносильними рівняння:

а)  $2x = 4$  і  $4(x + 1,5) = 14$ ;      б)  $x^2 - 9 = 0$  і  $x + 9 = 6$ ;  
 в)  $|x| = -3$  і  $\frac{2}{x^2 + 9} = 0$ ;      г)  $(x - 2)(x + 3) = 0$  і  $\frac{x + 3}{x - 2} = 0$ ;  
 д)  $x^2 + 6x - 40 = 0$  і  $|x + 3| = 7$ ;      е)  $\sqrt{x} = 2$  і  $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = 0$ .

**С** 2. Розв'яжіть рівняння і поясніть, які рівносильні перетворення були використані:

а)  $0,8(2,2(x - 1) - 1) - 1,4x = -0,4$ ;  
 б)  $2\left(3\frac{3}{4} - 2x\right) + 2,5 = 1\frac{2}{9} - \left(-x + \frac{2}{3}\right)$ ;  
 в)  $\frac{2x - 1}{8} + \frac{3x - 2}{4} - \frac{2x - 3}{2} = \frac{7}{8}$ ;

- г)  $\frac{5x-x^2}{2} = \frac{x^2+3x}{5}$ ;  
 д)  $(x+2)(4x-5) = -18$ ;  
 е)  $(2x-5)(x+3) = x(x-5)+1$ ;  
 є)  $(2x+3)^2 = (x-1)(x+1)$ ;  
 ж)  $\frac{6y+1}{6} - \frac{4y^2-3}{4} = \frac{7}{6}$ ;  
 з)  $\frac{(3x-4)^2}{5} + \frac{(2x-5)(x-1)}{2} = 1 + \frac{(x+2)^2}{5}$ .

**Д** 3. Розв'яжіть дрібно-раціональне рівняння і поясніть, яке перетворення могло б привести до порушення рівносильності:

- а)  $\frac{x+3}{x-1} = \frac{2x}{2x+3}$ ; б)  $\frac{2x^2-8x}{x} = 0$ ; в)  $\frac{y^2}{y+3} = \frac{y+12}{y+3}$ ;  
 г)  $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1} = 0$ ; д)  $\frac{5x+4}{x-2} - \frac{4x+1}{x+3} = 1$ ; е)  $\frac{2x-9}{1-x} + \frac{2x+1}{x+1} = \frac{1}{1-x^2}$ .

**В** 4. Розв'яжіть за допомогою рівносильних перетворень рівняння:

- а)  $\frac{x}{x-3} - \frac{x-10}{x+2} = 5$ ; б)  $\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{x+2}{x^3-1}$ ;  
 в)  $\frac{3}{x^2-4x+4} + \frac{2}{x^2+4x+4} = \frac{7}{x^2-4}$ ; г)  $\frac{2}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2+3x+2} = \frac{4}{x^2-4}$ ;  
 д)  $\frac{2}{x-5} + \frac{7x}{x+3} + \frac{14}{x^2-2x-15} = 0$ ; е)  $\frac{2x+7}{x^2+5x-6} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{1}{x+3}$ .

**С** 5. Укажіть, при якій умові є рівносильними рівняння:

- а)  $\frac{f(x)}{x^2+7x-12} = 0$  і  $f(x) = 0$ ;  
 б)  $\frac{f(x)}{\sqrt{4-x}} = 0$  і  $f(x) = 0$ ;  
 в)  $\frac{f(x)}{1+3x} = g(x)$  і  $f(x) = (1+3x)g(x)$ ;  
 г)  $\frac{f(x)}{x+2} = \frac{g(x)}{x+2}$  і  $f(x) = g(x)$ ;  
 д)  $f(x) + \sqrt{5-x} = g(x) + \sqrt{5-x}$  і  $f(x) = g(x)$ ;  
 е)  $f(x) + \sqrt{1-25x^2} = g(x) + \sqrt{1-25x^2}$  і  $f(x) = g(x)$ .

- Д** 6. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків:  
 а)  $5x + \sqrt{x+1} = 2 - x + \sqrt{x+1}$  ; б)  $7x + 8 + \sqrt{x-4} = 2x + \sqrt{x-4} - 7$  ;  
 в)  $\sqrt{16-3x} = x-2$  ; г)  $\sqrt{x^2+11} = x-1$  .

- В** 7. Знайдіть множину коренів рівняння, замінивши її рівносильною системою або сукупністю рівнянь:  
 а)  $(x^2 - 2x - 15)(x^2 - 6x + 5) = 0$  ; б)  $\sqrt{5-2x}(2x-3) = 0$  ;  
 в)  $(x^2 - 9)^2 + (x^2 + 6x + 9)^2 = 0$  ; г)  $\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2-x-x^2} = 0$  .

► Застосування властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь

- Д** 8. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:  
 а)  $\sqrt{3-x} + x^2 = \sqrt{x^2-3x} + 3x$  ; б)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{10-5x} = 0,5x-1$  ;  
 в)  $\sqrt{x-6} + 3x = \sqrt{2-x} - 3$  .

- В** 9. Розв'яжіть рівняння:  
 а)  $\sqrt{16+x^2} = 4-x^2$  ; б)  $1 + |x^2 - 2x| = \sqrt{1-x^2}$  ;  
 в)  $|2x-3| = 12x-4x^2-9$  ; г)  $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2+1} = 2 - |x|$  .

- Д** 10. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:  
 а)  $x^3 + 6x = -7$  ; б)  $x^2 + \sqrt{2x+1} = 19$  ;  
 в)  $2\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 5$  ; г)  $2\sqrt[3]{x-1} + \sqrt{x} = 7$  .

- В** 11. Розв'яжіть рівняння, використовуючи монотонність функцій:  
 а)  $2x^3 = 22 - 3x$  ; б)  $3\sqrt{x+3} + 2x = 9 - x$  ;  
 в)  $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{x^2+8}$  ; г)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 3 - x$  .

► Розв'язування нерівностей за допомогою рівносильних перетворень

- С** 12. Укажіть, чи є рівносильними нерівності:  
 а)  $(3x-11)(2\sqrt{3}-3) > 0$  і  $3x-11 > 0$  ;  
 б)  $(x^2-x-2)(5\sqrt{2}-3\sqrt{6}) > 0$  і  $x^2-x-2 < 0$  ;  
 в)  $(5,4-6x)(7x^2+1) > 7x^2+1$  і  $5,4-6x > 1$  ; г)  $x^2 < 9$  і  $x < 3$  ;  
 д)  $\sqrt{x} < 5$  і  $x^2 < 25$  ; е)  $\frac{x-1}{x+4} > 0$  і  $(x-1)(x+4) > 0$  .

- Д 13.** Доведіть, що будь-яке число є розв'язком нерівності:  
 а)  $5x(x-11) - (6x+4)(x-1) < 7-53x$ ; б)  $\frac{3x^2+1}{4} + \frac{x(2-x)}{2} > x-1$ .
- Д 14.** Доведіть, що множиною розв'язків нерівності є порожня множина.  
 а)  $(6x+1)(x-2) - (2x-3)^2 < x-17$ ;  
 б)  $\frac{(5-2x)(2x+5)}{8} - \frac{(x-1)(x+1)}{4} > 6$ .
- Д 15.** За допомогою рівносильних перетворень розв'яжіть нерівність:  
 а)  $2(3-2x) + 3(2-x) \leq -2$ ; б)  $5,6(y-3) - 2,8(3y-2) < 0$ ;  
 в)  $\frac{0,1x}{6} - \frac{0,3x+2}{12} \geq -\frac{1}{4}$ ; г)  $(x-3)(2-x) \geq 0$ ;  
 д)  $\frac{7-y}{8+y} \geq 0$ ; е)  $\frac{x+3}{x+1} \geq \frac{3x-5}{x+1}$ ;  
 є)  $\frac{x}{2x-4} \geq 1$ ; ж)  $\frac{x^2-3x}{x+2} \geq \frac{4}{x+2}$ ;  
 з)  $\frac{x^2-x-6}{x^2-2x+1} \leq 0$ .

► Метод інтервалів

- С 16.** Розв'яжіть нерівність:  
 а)  $(x-1,2)(x+4) \leq 0$ ; б)  $(x+2)(x-1)(x-5) > 0$ ;  
 в)  $(2x+5)(2x-3)(x-6) \geq 0$ ; г)  $(2+x)(x+10)(3-x) > 0$ ;  
 д)  $(x+3,5)(2x-1)(4-x) \leq 0$ ; е)  $(4x+1)(4-8x)(2x+3)(7-4x) \geq 0$ .
- Д 17.** Розв'яжіть нерівність:  
 а)  $\frac{x+2}{x-1} < 0$ ; б)  $\frac{x-4}{x+5} > 0$ ; в)  $\frac{x-1,5}{x+2,5} \leq 0$ ;  
 г)  $\frac{3-x}{x+6} \geq 0$ ; д)  $\frac{(x+1)(x+4)}{x-6} \leq 0$ ; е)  $\frac{x+2,4}{(3-x)(x+3,2)} \leq 0$ .
- Д 18.** Розв'яжіть нерівність:  
 а)  $(x^2+2x)(x^2-25) \leq 0$ ; б)  $(x^2-7x+6)(x^2-3x) > 0$ ;  
 в)  $\frac{x^2-7x+10}{x^2+5x+6} < 0$ ; г)  $\frac{x^2+6x-7}{x^2-16} \geq 0$ .
- Д 19.** Знайдіть область визначення функції:  
 а)  $y = \sqrt{(x-1)(x+2)(x^2-25)}$ ; б)  $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-3x-10}}$ .

**Д** 20. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

- а)  $(x^2+1)(x^2+2x-3) \leq 0$ ;      б)  $(x+3)^2(x^2+2x-24) < 0$ ;  
в)  $(x+3)^2(x^2+2x-24) \leq 0$ ;      г)  $(x+3)^2(x^2+2x-24) > 0$ ;  
д)  $(x+3)^2(x^2+2x-24) \geq 0$ ;      е)  $(x-1)^3(x+2)^2(x-4)^4 > 0$ ;  
е)  $(x-1)^3(x+2)^2(x-4)^4 \leq 0$ ;      ж)  $(x^2+9x+14)(x^2+5x+7) \geq 0$ .

**В** 21. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\frac{(x^2-9)(x+1)}{x^2-2x+1} \geq 0$ ;      б)  $(x+5)(3x^2-3x+1) > (x+5)(x^2+2x-1)$ ;  
в)  $\frac{(x^2-x-2)(x^2+x-6)}{x^2-5x+4} \leq 0$ ;      г)  $\frac{7x+4}{3-2x} \geq 2$ ;  
д)  $\frac{8-x}{x-10} \leq \frac{2}{2-x}$ ;      е)  $\frac{5-4x}{3x^2-x-4} < 4$ .

► Рівняння і нерівності, що містять знак модуля

**С** 22. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $|x| = 3$ ;      б)  $|2x-5| = 7$ ;      в)  $|x^2-4| = 5$ ;  
г)  $|x^2-2x| = 3$ ;      д)  $||x+2|-2| = 0$ ;      е)  $||x+2|-2| = 1,5$ .

**Д** 23. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $|x^2+3x-4| = 3x$ ;      б)  $|x^2-4x-12| = 6-x$ ;  
в)  $|x^2-4x+3| = 2x-2$ ;      г)  $x^2-5x+6 = |2x-6|$ ;  
д)  $|x^2+6x+8| = |7x-6|$ ;      е)  $|3x^2-5x-2| = |x^2+6x-16|$ .

**Д** 24. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $|x+4| + |x-3| = 7$ ;      б)  $|x+4| - |x-3| = 1$ ;  
в)  $|x| + |x-1| + |x-2| = 6$ ;      г)  $|x| + |x-1| + |x-2| = 2$ .

**В** 25. Знайдіть корені рівняння:

- а)  $2x^2 + |x| - 1 = 0$ ;      б)  $x^2 - 2|x-1| - 3 = 0$ ;  
в)  $x^2 - 4|x-3| + 2 = 0$ ;      г)  $x^2 + \frac{x+1}{|x+1|} = 10$ ;  
д)  $\frac{|x|-2x^2}{x^2-4|x|-2} = 1$ ;      е)  $\frac{3x-2}{x} - \frac{3x+4}{x^2-2x} = \frac{1}{|x-2|}$ .

**В** 26. Побудуйте графік функції:

- а)  $y = |x-1| + |x-2|$ ;      б)  $y = x^2 - |x| - 6$ ;  
в)  $y = |x^2 - x - 6|$ ;      г)  $y = |x-3|(x+1)$ .

С 27. Розв'яжіть нерівність:

а)  $|5x+2| \leq 3$ ;

б)  $|7-3x| > 9$ ;

в)  $|x^2-2x| < 3$ ;

г)  $|x^2-4x+3| \geq 1$ .

Д 28. Побудуйте графік функції  $y = |x| + |x-2|$  та за допомогою графіка розв'яжіть нерівність:

а)  $|x| + |x-2| \leq 4$ ;

б)  $|x| + |x-2| > 5$ ;

в)  $|x| + |x-2| \leq 2$ ;

г)  $|x| + |x-2| > 1$ .

Д 29. Розв'яжіть нерівність:

а)  $|x+1| + |x-2| < 5$ ;

б)  $|x+2| + |x-3| > 7$ ;

в)  $|x+3| - |x-4| \leq 1$ ;

г)  $|x+2| - |x-3| \geq 2x-1$ .

Д 30. Розв'яжіть нерівність:

а)  $|x^2-6x+8| \leq 2x+1$ ;

б)  $|x^2-2x-25| > x^2+1$ ;

в)  $|x^2-7x+6| \leq x^2+x-2$ ;

г)  $x^2 + |x-3| - 9 < 0$ .

В 31. Розв'яжіть нерівність:

а)  $\frac{4}{|x+3|-1} \geq |x+2|$ ;

б)  $\frac{4}{|x+1|-2} \leq |x-1|$ .

В 32. Розв'яжіть нерівність  $\left| \frac{x-1}{x^2-16} \right| \leq \frac{x-1}{x^2-16}$ .

В 33. Розв'яжіть нерівність:

а)  $(|x|-3)(|x|-8) \geq 0$ ;

б)  $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} \geq 2x$ ;

в)  $\frac{|x-1|}{x+2} + x-3 > \frac{1}{x+2}$ .

В 34. Розв'яжіть нерівність:

а)  $\left| \frac{2x-1}{x-1} \right| \geq 2$ ;

б)  $\left| \frac{x+4}{x+2} \right| \leq 1$ ;

в)  $\left| \frac{x^2-5x+4}{x^2-4} \right| \leq 1$ .

► Рівняння і нерівності з параметрами

Д 35. При якому значенні  $a$  рівняння є рівносильними:

а)  $x-3a=2$  і  $3x-5a-10=0$ ;

б)  $3x+a=13$  і  $2ax-9x-10=0$ ?

В 36. Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому рівняння мають корені і є рівносильними:

а)  $x^2 + (3a^2 + a + 3)x + 2a^2 + 2a - 5 = 0$

і  $x^2 + (2a^2 + 4a + 1)x + a^2 + a + 1 = 0$ ;





► Графік рівняння з двома змінними

С 47. Які з пар  $(5; 4)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(-5; -4)$ ,  $\left(-1; -\frac{2}{7}\right)$  є розв'язками рівняння:

а)  $x^2 - y^2 = 0$ ;

б)  $x^3 - 1 = x^2y + 6y$ ?

Д 48. Знайдіть множину розв'язків рівняння:

а)  $x^2 + y^2 = 0$ ;

б)  $x^2 + (y-6)^2 = 0$ ;

в)  $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 34 = 0$ ;

г)  $x^4 + y^4 - 8x^2 + 16 = 0$ .

С 49. Побудуйте графік рівняння:

а)  $x + y + 3 = 0$ ;

б)  $3x - y + 4 = 0$ ;

в)  $2x + 3y - 1 = 0$ .

Д 50. Побудуйте графік рівняння:

а)  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ ;

б)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ ;

в)  $x^2 + 2x + y^2 = 3$ ;

г)  $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 9$ .

В 51. Побудуйте графік рівняння:

а)  $|x| = 2$ ;

б)  $|y| = 4$ ;

в)  $|x+y| = 2$ ;

г)  $xy = 3$ ;

д)  $x = -y^2$ ;

е)  $3x^2 + y^2 = 0$ ;

е)  $|x| + |y| = 5$ ;

ж)  $3|x-2|y| = 5$ ;

з)  $y = \sqrt{36 - x^2}$ .

► Нерівність із двома змінними. Графік нерівності з двома змінними

С 52. Укажіть три будь-які пари чисел, які є розв'язками нерівності:

а)  $x < 1$ ;

б)  $y \geq 2x$ ;

в)  $2x - y < 1$ ;

г)  $x^2 + y^2 > 2$ ;

д)  $xy < 6$ ;

е)  $(x-2)^2 + (y+1)^2 \leq 121$ .

Д 53. Зобразіть множину точок на площині, координати яких задовольняють нерівність:

а)  $y > -3$ ;

б)  $y \leq -0,5x + 1$ ;

в)  $4x + y - 2 < 0$ ;

г)  $xy \geq 8$ ;

д)  $x^2 + y^2 \leq 16$ ;

е)  $x^2 + y^2 - 4x - 12y + 40 > 0$ .

Д 54. Зобразіть множину точок координатної площини, що задається нерівністю:

а)  $|x| \leq 2$ ;

б)  $|y| > 3$ ;

в)  $y > |x|$ ;

г)  $y \leq |x-2|$ ;

д)  $|x-y| \leq 3$ ;

е)  $|y-3x| > 5$ ;

е)  $|y| > x$ ;

ж)  $|y| < x+1$ .

В 55. Зобразіть на координатній площині множину точок, що задається нерівністю:

а)  $y \geq |x^2 - 6x + 8|$ ;

б)  $y < x^2 - 6|x| + 8$ ;

в)  $|y| \geq x^2 - 6x + 8$ ;

г)  $|y| \geq x^2 - 6|x| + 8$ ;

д)  $x^2 + y^2 - 4|x| + 4y \leq 1$ ;

е)  $x^2 + y^2 - 6x + 4|y| \leq 3$ .

**В 56.** Зобразіть на координатній площині фігуру, що задається нерівністю  $|x| + |y| \leq 3$ , і обчисліть її площу.

**Д 57.** Покажіть штрихуванням на координатній площині множини точок, координати яких задовольняють систему нерівностей:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4, \\ y < x; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 1, \\ x^2 + y^2 \leq 9; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y \leq 3 - x^2, \\ y > -x; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y \leq 5 - x, \\ y \geq x, \\ y \leq 2x + 4. \end{cases}$$

► Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї

**Д 58.** Виконайте ділення многочлена на многочлен:

- а)  $x^3 + 5x^2 + 10x + 15$  на  $x + 2$ ; б)  $x^4 - 13x^2 + 17x - 15$  на  $x - 3$ ;  
в)  $x^4 + 5x^2 + 6$  на  $x + 2$ ; г)  $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$  на  $x^2 - 2x - 3$ ;  
д)  $x^5 + 2x^2 + 1$  на  $x^3 - 3x + 1$ .

**Д 59.** Методом невизначених коефіцієнтів знайдіть частку і остачу від ділення  $P(x)$  на  $Q(x)$ . Правильність відповіді перевірте, застосувавши ділення «стовпчиком»:

- а)  $P(x) = x^3 - 19x - 3$  на  $Q(x) = x^2 + 1$ ;  
б)  $P(x) = 5x^4 - x^3 - x - 4$  на  $Q(x) = x^2 - 4$ ;  
в)  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x + 2$  на  $Q(x) = x^2 + 2x - 2$ .

**С 60.** Знайдіть остачу від ділення многочлена

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 7x - 1 \text{ на двочлен:}$$

- а)  $x + 1$ ; б)  $x - 2$ ; в)  $2x - 1$ .

**Д 61.** При якому значенні  $a$  остача від ділення многочлена  $x^3 - 3x^2 + 5x + a$  на двочлен  $x - 1$  дорівнює 4?

**Д 62.** При якому значенні  $a$  многочлен  $P(x)$  ділиться без остачі на многочлен  $Q(x)$ :

- а)  $P(x) = x^4 + ax^2 - 12$ ;  $Q(x) = x - 2$ ;  
б)  $P(x) = 3x^3 - 5x^2 + ax - 2$ ;  $Q(x) = x + 1$ ?

**В 63.** Не виконуючи ділення, знайдіть остачу від ділення многочлена  $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$  на квадратний тричлен  $x^2 - x - 2$ .

**В 64.** Остача від ділення многочлена  $P(x)$  на  $x - 2$  і  $x - 3$  відповідно дорівнює 5 і 7. Знайдіть остачу від ділення многочлена  $P(x)$  на  $x^2 - 5x + 6$ .

► Метод математичної індукції

- Д 65.** За допомогою методу математичної індукції доведіть формулу  $n$ -го члена арифметичної прогресії.
- В 66.** Доведіть, що:
- а)  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ;  
б)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ;  
в)  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ;  
г)  $3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + \dots + (n+2)2^n = (n+1)2^{n+1} - 2$ , де  $n \in \mathbb{N}$ .
- В 67.** Доведіть, що при довільному натуральному  $n$ :
- а)  $n^3 + 5n$  ділиться на 6; б)  $4^n + 15n - 1$  ділиться на 9;  
в)  $9^{n+1} - 8n - 9$  ділиться на 16; г)  $6^{n+1} + 7^{2n-1}$  ділиться на 43.
- В 68.** Доведіть нерівність:
- а)  $2^n > n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ; б)  $3^{n+1} > 3n + 2$ , де  $n \in \mathbb{N}$ .

..... *Варіант 2* .....

► Розв'язування рівнянь

- С 1.** Укажіть, чи є рівносильними рівняння:
- а)  $2,5x = 10$  і  $2(x+1) = 10$ ; б)  $x^2 - 16 = 0$  і  $x - 4 = 0$ ;  
в)  $x^2 + 25 = 0$  і  $\frac{5}{x^2 + 4} = 0$ ; г)  $(x-1)(x+5) = 0$  і  $\frac{x-1}{x+5} = 0$ ;  
д)  $x^2 - 8x + 7 = 0$  і  $|x-4| = 3$ ; е)  $\sqrt{x} = 3$  і  $\frac{x^2 - 7x - 18}{x+2} = 0$ .
- С 2.** Розв'яжіть рівняння і поясніть, які рівносильні перетворення були використані:
- а)  $0,4(2x-7) + 1,2(3x+0,7) = 1,6x$ ;  
б)  $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3} - x\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{3} + 3\frac{4}{5}x\right) = 1$ ;  
в)  $\frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{12}$ ;  
г)  $\frac{2x^2 - 3x}{4} = \frac{x^2 + 2x}{3}$ ;  
д)  $(3x-2)(x-3) = 20$ ;  
е)  $(2x+1)(x-3) = x(4-x) - 12$ ;

- є)  $(2x+1)^2 = (1+3x)(3x-1)$ ;  
 ж)  $\frac{y^2+y}{4} = \frac{3-7y}{20} + 0,3$ ;  
 з)  $\frac{x^2-1}{3} - \frac{(x-3)^2}{8} = \frac{(x+3)^2}{4} - 3x$ .

**Д** 3. Розв'яжіть дрібно-раціональне рівняння і поясніть, яке перетворення могло б привести до порушення рівносильності:

- а)  $\frac{x-5}{x+2} = \frac{3x}{3x-1}$ ; б)  $\frac{x^2-3x}{x-3} = 0$ ; в)  $\frac{x^2-12}{x-6} = \frac{4x}{x-6}$ ;  
 г)  $\frac{x^2+x-12}{x^2-16} = 0$ ; д)  $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x+4}{2x+3} = 1$ ; е)  $\frac{x+5}{x-2} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{2}{x^2-4}$ .

**В** 4. Розв'яжіть за допомогою рівносильних перетворень рівняння:

- а)  $\frac{4y+3}{y-3} - \frac{2y-1}{y+3} = -2$ ; б)  $\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-x+1} = \frac{x-2}{x^3+1}$ ;  
 в)  $\frac{3}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x^2+2x+1} = \frac{7}{x^2-1}$ ; г)  $\frac{2}{x^2-2x-3} + \frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{x^2-1}$ ;  
 д)  $\frac{2x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x-5} = \frac{12-5x}{x^2-3x-10}$ ; е)  $\frac{2x-7}{x^2-9x+14} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}$ .

**С** 5. Укажіть, при якій умові є рівносильними рівняння:

- а)  $\frac{f(x)}{2x+5} = g(x)$  і  $f(x) = g(x)(2x+5)$ ;  
 б)  $\frac{f(x)}{x^2+3x-10} = 0$  і  $f(x) = 0$ ;  
 в)  $\frac{f(x)}{\sqrt{x-2}} = 0$  і  $f(x) = 0$ ;  
 г)  $\frac{f(x)}{x-2} = \frac{g(x)}{x+4}$  і  $f(x)(x+4) = g(x)(x-2)$ ;  
 д)  $f(x) + \sqrt{x+1} = g(x) + \sqrt{x+1}$  і  $f(x) = g(x)$ ;  
 е)  $f(x) - \sqrt{16-x^2} = g(x) - \sqrt{16-x^2}$  і  $f(x) = g(x)$ .

**Д** 6. Розв'яжіть рівняння за допомогою рівнянь-наслідків:

- а)  $7x+9 + \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x} + 2x-6$ ;  
 б)  $4x-3 + \sqrt{1-2x} = \sqrt{1-2x} - 2x+9$ ;  
 в)  $\sqrt{x+3} = x+1$ ; г)  $\sqrt{x^2+27} = x-3$ .

**В** 7. Знайдіть множину коренів рівняння, замінивши її рівносильною системою або сукупністю рівнянь:

- а)  $(x^2 - 9x + 8)(x^2 - 6x - 16) = 0$ ; б)  $\sqrt{2-3x}(5x-1) = 0$ ;  
 в)  $(x^2 - 4)^2 + (x^2 - 4x + 4)^2 = 0$ ; г)  $\sqrt{5x^2 - x} + \sqrt{3x^2 + x} = 0$ .

► Застосування властивостей функцій при розв'язуванні рівнянь

**Д** 8. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:

- а)  $\sqrt{1-x} + x^2 = \sqrt{x^2-x} + x$ ; б)  $\sqrt{x-4} - \sqrt{12-3x} = 2x-8$ ;  
 в)  $\sqrt{2x-1} - 2x = \sqrt{-x} + 5$ .

**В** 9. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{9+x^2} = 3-x^2$ ; б)  $2 + |x^3 + 2x| = \sqrt{4-x^2}$ ;  
 в)  $|x-1| = -1 + 2x - x^2$ ; г)  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - 2x - x^2$ .

**Д** 10. Розв'яжіть рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій:

- а)  $x^5 + 2x = 3$ ; б)  $x^3 + \sqrt{x-1} = 9$ ;  
 в)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$ ; г)  $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x+7} = 3$ .

**В** 11. Розв'яжіть рівняння, використовуючи монотонність функцій:

- а)  $x^5 = 5 - 4x$ ; б)  $x^2 + 2\sqrt{x} = 24 - x$ ;  
 в)  $\sqrt{x^2 + 13} = 9 - \sqrt{x-2}$ ; г)  $\sqrt{7+3x} + 1 = \sqrt{5-4x}$ .

► Розв'язування нерівностей за допомогою рівносильних перетворень

**С** 12. Укажіть, чи є рівносильними нерівності:

- а)  $(5x-4)(3\sqrt{6}-5\sqrt{2}) < 0$  і  $5x-4 < 0$ ;  
 б)  $(x^2-x-12)(2\sqrt{6}-5) > 0$  і  $x^2-x-12 < 0$ ;  
 в)  $(-x^2-1)(11-x) < 0$  і  $x-11 < 0$ ;  
 г)  $x^2 < 16$  і  $x < 4$ ;  
 д)  $\sqrt{x} > 2$  і  $x^2 > 4$ ;  
 е)  $\frac{x+3}{x-2} \leq 0$  і  $(x+3)(x-2) \leq 0$ .

**Д** 13. Доведіть, що будь-яке число є розв'язком нерівності:

- а)  $(2x-1)(2x+1) - 4(x+1) + 16 > 0$ ; б)  $\frac{(3x-8)^2}{9} + \frac{16x-1}{3} > 1$ .

**Д 14.** Доведіть, що множиною розв'язків нерівності є порожня множина.

а)  $3x(x-3)-(2x-1)(x-4) < -44$ ;    б)  $\frac{(3x+4)^2}{6} - \frac{6x-2}{3} < 2x-1$ .

**Д 15.** За допомогою рівносильних перетворень розв'яжіть нерівність:

а)  $4(2-3x)-3(4-2x) \geq 2$ ;    б)  $7,4(x-4)-3,7(3x-4) > 0$ ;

в)  $\frac{0,3x}{4} - \frac{0,1x-2}{12} < -0,3$ ;    г)  $(y+2)(3-y) \geq 0$ ;

д)  $\frac{2-x}{4+x} \geq 0$ ;    е)  $\frac{x-4}{x-2} \geq \frac{2x+1}{x-2}$ ;

е)  $\frac{2x}{x-3} \leq 1$ ;    ж)  $\frac{x^2-4x}{x+3} \leq \frac{5}{x+3}$ ;

з)  $\frac{x^2+x-6}{x^2+2x+1} \leq 0$ .

► Метод інтервалів

**С 16.** Розв'яжіть нерівність:

а)  $(x-3,6)(x+3) \geq 0$ ;    б)  $(x+5)(x-2)(x-7) < 0$ ;

в)  $(3x+4)(x-1)(2x+1) \geq 0$ ;    г)  $(8+x)(x+3)(4-x) < 0$ ;

д)  $(x+3)(2x-7)(6-x) \geq 0$ ;    е)  $(5x+3)(3-9x)(6x+1)(4-5x) \leq 0$ .

**Д 17.** Розв'яжіть нерівність:

а)  $\frac{x+4}{x+5} > 0$ ;    б)  $\frac{x-3}{x+7} < 0$ ;    в)  $\frac{x+2,8}{x-6,3} \geq 0$ ;

г)  $\frac{2-x}{x+4} \leq 0$ ;    д)  $\frac{(x-5)(x+9)}{x-2} \geq 0$ ;    е)  $\frac{x+4,3}{(4-x)(x-2)} \leq 0$ .

**Д 18.** Розв'яжіть нерівність:

а)  $(x^2-6x)(x^2-9) \geq 0$ ;    б)  $(x^2-5x+6)(x^2+5x) < 0$ ;

в)  $\frac{x^2-x-6}{x^2-8x+12} > 0$ ;    г)  $\frac{x^2-6x-16}{x^2-9} \leq 0$ .

**Д 19.** Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = \sqrt{(x+6)(x-3)(x^2-64)}$ ;    б)  $y = \sqrt{\frac{x^2-36}{x^2+7x+12}}$ .

**Д 20.** Знайдіть множину розв'язків нерівності:

а)  $(x^2+4)(x^2-5x-36) \geq 0$ ;    б)  $(x-2)^2(x^2-5x+4) > 0$ ;

в)  $(x-2)^2(x^2-5x+4) \geq 0$ ;    г)  $(x-2)^2(x^2-5x+4) < 0$ ;

д)  $(x-2)^2(x^2-5x+4) \leq 0$ ;    е)  $(x-3)^2(x+5)^6(x+1)^5 < 0$ ;

е)  $(x-3)^2(x+5)^6(x+1)^5 \geq 0$ ;    ж)  $(x^2-4x+3)(x^2+x-12) \leq 0$ .

**В** 21. Розв'яжіть нерівність:

а)  $\frac{(x^2 - 4)(x + 3)}{x^2 + 2x + 1} \geq 0$ ;

б)  $(3 - x)(3x^2 - 2x - 1) < (3 - x)(x^2 + 3x + 1)$ ;

в)  $\frac{(x^2 + x - 2)(x^2 - x - 6)}{x^2 + 5x + 4} \geq 0$ ;

г)  $\frac{2x - 1}{3x + 5} \leq -2$ ;

д)  $\frac{2x - 3}{4x - 1} \geq \frac{x - 2}{x + 2}$ ;

е)  $\frac{5 - 2x}{3x^2 - 2x - 16} < 1$ .

► Рівняння і нерівності, що містять знак модуля

**С** 22. Розв'яжіть рівняння:

а)  $|x| = 9$ ;

б)  $|5x + 1| = 4$ ;

в)  $|x^2 - 8| = 1$ ;

г)  $|x^2 + 3x| = 2$ ;

д)  $||x + 6| - 5| = 0$ ;

е)  $||x + 6| - 5| = 3$ .

**Д** 23. Розв'яжіть рівняння:

а)  $|x^2 + 8x - 8| = 6x$ ;

б)  $|2x^2 + 5x - 10| = 5 - 2x$ ;

в)  $|x^2 - x + 3| = x + 2$ ;

г)  $x^2 - 3x + 2 = |x - 1|$ ;

д)  $|2x^2 + x - 5| = |x + 3|$ ;

е)  $|3x^2 - 3x + 5| = |2x^2 + 6x - 3|$ .

**Д** 24. Розв'яжіть рівняння:

а)  $|y - 4| + |y - 6| = 8$ ;

б)  $|y + 3| - |y - 2| = 5$ ;

в)  $|x| + |x - 1| + |x - 2| = 3$ ;

г)  $|x| + |x - 4| + |x - 5| = 12$ .

**В** 25. Знайдіть корені рівняння:

а)  $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ ;

б)  $x^2 - 4|x + 1| - 41 = 0$ ;

в)  $3x^2 - 5|x - 2| - 12 = 0$ ;

г)  $x^2 - \frac{|x - 3|}{x - 3} = 15$ ;

д)  $\frac{x^2 - 5|x| - 3}{3|x| - 4} = 2$ ;

е)  $\frac{5x - 4}{x} - \frac{1}{x - 3} = \frac{|12x - 36|}{x^2 - 3x}$ .

**В** 26. Побудуйте графік функції:

а)  $y = |x + 1| + |x - 4|$ ;

б)  $y = x^2 + 2|x| - 8$ ;

в)  $y = |x^2 + 2x - 8|$ ;

г)  $y = |x - 1|(x + 3)$ .

**С** 27. Розв'яжіть нерівність:

а)  $|2x-3| \leq 5$ ;

б)  $|12x-1| > 17$ ;

в)  $|x^2-2x| > 6$ ;

г)  $|x^2+x-1| \leq 1$ .

**Д** 28. Побудуйте графік функції  $y = |x+1| + |x+4|$  і за допомогою графіка розв'яжіть нерівність:

а)  $|x+1| + |x+4| < 5$ ;

б)  $|x+1| + |x+4| \geq 2$ ;

в)  $|x+1| + |x+4| \leq 3$ ;

г)  $|x+1| + |x+4| > 7$ .

**Д** 29. Розв'яжіть нерівність:

а)  $|x+2| + |x-3| < 7$ ;

б)  $|x+6| + |x-5| \geq 3$ ;

в)  $|x+2| - |x-3| \leq 1$ ;

г)  $|x-1| + |x-2| < 3x-9$ .

**Д** 30. Розв'яжіть нерівність:

а)  $|x^2-5x+4| \leq 3x+4$ ;

б)  $|x^2+4x-5| > x^2-5$ ;

в)  $|x^2-4x-12| \geq x^2-x$ ;

г)  $x^2-4|x-1|-5 \geq 0$ .

**В** 31. Розв'яжіть нерівність:

а)  $\frac{6}{|x-1|-3} \geq |x+1|$ ;

б)  $\frac{8}{|x+2|-5} \leq |x-2|$ .

**В** 32. Розв'яжіть нерівність  $\left| \frac{x}{x^2-4} \right| \leq \frac{x}{x^2-4}$ .

**В** 33. Розв'яжіть нерівність:

а)  $(|x|-1)(|x|-7) \leq 0$ ; б)  $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9} < 0$ ; в)  $\frac{2}{|x|x-1|} \leq -1$ .

**В** 34. Розв'яжіть нерівність:

а)  $\left| \frac{x-3}{x-5} \right| \geq 1$ ;

б)  $\left| \frac{3x}{x^2-4} \right| \leq 1$ ;

в)  $\left| \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \right| < 1$ .

► Рівняння і нерівності з параметрами

**Д** 35. При якому значенні  $a$  рівняння є рівносильними:

а)  $x-2a=1$  і  $2x-5a+3=0$ ; б)  $3ax-x-2a+2=0$  і  $5x-a=0$ ?

**В** 36. Знайдіть значення параметра  $a$ , при якому рівняння мають корені та є рівносильними:

а)  $x^2 + (a^2 - 6a + 1)x + a^2 + a - 2 = 0$

і  $x^2 + (a^2 - 2a + 1)x + 2a^2 + 3a - 2 = 0$ ;

б)  $x^2 + (2a^2 + 2a - 5)x + 3a^2 - a + 2 = 0$

і  $x^2 + (a^2 + a + 7)x + a^2 + 3a - 1 = 0$ .



- Д 37.** Розв'яжіть рівняння відносно  $x$ :
- а)  $ax = 2a - 1$ ;                      б)  $(b+2)x = b^2 - 4$ ;  
 в)  $a^2x - 4ax = a^2 - 16$ ;            г)  $ax + 3x = a^2 - a - 6$ ;  
 д)  $cx - 4x = c^2 - 6c + 8$ .
- Д 38.** При яких значеннях параметра  $b$  рівняння не має коренів:
- а)  $3x^2 + 6x + 2b = 0$ ;                б)  $bx^2 - 16x + 8 = 0$ ;  
 в)  $bx^2 + (b-4)x + b - 2 = 0$ ;      г)  $(b-3)x - 2(b^2 - 9)x + b + 3 = 0$ ?
- В 39.** Розв'яжіть рівняння:
- а)  $x^2 - bx - 2b^2 = 0$ ;                б)  $x^2 - 3ax + 2a^2 = 0$ ;  
 в)  $x^2 + (3b-2)x - 6b = 0$ ;        г)  $x^2 - (3a-2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$ ;  
 д)  $(a-2)x^2 + 4x - (a+3) = 0$ .
- В 40.** Розв'яжіть рівняння відносно  $x$ :
- а)  $\frac{x^2 - (a+1)x + 2a - 2}{3x^2 - 7x + 2} = 0$ ;            б)  $\frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-a}$ ;  
 в)  $\frac{6}{x^2 - 16} - \frac{1}{x-4} = \frac{3a}{x+4}$ .
- В 41.** Розв'яжіть рівняння:
- а)  $|ax + 3| = 1$ ;                      б)  $|x + 3| = a$ ;                      в)  $|x^2 - 2x| = a$ .
- В 42.** При яких значеннях  $a$  множиною розв'язків нерівності  $8x > 1,8a - x$  є числовий проміжок  $(6; +\infty)$ ?
- В 43.** При яких значеннях  $a$  нерівність  $(x-a)^2(3x-4) < 2(x-a)^2$  є рівносильною нерівності  $3x-4 < 2$ ?
- В 44.** Розв'яжіть нерівність  $(m+1)x - 4 < (1-3m)x + 2$ .
- В 45.** При яких значеннях параметра  $a$  нерівність виконується при всіх значеннях  $x$ :
- а)  $x^2 - 4x + a > 0$ ; б)  $ax^2 + 4x + 1 > 0$ ; в)  $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ ?
- В 46.** При яких значеннях параметра  $a$  функція  $y = -4x^2 - 16x + a$  набуває від'ємних значень при всіх дійсних значеннях  $x$ ?
- Графік рівняння з двома змінними
- С 47.** Які з пар  $(-2; 3)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(1; -6)$ ,  $(1; -1)$  є розв'язками рівняння:
- а)  $xy + 6 = 0$ ;                      б)  $x^2 + 9xy + 8y^2 = 8$ ?

- Д 48.** Знайдіть множину розв'язків рівняння:  
 а)  $(x-1)^2 + y^2 = 0$ ;                      б)  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 0$ ;  
 в)  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 17 = 0$ ;            г)  $x^4 + y^4 - 18y^2 + 81 = 0$ .
- С 49.** Побудуйте графік рівняння:  
 а)  $x - y + 1 = 0$ ;                      б)  $y - 3x - 1 = 0$ ;            в)  $2y + 3x + 1 = 0$ .
- Д 50.** Побудуйте графік рівняння:  
 а)  $x^2 + y^2 = 9$ ;                      б)  $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$ ;  
 в)  $x^2 + y^2 - 2y = 8$ ;                      г)  $x^2 + 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ .
- В 51.** Побудуйте графік рівняння:  
 а)  $|x| = 1$ ;                      б)  $|y| = 3$ ;                      в)  $|x - y| = 3$ ;  
 г)  $xy = 2$ ;                      д)  $x = 2y^2$ ;                      е)  $2x^2 + 5y^2 = 0$ ;  
 є)  $|x| + |y| = 1$ ;                      ж)  $2|x| - |y| = 3$ ;                      з)  $y = \sqrt{4 - x^2}$ .

► Нерівність із двома змінними. Графік нерівності з двома змінними

- С 52.** Укажіть три будь-які пари чисел, які є розв'язками нерівності:  
 а)  $y > 3$ ;                      б)  $y \leq x$ ;                      в)  $y - 2x > 2$ ;  
 г)  $x^2 + y^2 \leq 8$ ;                      д)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 > 25$ ;                      е)  $xy > 12$ .
- Д 53.** Зобразіть множину точок на площині, координати яких задовольняють нерівності:  
 а)  $x \leq -1$ ;                      б)  $y > 0,5x - 1$ ;                      в)  $y - 3x + 4 \geq 0$ ;  
 г)  $xy < 10$ ;                      д)  $x^2 + y^2 > 25$ ;                      е)  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 17 \leq 0$ .
- Д 54.** Зобразіть множину точок координатної площини, що задається нерівністю:  
 а)  $|x| > 3$ ;                      б)  $|y| \leq 4$ ;                      в)  $y \leq |x|$ ;                      г)  $y > |x + 1|$ ;  
 д)  $|x - 2y| \leq 4$ ;                      е)  $|x + y| > 1$ ;                      є)  $|y| < x$ ;                      ж)  $|y| > x - 2$ .
- В 55.** Зобразіть на координатній площині множину точок, що задається нерівністю:  
 а)  $y \geq |x^2 - 5x + 6|$ ;                      б)  $y < x^2 - 5|x| + 6$ ;  
 в)  $|y| > x^2 - 5x + 6$ ;                      г)  $|y| \leq x^2 - 5|x| + 6$ ;  
 д)  $x^2 + y^2 - 4x + 4|y| \leq 1$ ;                      е)  $x^2 + y^2 + 6|x| - 4y \leq 3$ .
- В 56.** Зобразіть на координатній площині фігуру, що задається нерівністю  $|x| + |y| \leq 5$ , і обчисліть її площу.

**Д 57.** Покажіть штрихуванням на координатній площині мно-  
жину точок, координати яких задовольняють систему не-  
рівностей:

а)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ y > -x; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4, \\ x^2 + y^2 \leq 16; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} y \geq x^2 - 2, \\ y \leq x; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} y \geq x, \\ y + x \geq 0, \\ y \leq \frac{1}{3}x + 2. \end{cases}$

► Ділення многочленів. Теорема Безу та наслідки з неї

**Д 58.** Виконайте ділення многочлена на многочлен:

- а)  $x^3 + 3x^2 - 2x + 1$  на  $x - 1$ ; б)  $x^4 - 2x^2 + 3x - 1$  на  $x + 5$ ;
- в)  $x^4 + x^2 + 1$  на  $x + 5$ ; г)  $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$  на  $x^2 - x + 1$ ;
- д)  $x^4 - x^3 + 3x^2 + 2$  на  $2x^2 - x + 2$ .

**Д 59.** Методом невизначених коефіцієнтів знайдіть частку і оста-  
чу від ділення  $P(x)$  на  $Q(x)$ . Правильність відповіді пере-  
вірте, застосувавши ділення «стовпчиком»:

- а)  $P(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$  на  $Q(x) = x^2 - 1$ ;
- б)  $P(x) = x^5 - 4x^3 - 2x^2 - x + 5$  на  $Q(x) = x^2 - 9$ ;
- в)  $P(x) = x^6 + 3x^5 + 2x^4 + x + 2$  на  $Q(x) = x^2 + 2x + 4$ .

**С 60.** Знайдіть остачу від ділення многочлена

$P(x) = 3x^3 - x^2 - 4x - 2$  на двочлен:

- а)  $x - 1$ ; б)  $x + 1$ ; в)  $2x + 1$ .

**Д 61.** При якому значенні  $a$  остача від ділення многочлена  
 $x^4 - ax^3 + 4x^2 - x + 1$  на двочлен  $x - 2$  дорівнює 7?

**Д 62.** При якому значенні  $a$  многочлен  $P(x)$  ділиться без остачі  
на многочлен  $Q(x)$ :

- а)  $P(x) = 4x^3 - 6x + a$ ;  $Q(x) = x + 3$ ;
- б)  $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + a$ ;  $Q(x) = x - 1$ ?

**В 63.** Не виконуючи ділення, знайдіть остачу від ділення много-  
члена  $P(x) = x^5 - 2x^2 + x - 1$  на квадратний тричлен  $x^2 + x - 2$ .

**В 64.** Многочлен  $P(x)$  ділиться націло на  $x + 4$ , а при діленні  
на  $x - 1$  дає в остачі 5. Визначте остачу від ділення много-  
члена  $P(x)$  на  $x^2 + 3x - 4$ .

► Метод математичної індукції

**Д 65.** За допомогою методу математичної індукції доведіть фор-  
мулу  $n$ -го члена геометричної прогресії.

**В 66.** Доведіть, що:

- а)  $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ , де  $n \in N$ ;  
 б)  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ , де  $n \in N$ ;  
 в)  $\frac{1}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{5}{3^3} + \dots + \frac{2n-1}{3^n} = 1 - \frac{n+1}{3^n}$ , де  $n \in N$ ;  
 г)  $3+20+168+\dots+(2n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n! = 2^n (n+1)! - 1$ , де  $n \in N$ .

**В 67.** Доведіть, що при довільному натуральному  $n$ :

- а)  $n^3+11n$  ділиться на 6; б)  $10^n-9n-1$  ділиться на 81;  
 в)  $2^{2n}+15n-1$  ділиться на 9; г)  $7 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n+1}$  ділиться на 17.

**В 68.** Доведіть нерівність:

- а)  $2^n > 2n+1$ , де  $n \in N$ ,  $n \geq 3$ ; б)  $4^n > 7n-5$ , де  $n \in N$ .

**Тест 3. Розв'язування рівнянь і нерівностей** .....

..... *Варіант 1* .....

**П 1.** Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2+36}{x-7} < 0$ .

А	Б	В	Г	Д
(6; 7)	$(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$	$(-\infty; 7)$	$(7; +\infty)$	$(-\infty; 6) \cup (7; +\infty)$

**П 2.** Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$	$[-3; 1)$	$(-3; 1)$	$(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$

**П 3.** Розв'яжіть рівняння  $1 - |x+4| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-3	-3; -5	3; -5	-5	-3; 5

**П 4.** Розв'яжіть рівняння  $x^3 - 25|x| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
-5; 5	Розв'язків немає	-5; 0; 5	0; 5	0

- II 5. Знайдіть остачу від ділення многочлена  $P(x) = x^4 - 5x^3 + x + 4$  на  $Q(x) = x - 2$ .

А	Б	В	Г	Д
18	58	-22	-18	-30

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1-4), виберіть твердження, позначене буквою (А-Д).

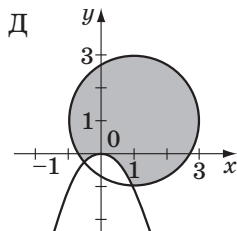
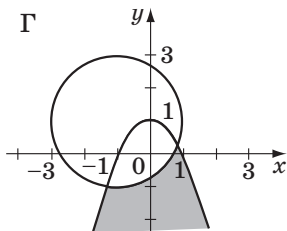
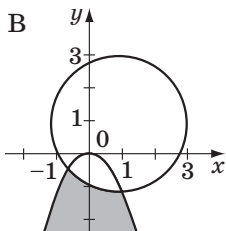
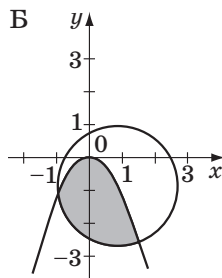
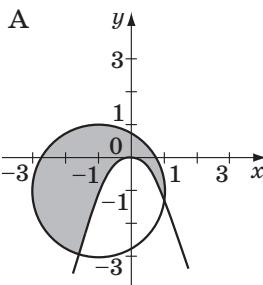
- С 6. Установіть відповідність між системами нерівностей (1-4) і множинами точок, координати яких задовольняють ці системи (А-Д).

1  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 4, \\ y \leq -x^2 \end{cases}$

2  $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 4, \\ y \geq -x^2 \end{cases}$

3  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4, \\ y \leq -x^2 \end{cases}$

4  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4, \\ y \geq -x^2 \end{cases}$



- С 7. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a \end{cases}$  має єдиний розв'язок. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень декілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

- С 8. При якому значенні  $a$  рівняння  $ax = 9 - 2x$  і  $2x + 1 = 2a$  є рівносильними?

С 9. Знайдіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності  $\frac{(x-3)(x+10)(x^2+8x-9)}{x^2+8x-9} < 0$ .

Д 10. Серед точок, координати яких задовольняють систему нерівностей  $\begin{cases} y \geq x^2 - 4x, \\ y - x - 6 \leq 0, \end{cases}$  знайдіть точку з найменшою ординатою і запишіть цю ординату у відповідь.

В 11. Розв'яжіть нерівність  $|x+2| + |x-1| > 5$ .

В 12. Многочлен  $P(x)$  при діленні на  $x-4$  дає в остачі 9, а при діленні на  $x+1$  дає в остачі  $-1$ . Визначте остачу від ділення многочлена  $P(x)$  на  $x^2-3x-4$ .

..... Варіант 2 .....

П 1. Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2+64}{x-5} > 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 5) \cup (8; +\infty)$	$(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$	$(5; 8)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$

П 2. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(-1; 3)$	$(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$	$[-1; 3)$

П 3. Розв'яжіть рівняння  $6 - |x-3| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$-3$	$3; -9$	$-3; 9$	$9$	$-3; -9$

П 4. Розв'яжіть рівняння  $x^3 - 4|x| = 0$ .

А	Б	В	Г	Д
$0; 2$	$0; 2; -2$	$-2; 2$	Розв'язків немає	$0$

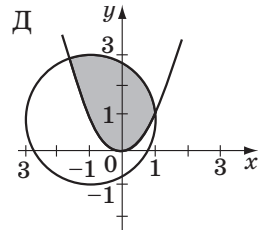
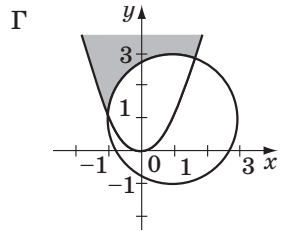
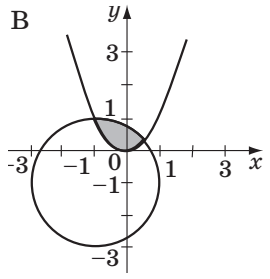
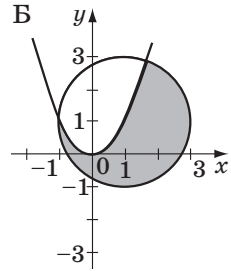
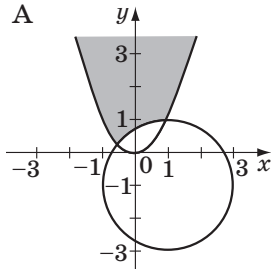
П 5. Знайдіть остачу від ділення многочлена  $P(x) = 2x^4 - x^2 + 6x - 3$  на  $Q(x) = x + 2$ .

А	Б	В	Г	Д
$21$	$13$	$31$	$27$	$37$

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

**С** 6. Установіть відповідність між системами нерівностей (1–4) і множинами точок, координати яких задовольняють ці системи (А–Д).

- 1  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \geq 4, \\ y \geq x^2 \end{cases}$
- 2  $\begin{cases} (x+1)^2 + (y-1)^2 \leq 4, \\ y \geq x^2 \end{cases}$
- 3  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 4, \\ y \leq x^2 \end{cases}$
- 4  $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 4, \\ y \geq x^2 \end{cases}$



**С** 7. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = -x^2 + a \end{cases}$  має єдиний розв'язок. Якщо таке значення одне, то запишіть його у відповідь. Якщо таких значень декілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

**С** 8. При якому значенні  $a$  рівняння  $ax = 2x + 3$  і  $2x - 3a = 1$  є рівносильними?

**Д** 9. Знайдіть найменше ціле число, яке є розв'язком нерівності  $\frac{(x-4)(x+7)(x^2+4x-12)}{x^2+4x-12} < 0$ .

Д 10. Серед точок, координати яких задовольняють систему нерівностей  $\begin{cases} y \geq x^2 - 2x, \\ y - x - 4 \leq 0, \end{cases}$  знайдіть точку з найменшою ординатою і запишіть цю ординату у відповідь.

В 11. Розв'яжіть нерівність  $|x+3| + |x-5| \leq 10$ .

В 12. Многочлен  $P(x)$  при діленні на  $x-2$  дає в остачі 6, а при діленні на  $x+3$  дає в остачі 1. Визначте остачу від ділення многочлена  $P(x)$  на  $x^2+x-6$ .

✓ Контрольна робота 2. Розв'язування рівнянь і нерівностей

Варіант 1

П 1. Розв'яжіть нерівність:

а)  $x(x-1)(x+4) > 0$ ;

б)  $\frac{x^2-4}{x^2-1} \leq 0$ ;

в)  $\frac{x^2-x-12}{x-4} > 0$ .

П 2. Розв'яжіть рівняння:

а)  $3 - |x-2| = 0$ ;

б)  $|2x-1| = |x-4|$ ;

в)  $x^2 - |x-2| = 0$ ;

г)  $x^2 - 2x - 3 = |x+1|$ .

С 3. Покажіть штрихуванням на координатній площині множини точок, координати яких задовольняють систему нерівностей:

а)  $\begin{cases} |x| \leq 3, \\ |y| \leq 1; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9, \\ x^2 + (y-1)^2 \geq 1; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x+y+1,5 \geq 0, \\ y-0,5x+2 \leq 0. \end{cases}$

С 4. При якому значенні  $a$  остача від ділення многочлена  $ax^3 - x^2 + (a+1)x + 5$  на двочлен  $x-1$  дорівнює 9?

Д 5. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система  $\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = 4, \\ y = -5 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

В 6. Доведіть, що при довільному натуральному  $n$   $3^{2n+1} + 2^{n+2}$  ділиться без остачі на 7.



**П** 1. Розв'яжіть нерівність:

а)  $x(x-4)(x+7) < 0$ ;   б)  $\frac{x^2-1}{x^2-16} \geq 0$ ;   в)  $\frac{x^2-3x+2}{x-1} < 0$ .

**П** 2. Розв'яжіть рівняння:

а)  $7 - |4 - x| = 0$ ;   б)  $|3x + 2| = |1 - x|$ ;  
 в)  $x^2 - |x + 6| = 0$ ;   г)  $x^2 + x - 3 = |2x - 1|$ .

**С** 3. Покажіть штрихуванням на координатній площині мно-  
 жину точок, координати яких задовольняють систему не-  
 рівностей:

а)  $\begin{cases} |x| \leq 1, \\ |y| \leq 4; \end{cases}$    б)  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16, \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 4; \end{cases}$    в)  $\begin{cases} y - 0,5x - 2 \leq 0, \\ y - 0,5x + 4 \geq 0. \end{cases}$

**С** 4. При якому значенні  $a$  остача від ділення многочлена  $x^3 - ax^2 + (a-2)x - 1$  на двочлен  $x - 3$  дорівнює  $-4$ ?

**Д** 5. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких система  $\begin{cases} (x-a)^2 + y^2 = 4, \\ x = 5 \end{cases}$  має єдиний розв'язок.

**В** 6. Доведіть, що при довільному натуральному  $n$   $7^{n+2} + 8^{2n+1}$  ділиться без остачі на 57.

## ТЕМА 2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

### ☑ Стислі теоретичні відомості

#### ► Корінь $n$ -го степеня

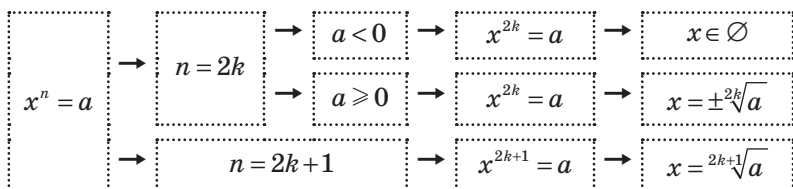
Якщо  $a = b^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 1$ ), то  $b$  — корінь  $n$ -го степеня з числа  $a$ .

Арифметичний корінь — невід'ємне значення кореня.

При  $a \geq 0$   $\sqrt[n]{a}$  — позначення арифметичного значення кореня.

$\sqrt[n]{a}$  — існує  $\rightarrow$  при  $n = 2k$ , якщо  $a \geq 0$ ;

$\rightarrow$  при  $n = 2k + 1$  для будь-яких значень  $a$ .



#### ► Властивості кореня $n$ -го степеня

1)  $\sqrt[n]{a^n} \rightarrow n = 2k, \sqrt[n]{a^n} = \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$   
 $\rightarrow n = 2k + 1, \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$

2)  $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$

3)  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$

4)  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, a \geq 0, b > 0$

5)  $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}, a \geq 0$

6)  $\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}, a \geq 0$

7)  $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}, a \geq 0$  — основна властивість кореня

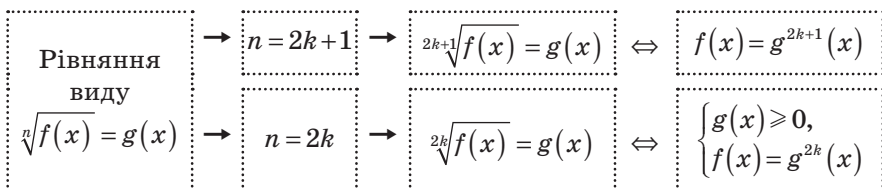
#### ► Наслідки

1)  $\sqrt[n]{a^n b} = a \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$  — винесення множника з-під знака кореня

2)  $a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}, a \geq 0, b \geq 0$  — внесення множника під знак кореня

3) Якщо  $a > b$ , то  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}, a \geq 0, b \geq 0$

#### ► Розв'язування ірраціональних рівнянь





**Д** 3. Знайдіть значення виразу:

а)  $2 \cdot \sqrt{49} - \sqrt[3]{8}$  ;

б)  $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{144} + \sqrt[3]{0,027}$  ;

в)  $\frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[4]{16}} - \sqrt[3]{-27}$  ;

г)  $\sqrt[3]{125} - 2(\sqrt{3})^2$  ;

д)  $\frac{1}{3} \cdot (\sqrt[3]{12})^3 + 2,5 \cdot (\sqrt[4]{6})^4$  ;

е)  $\sqrt{225} \left( \sqrt[3]{\frac{1}{15}} + (\sqrt[5]{7})^5 \right)$ .

**С** 4. Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = \sqrt{x+4}$  ;

б)  $y = \sqrt[4]{3-2x}$  ;

в)  $y = \sqrt[3]{2x+1}$  ;

г)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2}}$  ;

д)  $y = \frac{4}{\sqrt[4]{2x-5}}$  ;

е)  $y = \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x}$  .

**В** 5. Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = \sqrt{x^2 - 11x + 24}$  ;

б)  $y = \sqrt[4]{5+4x-x^2}$  ;

в)  $y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$  ;

г)  $y = \frac{\sqrt{x^2+3x-18}}{\sqrt[3]{x-5}}$  ;

д)  $y = \sqrt{x^2-25} + \frac{1}{\sqrt[4]{9-x}}$  ;

е)  $y = \frac{\sqrt[3]{x^2-8x+7}}{x+1} + \sqrt{x^2-9x+14}$  .

**С** 6. Розв'яжіть рівняння:

а)  $x^2 = 81$  ;

б)  $x^4 = 16$  ;

в)  $5x^2 = 15$  ;

г)  $3x^4 + 48 = 0$  ;

д)  $x^3 - 27 = 0$  ;

е)  $3x^3 + 24 = 0$  .

**Д** 7. Розв'яжіть рівняння:

а)  $(x+1)^3 = 125$  ;

б)  $(2x-1)^2 = 4$  ;

в)  $(4-3x)^4 + 1 = 0$  ;

г)  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$  ;

д)  $x^6 - 64 = 0$  ;

е)  $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$  ;

е)  $2x^8 + x^4 - 1 = 0$  ;

ж)  $3x^6 + x^3 + 1 = 0$  ;

з)  $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$  .

**Д** 8. Укажіть, між якими двома послідовними цілими числами міститься число:

а)  $\sqrt{5,76}$  ;

б)  $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$  ;

в)  $-\sqrt{0,25}$  ;

г)  $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$  ;

д)  $\sqrt[3]{-64}$  ;

е)  $-\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$  .

**С** 9. Оцініть значення  $\sqrt{x}$  , якщо:

а)  $4 \leq x \leq 36$  ;

б)  $0,16 < x < 1,44$  ;

в)  $1,69 < x \leq 4\frac{25}{36}$  .

**Д** 10. Оцініть значення  $\sqrt[3]{x}$  , якщо:

а)  $8 < x < 64$  ;

б)  $-1 \leq x \leq 27$  ;

в)  $2\frac{10}{27} \leq x < 125$  .

Д 11. Оцініть значення  $x$ , якщо:

а)  $3 < \sqrt{x} < 5$ ; б)  $-\frac{1}{2} \leq \sqrt[3]{x} \leq 1$ ; в)  $\frac{1}{2} \leq \sqrt[4]{x} \leq 1\frac{2}{3}$ .

► Властивості кореня  $n$ -го степеня

С 12. Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt{25 \cdot 144}$ ; б)  $\sqrt[3]{0,001 \cdot 8}$ ; в)  $\sqrt[3]{-27 \cdot 125}$ ;  
г)  $\sqrt{\frac{49}{144}}$ ; д)  $\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}$ ; е)  $\sqrt[4]{0,0081 \cdot 625}$ .

Д 13. Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt{45 \cdot 5}$ ; б)  $\sqrt{320 \cdot 180}$ ; в)  $\sqrt{2,7 \cdot 1,2}$ ;  
г)  $\sqrt[3]{250 \cdot 4}$ ; д)  $\sqrt[3]{-75 \cdot 45}$ ; е)  $\sqrt[4]{12,5 \cdot 0,8 \cdot 0,01}$ ;  
ж)  $\sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ .

Д 14. Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt{5^4 \cdot 3^2}$ ; б)  $\sqrt[3]{3^6 \cdot 0,1^3}$ ; в)  $\sqrt[5]{-2^{10} \cdot 7^5}$ ;  
г)  $\sqrt[4]{50 \cdot 5^6 \cdot 2^3}$ ; д)  $\sqrt[6]{\frac{8^2}{5^{12}}}$ ; е)  $\sqrt[3]{\frac{27^2 \cdot 64}{1000}}$ ;  
ж)  $\sqrt[3]{256 \cdot 270 \cdot 25}$ .

Д 15. Знайдіть значення виразу:

а)  $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$ ; в)  $\sqrt[6]{7^4 \cdot 3} \cdot \sqrt[6]{49 \cdot 243}$ ;  
г)  $\sqrt[5]{27} \cdot \sqrt[5]{-9}$ ; д)  $\frac{\sqrt[5]{9^{14} \cdot 16^3}}{\sqrt[5]{9^4 \cdot 16^8}}$ ; е)  $\frac{\sqrt[7]{-256}}{\sqrt{-2}}$ .

Д 16. Знайдіть значення числового виразу:

а)  $\sqrt[4]{3 \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$ ; б)  $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}} \cdot \sqrt[3]{-4 \frac{17}{27}}$ ;  
в)  $\sqrt[6]{\frac{64}{1\,000\,000}} \cdot \sqrt[4]{39 \frac{1}{16}} ; \sqrt[3]{-2 \frac{10}{27}}$ .

Д 17. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt{x^2}$ ; б)  $\sqrt[3]{b^3}$ ; в)  $\sqrt[4]{b^4}$ ,  $b \geq 0$ ;  
г)  $\sqrt{a^2 b^4}$ ,  $a < 0$ ; д)  $\sqrt[3]{8b^6}$ ; е)  $\sqrt{16a^2 x^8 c^6}$ ,  $a < 0, c > 0$ ;  
е)  $18 \sqrt[4]{\frac{m^4}{81n^8}}$ ,  $m < 0$ ; ж)  $\frac{35a^3}{b^5} \sqrt[3]{-\frac{b^9}{125a^{12}}}$ ; з)  $-\frac{m}{4n^3} \sqrt[4]{\frac{4^8 n^{16}}{m^{12}}}$ ,  $m < 0$ .

**В** 18. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt{(x-1)^2}$ ;

б)  $\sqrt[4]{(a+3)^4}$ ,  $a \geq -3$ ;

в)  $\sqrt{b^2-8b+16}$ ,  $b < 4$ ;

г)  $\sqrt[4]{x^4} + \sqrt{(x-2)^2}$ ,  $x < 0$ ;

д)  $\sqrt{(a+4)^2} + \sqrt{(a-1)^2}$ ,  $-4 \leq a \leq 1$ ; е)  $\sqrt[4]{(y+3)^4} - \sqrt[6]{(y-4)^6}$ ,  $y > 4$ .

**В** 19. Обчисліть:

а)  $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$ ;

б)  $\sqrt[5]{7-\sqrt{17}} \cdot \sqrt[5]{7+\sqrt{17}}$ ;

в)  $\sqrt[3]{\sqrt{37}-8} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{37}+8}$ ;

г)  $\sqrt[3]{(10\sqrt{2}-5\sqrt{3})} \cdot \sqrt[3]{10\sqrt{2}+5\sqrt{3}}$ ;

д)  $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ;

е)  $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}$ .

**Д** 20. Винесіть множник з-під знака кореня:

а)  $\sqrt{18}$ ; б)  $\sqrt[3]{24}$ ; в)  $\sqrt[3]{-54}$ ; г)  $\sqrt[4]{48}$ ; д)  $\sqrt[3]{250}$ ;

е)  $\sqrt[3]{6^5 \cdot 5^3}$ ; є)  $\sqrt[4]{16 \cdot 3^7}$ ; ж)  $\sqrt[5]{-3^{11} \cdot 4^3 \cdot 5^6}$ ; з)  $\sqrt[3]{-75 \cdot 225}$ .

**Д** 21. Винесіть множник з-під знака кореня:

а)  $\sqrt{50a^4}$ ; б)  $\sqrt[3]{-27c}$ ; в)  $\sqrt[4]{7x^{18}y^4}$ ; г)  $\sqrt[3]{48m^7k^{11}}$ ;

д)  $\frac{a^4}{21c} \sqrt{\frac{98c^2}{a^{10}}}$ ,  $a > 0$ ,  $c < 0$ ; е)  $\frac{12n^3}{b^5} \sqrt[4]{\frac{162b^{10}}{n^{14}x^8}}$ ,  $n < 0$ .

**В** 22. Винесіть множник з-під знака кореня:

а)  $\sqrt[3]{-32m^7k^{13}}$ ; б)  $\sqrt{150c^5n^6}$ ,  $n < 0$ ;

в)  $\sqrt[4]{\frac{a^7b^6}{32}}$ ,  $b > 0$ ; г)  $0,5m \sqrt[4]{\frac{64m^9}{n^6}}$ ,  $n < 0$ ;

д)  $\frac{0,1xy^2}{z^3} \sqrt[6]{\frac{10^8x^7z^{14}}{y^{15}}}$ ,  $y < 0$ ; е)  $\frac{a}{b+2} \sqrt[4]{-\frac{(b+2)^6}{a^9}}$ ,  $b > -2$ .

**С** 23. Внесіть множник під знак кореня:

а)  $2\sqrt{6}$ ; б)  $2\sqrt[3]{3}$ ; в)  $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54}$ ;

г)  $-0,5\sqrt[5]{96}$ ; д)  $1,5\sqrt{\frac{4}{15}}$ ; е)  $\frac{1}{3}\sqrt[4]{63}$ .

**Д** 24. Внесіть множник під знак кореня:

а)  $a\sqrt{8}$ ,  $a > 0$ ; б)  $a\sqrt{8}$ ,  $a < 0$ ; в)  $x\sqrt[4]{x}$ ;

г)  $2x\sqrt[4]{-x}$ ; д)  $0,1y\sqrt[3]{120y^2}$ ; е)  $0,5a^2b\sqrt[5]{\frac{6a^3}{b^4}}$ .

**В** 25. Внесіть множник під знак кореня:

а)  $(a-1)\sqrt[4]{\frac{2}{(a-1)^3}}$  ;

б)  $(a-1)\sqrt[4]{\frac{2}{(a-1)^2}}$  ;

в)  $(a-1)\sqrt[4]{\frac{2}{1-a}}$  ;

г)  $(b+2)^2\sqrt[4]{\frac{3}{b^2+4b+4}}$  ;

д)  $(b+2)\sqrt[4]{\frac{3}{b^2+4b+4}}$  ,  $b < -2$  ;

е)  $(b+2)\sqrt[4]{\frac{3}{b^2-b-6}}$  ,  $b > 3$  ;

є)  $(2-c)\sqrt[6]{\frac{1}{(2-c)^4}}$  .

**С** 26. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$  ; б)  $\frac{15}{\sqrt{10}}$  ; в)  $\frac{6}{5\sqrt{2}}$  ; г)  $\frac{4}{\sqrt[3]{5}}$  ; д)  $\frac{20}{\sqrt[3]{25}}$  ; е)  $\frac{28}{\sqrt[4]{4}}$  .

**С** 27. Звільніться від ірраціональності в чисельнику дробу:

а)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$  ; б)  $\frac{\sqrt{10}}{15}$  ; в)  $\frac{4\sqrt{5}}{15}$  ; г)  $\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$  ; д)  $\frac{\sqrt[3]{9}}{6}$  ; е)  $\frac{\sqrt[5]{14}}{21}$  .

**Д** 28. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а)  $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$  ;

б)  $\frac{16}{3+\sqrt{5}}$  ;

в)  $\frac{15}{4\sqrt{3}-\sqrt{13}}$  ;

г)  $\frac{1}{\sqrt[3]{5}+1}$  ;

д)  $\frac{10}{2-\sqrt[3]{3}}$  ;

е)  $\frac{6}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$  .

**В** 29. Обчисліть суму:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{15}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{27}+\sqrt{31}}$$
 .

**С** 30. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$  ; б)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$  ; в)  $\sqrt{\sqrt{a}}$  ; г)  $\sqrt[3]{b\sqrt[5]{b^3}}$  ; д)  $\sqrt[4]{y\sqrt[3]{y^2}}$  ; е)  $\sqrt[5]{x^3\sqrt{x}}$  .

**С** 31. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt[6]{x^3}$  ; б)  $\sqrt[4]{9}$  ; в)  $\sqrt[12]{y^8}$  ; г)  $\sqrt[24]{c^{15}d^{21}}$  ; д)  $\sqrt[7]{m^4n^3}$  ; е)  $\sqrt{x^4\sqrt[5]{x^7}}$  .

**В** 32. Обчисліть:

а)  $\sqrt{\sqrt{5}-2} \cdot \sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}$  ;

б)  $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+2\sqrt{2}}$  ;

в)  $\sqrt[3]{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[6]{7+2\sqrt{10}}$  ;

г)  $\sqrt[6]{49+20\sqrt{6}} \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{6}-5}$  .

**С** 33. Скоротіть дріб:

а)  $\frac{a-1}{\sqrt{a}-1}$ ;

б)  $\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-3}$ ;

в)  $\frac{b-2}{b^2+2\sqrt{2b}+2}$ ;

г)  $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{m-n}$ ;

д)  $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}-2\sqrt[4]{xy}+\sqrt{y}}$ ;

е)  $\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$ .

**Д** 34. Скоротіть дріб:

а)  $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab^2}+\sqrt{a^2b}}$ ;

б)  $\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{ab^2}}$ ;

в)  $\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{a^2}}{2\sqrt[3]{2}-a\sqrt[3]{a}}$ ;

г)  $\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$ ;

д)  $\frac{\sqrt{x^3y}-2xy+\sqrt{xy^3}}{\sqrt[4]{x^3y^2}-\sqrt[4]{x^2y^3}}$ ;

е)  $\frac{\sqrt[3]{a^2}-16}{a+64}$ .

**В** 35. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt{m}+\sqrt{n}-\left(\sqrt[4]{m}-\sqrt[4]{n}\right)^2$ ;

б)  $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a-b}$ ;

в)  $\left(\frac{1}{\sqrt{a}-3\sqrt{b}}+\frac{1}{3\sqrt{b}+\sqrt{a}}\right)\cdot(9b-a)$ ;

г)  $\frac{81x-y}{\left(3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\left(3\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)}-\sqrt{y}$ ;

д)  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$ ;

е)  $\frac{8-m}{\sqrt[3]{m}+2}\cdot\left(2+\frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m}+2}\right)+\left(\sqrt[3]{m}+\frac{2\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{m}-2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{m^2}-4}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{m}}$ ;

е)  $\left(\frac{\sqrt[4]{ab^3}-\sqrt[4]{a^3b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{1+\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{ab}}\right)^2\cdot\sqrt{1+\frac{a}{b}+2\sqrt{\frac{a}{b}}}$ ;

ж)  $\left(\frac{\sqrt[3]{x^2y^2}+x\sqrt[3]{y}}{x\sqrt[3]{y}+y\sqrt[3]{x}}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x}{y}}+1\right)\left(\frac{y-x}{y}\right)^{-1}$ .

► Функція  $y=\sqrt[n]{x}$  та її графік

**Д** 36. Побудуйте графік функції:

а)  $y=\sqrt{x^2+1}$ ; б)  $y=\left(\sqrt{x+2}\right)^2$ ; в)  $y=\sqrt{x^2+4x+4}$ ;

г)  $y=\frac{x^2-2x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}+4$ ; д)  $y=\frac{\sqrt[4]{(x-3)^4}}{x-3}$ ; е)  $y=x-2+\sqrt[4]{(x-2)^4}$ .



Д 37. Побудуйте графік функції:

- а)  $y = \sqrt{x}$ ;                      б)  $y = \sqrt{x+1}$ ;                      в)  $y = \sqrt{x+1}$ ;  
 г)  $y = 2\sqrt[4]{x}$ ;                      д)  $y = 2\sqrt[4]{x-4}$ ;                      е)  $y = 2\sqrt[4]{x-1} - 4$ ;  
 е)  $y = -\sqrt{x}$ ;                      ж)  $y = 3 - \sqrt{x}$ ;                      з)  $y = \sqrt{-x}$ .

Д 38. Побудуйте графік функції:

- а)  $y = \sqrt[3]{x}$ ;                      б)  $y = \sqrt[3]{x-2}$ ;                      в)  $y = \sqrt[3]{x-2}$ ;  
 г)  $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ ;                      д)  $y = 1 - \sqrt[3]{x+2}$ ;                      е)  $y = \sqrt[3]{1-x}$ .

Д 39. Побудуйте графік функції:

- а)  $y = \sqrt{|x|-2}$ ;                      б)  $y = \sqrt[3]{x-2}$ ;                      в)  $y = \sqrt{|x|}$ ;  
 г)  $y = \sqrt{|x|-3}$ ;                      д)  $y = \sqrt{|x|-1}$ ;                      е)  $y = \sqrt{1-|x|}$ ;  
 е)  $|y| = \sqrt{x}$ ;                      ж)  $|y| = \sqrt{x-1}$ ;                      з)  $|y| = 1 - \sqrt{x}$ .

Д 40. Розв'яжіть рівняння графічно:

- а)  $\sqrt[3]{x} = x^2$ ;                      б)  $\sqrt{x} = x-2$ .

► Розв'язування ірраціональних рівнянь

С 41. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{x-12} = 2$ ;                      б)  $\sqrt[4]{x+3} = -1$ ;                      в)  $\sqrt[3]{x+3} = 2$ ;  
 г)  $\sqrt[3]{6x+1} = -5$ ;                      д)  $\sqrt{x^2-9} = 4$ ;                      е)  $\sqrt{x^2+5} = 1$ ;  
 е)  $\sqrt{23+3x-5x^2} = 3$ .

Д 42. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{x^2-2x+6} = x$ ;                      б)  $\sqrt{x^2-2x+6} = -x$ ;  
 в)  $\sqrt{x^2+x+4} = -x$ ;                      г)  $\sqrt{3x-1} = \sqrt{1-x}$ ;  
 д)  $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}$ ;                      е)  $\sqrt[3]{4x+3} = \sqrt[3]{3x-5}$ ;  
 е)  $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$ ;                      ж)  $\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{-2x}$ ;  
 з)  $\sqrt{x^2+3x-1} = \sqrt{2x+5}$ .

Д 43. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{x+8} = x-4$ ;                      б)  $\sqrt{x+8} = 4-x$ ;                      в)  $\sqrt{6-5x} = x-2$ ;  
 г)  $\sqrt{6-5x} = 2-x$ ;                      д)  $\sqrt{x^2-16} = 8-x$ ;                      е)  $\sqrt{3-2x+x^2} = 3-x$ ;  
 е)  $\sqrt{2-x}\sqrt{1-2x} = x+4$ .

**Д 44.** Доведіть, що рівняння не має коренів:

- а)  $\sqrt{x-5}\sqrt[4]{4-x} = 0$ ;      б)  $\sqrt{x-5} + \sqrt{2-x} = 3$ ;  
в)  $\sqrt{7x-1} + 2\sqrt{x-4} + 5 = 0$ ;      г)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = 1$ .

**В 45.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$ ;      б)  $\sqrt{5x+2} - \sqrt{5x-2} = 2$ ;  
в)  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 5$ ;      г)  $2\sqrt{x-1} - \sqrt{x+4} = 1$ ;  
д)  $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$ ;      е)  $0,5\sqrt{x^2-2} + \sqrt{2-x^2} = 0$ .

**В 46.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$ ;  
б)  $\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x} + \sqrt{3x+2} - \sqrt{2x+5} = 0$ ;  
в)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+24} = \sqrt{50-x}$ ;  
г)  $2\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 4$ ;  
д)  $\sqrt{2-x} + \sqrt{2x+7} = 2$ ;  
е)  $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} = 5$ ;  
є)  $\sqrt{x+10+6\sqrt{x+1}} + \sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} = 6$ .

**Д 47.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$ ;      б)  $2\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 1 = 0$ ;  
в)  $\sqrt{x} + 12\sqrt[4]{x} = 0$ ;      г)  $x - 2\sqrt[4]{x} = 0$ ;  
д)  $\sqrt{x+2} - 2\sqrt[4]{x+2} - 3 = 0$ ;      е)  $2\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[6]{x+1} = 6$ .

**В 48.** Розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінних:

- а)  $x^2 - x + \sqrt{x^2 - x + 9} = 3$ ;      б)  $3x^2 + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2 - 15x$ ;  
в)  $\sqrt{x^2 - 3x - 9} - \sqrt{x^2 - 3x - 17} = 2$ ; г)  $\sqrt{\frac{2x+15}{x-4}} + \sqrt{\frac{x-4}{2x+15}} = \frac{10}{3}$ .

**В 49.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x+3}$ ;      б)  $\sqrt[3]{4x+3} - \sqrt[3]{x+2} = 1$ ;  
в)  $\sqrt[3]{x-4} + \sqrt{x+1} = 1$ ; г)  $\sqrt[3]{(x+8)^2} - \sqrt[3]{(x+8)(8-x)} + \sqrt[3]{(8-x)^2} = 4$ ;  
д)  $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$ ;      е)  $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2-x}} = \frac{2}{x}$ ;  
є)  $\sqrt[3]{2x+3} + \sqrt[3]{3x-1} = \sqrt[3]{5x+2}$ .

► Розв'язування ірраціональних нерівностей

**С** 50. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\sqrt{x-1} > 5$ ; б)  $\sqrt{x-1} < 5$ ; в)  $\sqrt{x-1} > -5$ ;  
 г)  $\sqrt{x-1} < -5$ ; д)  $\sqrt{x^2-1} > 2$ ; е)  $\sqrt{x^2-1} < 2$ ;  
 є)  $\sqrt{\frac{x-3}{x+2}} < 1$ ; ж)  $\sqrt{2x^2-11x+18} > 2$ ; з)  $\sqrt{2x^2-11x+18} \leq 2$ .

**Д** 51. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\sqrt{x^2-x-2} > 4+x$ ; б)  $\sqrt{x^2+3x} < 1-x$ ; в)  $\sqrt{x^2+3} > \sqrt{3x+3}$ ;  
 г)  $x + \sqrt{x+18} \leq 2$ ; д)  $x + \sqrt{x+18} > 2$ ; е)  $\sqrt{4x+1} < x-1$ ;  
 є)  $\sqrt{4x+1} \geq x-1$ ; ж)  $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} < 3$ .

**Д** 52. Знайдіть проміжки, на яких функція  $y = \sqrt{x+18} + x - 2$  набуває:

- а) від'ємних значень; б) додатних значень.

**Д** 53. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $(x+3)\sqrt{18-7x-x^2} \geq 0$ ;  
 б)  $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+10x+25} \leq 8$ ;  
 в)  $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+10x+25} < 5$ ;  
 г)  $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+10x+25} \geq 7$ ;  
 д)  $\sqrt{7-|3x-1|} < 2$ .

**В** 54. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $x^2 - 8x - \sqrt{x^2 - 8x} - 6 > 0$ ; б)  $\sqrt{x-2} - \frac{12}{\sqrt{x-2}} \leq 1$ ;  
 в)  $\frac{x}{2x-3} + 3\sqrt{\frac{x}{2x-3}} \geq 4$ .

► Розв'язування систем ірраціональних рівнянь

**Д** 55. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а)  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ \sqrt{x} \sqrt{y} = 6; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ \sqrt{x} \sqrt[3]{y} = 20; \end{cases}$  в)  $\begin{cases} x - y = 12, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2; \end{cases}$   
 г)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y+27} = 3, \\ \sqrt{2x-y+2} = x; \end{cases}$  д)  $\begin{cases} x+y = 10, \\ \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 2,5; \end{cases}$  е)  $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x+2y} = 2x, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x+2y} = 2y; \end{cases}$   
 є)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -1, \\ x+y = -7; \end{cases}$  ж)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ xy = 216; \end{cases}$  з)  $\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 26, \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 6; \end{cases}$

$$\text{i) } \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} - \sqrt{x - y} = 4, \\ \frac{1}{\sqrt{x - y}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

► Властивості степенів із раціональними показниками

**С** 56. Подайте степінь із дробовим показником за допомогою знака кореня:

- а)  $3^{\frac{1}{2}}$ ;      б)  $7^{\frac{1}{5}}$ ;      в)  $2^{\frac{2}{3}}$ ;      г)  $a^{-\frac{3}{4}}$ ;  
 д)  $y^{0,5}$ ;      е)  $c^{-0,25}$ ;      є)  $b^{\frac{5}{4}}$ ;      ж)  $a^{\frac{2}{3}}$ ;  
 з)  $m^{-1,2}$ .

**Д** 57. Замініть степінь із дробовим показником знаком кореня:

- а)  $(2a)^{\frac{1}{3}}$ ;      б)  $2a^{\frac{1}{3}}$ ;      в)  $ab^{\frac{3}{5}}$ ;      г)  $ab^{\frac{3}{4}}$ ;  
 д)  $-x^{-1,5}$ ;      е)  $(x - y)^{\frac{2}{3}}$ ;      є)  $x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}}$ ;      ж)  $7(a + b)^{-\frac{3}{4}}$ ;  
 з)  $7a^{\frac{3}{4}} + 4b^{-\frac{3}{4}}$ .

**С** 58. Подайте арифметичний корінь у вигляді степені з дробовим показником:

- а)  $\sqrt{5}$ ;      б)  $\sqrt[3]{1,2^2}$ ;      в)  $\sqrt[3]{3^{-2}}$ ;      г)  $\sqrt[4]{3x}$ ;  
 д)  $\frac{1}{\sqrt{a^{-1}}}$ ;      е)  $\frac{1}{\sqrt[5]{b^3}}$ ;      є)  $\sqrt[4]{5a^2b^3}$ ;      ж)  $\sqrt[5]{(x - y)^2}$ ;  
 з)  $\sqrt[5]{x^2 - y^2}$ .

**С** 59. Обчисліть:

- а)  $49^{\frac{1}{2}}$ ;      б)  $125^{\frac{1}{3}}$ ;      в)  $4^{-\frac{1}{2}}$ ;      г)  $8^{-\frac{1}{3}}$ ;  
 д)  $9^{\frac{1}{2}}$ ;      е)  $0,16^{-1,5}$ ;      є)  $0,008^{-1\frac{1}{3}}$ ;      ж)  $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{4}{3}}$ .

**Д** 60. Знайдіть область визначення функції:

- а)  $y = x^{\frac{3}{4}}$ ;      б)  $y = x^{-\frac{1}{3}}$ ;      в)  $y = (x - 3)^{\frac{1}{4}}$ ;  
 г)  $y = (x + 5)^{\frac{1}{5}}$ ;      д)  $y = (x^2 - 2x - 8)^{\frac{1}{2}}$ ;      е)  $y = (6 + x - x^2)^{-\frac{1}{3}}$ .

**Д** 61. Побудуйте графік функції:

- а)  $y = x^{\frac{1}{2}}$ ;      б)  $y = (x - 3)^{\frac{1}{2}}$ ;      в)  $y = (x + 3)^{\frac{1}{3}}$ .

**Д 62.** Розташуйте в порядку зростання числа:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;

б)  $(1,5)^{\frac{1}{2}}$ ;  $(1,5)^{\frac{1}{4}}$ ;  $(1,5)^{\frac{1}{5}}$ ;  $(1,5)^{\frac{1}{3}}$ .

**С 63.** Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

а)  $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{3}}$ ; б)  $a^{-\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}}$ ; в)  $m^{0,5} \cdot m^{-4}$ ; г)  $b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{3}{2}}$ ;

д)  $y^{\frac{5}{6}} : y^{\frac{1}{3}}$ ; е)  $b^{-0,2} : b^{-0,7}$ ; є)  $\left(a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}$ ; ж)  $\left(c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{5}}$ ;

з)  $(p^{-5})^{-0,3}$ .

**Д 64.** Спростіть вираз:

а)  $(a^{0,8})^{0,5} \cdot a^{0,6}$ ; б)  $\left(b^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{5}{9}} \cdot b^{\frac{5}{12}}$ ; в)  $(m^{0,3})^{1,2} \cdot (m^{-0,4})^{0,4}$ ;

г)  $y^{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[3]{y^2}$ ; д)  $a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}}\right)^4$ ; е)  $\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot a^{0,7} \cdot x^{0,8}$ ;

є)  $\frac{x^3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{7}{12}}}{x^{-\frac{3}{4}}}$ ; ж)  $\frac{x^{1,5} y^{0,5}}{x^{0,5} y^{1,5}}$ .

**Д 65.** Знайдіть значення виразу:

а)  $10^{\frac{2}{5}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{0,1}$ ;

б)  $8^{\frac{1}{3}} \cdot 16^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{4}$ ;

в)  $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$ ;

г)  $\left(\sqrt[3]{24} \cdot \sqrt[3]{2 \frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ;

д)  $0,5^{-0,5} \cdot 4^{0,25} - 32^{0,4} \cdot 16^{-0,75}$ ;

е)  $\frac{125^{\frac{1}{3}} \cdot 625^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{-0,75}}{0,5^{-0,25} \cdot 0,25^{-0,5}}$ .

**Д 66.** Спростіть вираз:

а)  $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ ;

б)  $\left(x^{\frac{1}{3}} + 3\right) \left(x^{\frac{2}{3}} - 3\right)$ ;

в)  $\left(m^{\frac{1}{2}} - 1\right) \left(m^{\frac{1}{2}} + 1\right)$ ;

г)  $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b\right)$ ;

д)  $\left(1 + c^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2c^{\frac{1}{2}}$ ;

е)  $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \left(b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}\right)^2$ ;

$$\begin{aligned}
 & \text{е) } \left( y^{\frac{2}{3}} + 3y^{\frac{1}{5}} \right)^2 - 6y^{\frac{13}{15}}; \\
 & \text{ж) } \left( x^{\frac{1}{4}} + 1 \right) \left( x^{\frac{1}{4}} - 1 \right) \left( x^{\frac{1}{2}} + 1 \right); \\
 & \text{з) } \left( m^{\frac{1}{20}} + k^{\frac{1}{20}} \right) \left( m^{\frac{1}{10}} + k^{\frac{1}{10}} \right) \left( m^{\frac{1}{5}} + k^{\frac{1}{5}} \right) \left( m^{\frac{1}{20}} - k^{\frac{1}{20}} \right); \\
 & \text{і) } \left( a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} \right) \left( a - a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + b \right) - b^{\frac{5}{6}} \left( b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{6}} \right).
 \end{aligned}$$

**Д** 67. Скоротіть дріб:

$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \frac{4 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{3^2} - 3}; & \text{б) } \frac{2^4 - 2}{5 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}; & \text{в) } \frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}}}{\frac{3}{x^4}}; \\
 & \text{г) } \frac{a - 9x}{a^{0,5} + 3x^{0,5}}; & \text{д) } \frac{x^{1,5} + 27}{x - 3x^{0,5} + 9}; & \text{е) } \frac{b - y}{\frac{1}{b^3} - \frac{1}{y^3}}; \\
 & \text{е) } \frac{a - b}{\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^4}}; & \text{ж) } \frac{x - 3x^{0,8}}{5x^{0,5} - 15x^{0,3}}; & \text{з) } \frac{3x^2 + 6}{x - x^{\frac{1}{2}} - 6}.
 \end{aligned}$$

**В** 68. Спростіть вираз:

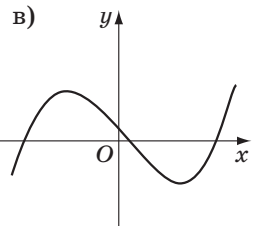
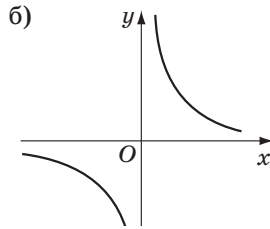
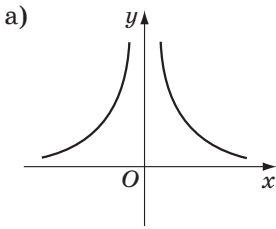
$$\begin{aligned}
 & \text{а) } \left( \frac{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1}{a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{2}}} + 1 \right) \cdot \left( 1 - a^{-\frac{1}{2}} \right); \\
 & \text{б) } \left( \frac{a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{3}{2}}}{a + 2a^{\frac{1}{2}} + 1} - \sqrt{a} \right) : \frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}}; \\
 & \text{в) } \left( \frac{1 + \sqrt[3]{d}}{d - \sqrt[3]{d}} + d^{-\frac{1}{3}} \right)^{-1} \cdot \left( 1 + d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \right); \\
 & \text{г) } \left( \frac{1}{c^{\frac{1}{3}} - 2} - \frac{12}{c - 8} - \frac{2}{c^{\frac{2}{3}} + 2c^{\frac{1}{3}} + 4} \right) \cdot \left( 2 + \frac{c^{\frac{2}{3}}}{c^{\frac{1}{3}} + 2} \right).
 \end{aligned}$$

**В** 69. Спростіть вираз  $\frac{a^{\frac{2}{3}} - 2(ab)^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{ab^{\frac{1}{3}} + (ab)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{2}{3}}}$  і знайдіть

його значення при  $a = 2,4$ ,  $b = -1,7$ .

► Обернена функція

**С 70.** Визначте, чи є оборотною функція, графік якої зображено на рисунку:



**С 71.** Визначте, чи є оборотною функція:

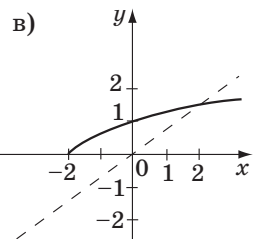
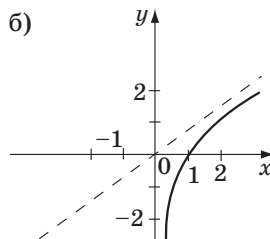
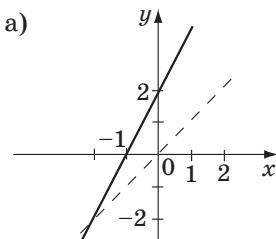
- а)  $y = 3x + 2$ ;    б)  $y = (x + 2)^2$ ;    в)  $y = (x + 2)^2, x \in [-2; +\infty)$ ;  
 г)  $y = \frac{1}{x}$ ;    д)  $y = \frac{1}{x^2}$ ;    е)  $y = \frac{1}{2x - 1}$ ;  
 є)  $y = \sqrt{x - 2}$ ;    ж)  $y = 1 - \sqrt{x}$ ;    з)  $y = x^3$ ;  
 і)  $y = \sqrt{x^2}$ .

**Д 72.** Знайдіть функцію, обернену до функції:

- а)  $y = 2x - 1$ ;    б)  $y = \frac{1}{x}$ ;    в)  $y = x^3$ ;  
 г)  $y = 1 - x$ ;    д)  $y = \frac{x}{2x - 1}$ ;    е)  $y = \sqrt{x - 2}$ .

**Д 73.** Задайте і побудуйте графік функції, оберненої до функції  $y = x^2 + 1, x \in [0; 3]$ .

**Д 74.** За допомогою графіка функції  $f(x)$ , наведеного на рисунку, побудуйте графік функції  $g(x)$ , оберненої до функції  $f(x)$ :



..... **Варіант 2** .....

► Корінь n-го степеня

**С 1.** Знайдіть значення кореня:

- а)  $\sqrt{16}$ ;    б)  $\sqrt{0,81}$ ;    в)  $\sqrt{169}$ ;    г)  $\sqrt[3]{8}$ ;    д)  $\sqrt[3]{-1}$ ;    е)  $\sqrt[3]{-27}$ .

**С** 2. Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt[3]{64}$ ; б)  $\sqrt{\frac{16}{25}}$ ; в)  $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ ; г)  $\sqrt{2\frac{1}{4}}$ ; д)  $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}}$ ; е)  $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ .

**Д** 3. Знайдіть значення виразу:

а)  $5 \cdot \sqrt{64} - \sqrt[3]{27}$ ; б)  $0,1 \cdot \sqrt[3]{0,064} + \frac{\sqrt{256}}{100}$ ;  
 в)  $\sqrt[3]{-125} \cdot \sqrt[4]{16} - \sqrt{-27}$ ; г)  $(\sqrt{7})^2 \cdot 3 + \sqrt[3]{-8}$ ;  
 д)  $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt[4]{5})^4 + (\sqrt[3]{12})^3 \cdot 0,3$ ; е)  $\sqrt{144} \cdot \left(\sqrt[5]{-\frac{1}{12}}\right)^5 - (\sqrt[6]{3})^6$ .

**С** 4. Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = \sqrt{x-2}$ ; б)  $y = \sqrt[4]{1-2x}$ ; в)  $y = \sqrt[3]{3+4x}$ ;  
 г)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ ; д)  $y = \frac{2}{\sqrt[4]{5x-1}}$ ; е)  $y = \frac{\sqrt{6-x}}{x}$ .

**В** 5. Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = \sqrt{x^2+4x-21}$ ; б)  $y = \sqrt[4]{18+3x-x^2}$ ;  
 в)  $y = \frac{x-4}{\sqrt{x^2-5x+4}}$ ; г)  $y = \frac{\sqrt{x^2-7x-18}}{\sqrt[3]{x+3}}$ ;  
 д)  $y = \sqrt[4]{x^2-16} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$ ; е)  $y = \frac{\sqrt{24+5x-x^2}}{x+1} - \sqrt[3]{x^2-6x-7}$ .

**С** 6. Розв'яжіть рівняння:

а)  $x^2=121$ ; б)  $x^4=81$ ; в)  $6x^2=12$ ;  
 г)  $9x^4+18=0$ ; д)  $x^3-64=0$ ; е)  $\frac{1}{3}x^3+9=0$ .

**Д** 7. Розв'яжіть рівняння:

а)  $(x-6)^3=27$ ; б)  $(4x+1)^2=25$ ; в)  $(1-5x)^4+16=0$ ;  
 г)  $x^4-17x^2+16=0$ ; д)  $64x^6-1=0$ ; е)  $x^6+26x^3-27=0$ ;  
 ж)  $2x^6+3x^3+5=0$ ; з)  $x^6-5x^3-24=0$ .

**Д** 8. Укажіть, між якими двома послідовними цілими числами міститься число:

а)  $\sqrt{4,41}$ ; б)  $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$ ; в)  $-\sqrt{0,49}$ ; г)  $\sqrt[3]{\frac{1}{12,5}}$ ; д)  $\sqrt[3]{-216}$ ; е)  $-\sqrt[4]{3\frac{13}{81}}$ .

**С** 9. Оцініть значення  $\sqrt{x}$ , якщо:

а)  $1 \leq x \leq 25$ ; б)  $0,36 < x < 1,21$ ; в)  $1,96 \leq x < 5\frac{44}{49}$ .



**Д 10.** Оцініть значення  $\sqrt[3]{x}$ , якщо:

а)  $1 \leq x < 27$ ;

б)  $-8 \leq x \leq 125$ ;

в)  $2\frac{93}{125} < x < 64$ .

**Д 11.** Оцініть значення  $x$ , якщо:

а)  $2 \leq \sqrt{x} \leq 4$ ;

б)  $-\frac{1}{3} \leq \sqrt[3]{x} \leq 2$ ;

в)  $\frac{2}{3} \leq \sqrt{x} \leq 2\frac{1}{2}$ .

► Властивості кореня  $n$ -го степеня

**С 12.** Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt{64 \cdot 225}$ ;

б)  $\sqrt[3]{1000 \cdot 27}$ ;

в)  $\sqrt[3]{-8 \cdot 125}$ ;

г)  $\sqrt{\frac{81}{169}}$ ;

д)  $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$ ;

е)  $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$ .

**Д 13.** Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt{8 \cdot 18}$ ;

б)  $\sqrt{40 \cdot 360}$ ;

в)  $\sqrt{2,5 \cdot 12,1}$ ;

г)  $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$ ;

д)  $\sqrt[3]{-54 \cdot 32}$ ;

е)  $\sqrt[4]{0,8 \cdot 1,62 \cdot 0,1}$ ;

е)  $\sqrt{45 \cdot 10 \cdot 18}$ .

**Д 14.** Знайдіть значення кореня:

а)  $\sqrt{8^4 \cdot 5^2}$ ;

б)  $\sqrt[3]{2^{12} \cdot 5^3}$ ;

в)  $\sqrt[5]{-3^{10} \cdot 10^{15}}$ ;

г)  $\sqrt[3]{18 \cdot 3 \cdot 2^5}$ ;

д)  $\sqrt[4]{\frac{3^8}{16^5}}$ ;

е)  $\sqrt[3]{\frac{125^2 \cdot 216}{64}}$ ;

е)  $\sqrt[4]{324 \cdot 125 \cdot 20}$ .

**Д 15.** Знайдіть значення виразу:

а)  $\sqrt[3]{10\,000} \cdot \sqrt[3]{0,1}$ ;

б)  $\frac{\sqrt[3]{432}}{\sqrt[3]{2}}$ ;

в)  $\sqrt[5]{81 \cdot 4^3} \cdot \sqrt[5]{3 \cdot 16}$ ;

г)  $\sqrt[7]{16} \cdot \sqrt[7]{-8}$ ;

д)  $\frac{\sqrt[4]{7^{11} \cdot 2^2}}{\sqrt[4]{7^3 \cdot 2^6}}$ ;

е)  $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$ .

**Д 16.** Знайдіть значення числового виразу:

а)  $\sqrt[3]{21 \frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{3} - \sqrt[4]{39 \frac{1}{16}}$ ;

б)  $\sqrt[5]{-1 \frac{17}{32}} \cdot \sqrt[5]{\frac{32}{49}}$ ;

в)  $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} \cdot \sqrt[3]{-3 \frac{3}{8}} : \frac{\sqrt[3]{-216}}{\sqrt[10]{1024}}$ .

**Д 17.** Спростіть вираз:

а)  $\sqrt{c^2}$ ;

б)  $\sqrt[5]{a^5}$ ;

в)  $\sqrt[4]{x^4}$ ,  $x \geq 0$ ;

г)  $\sqrt{25b^2}$ ,  $b < 0$ ;

д)  $\sqrt[3]{64x^{15}}$ ;

е)  $\sqrt{81x^4 y^{10} z^6}$ ,  $y > 0, z < 0$ ;

е)  $24\sqrt[6]{\frac{m^6}{64a^{12}}}$ ,  $m < 0$ ; ж)  $\frac{x^7}{21y}\sqrt[3]{-\frac{27y^{12}}{x^9}}$ ; з)  $-\frac{6b^6}{a^3}\sqrt[4]{\frac{256a^8}{81b^{20}}}$ ,  $b < 0$ .

**В** 18. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt{(a+3)^2}$ ; б)  $\sqrt[4]{(x-5)^4}$ ,  $x \geq 5$ ;  
 в)  $\sqrt{y^2+4y+4}$ ,  $y < -2$ ; г)  $\sqrt{(a-6)^2} + \sqrt[4]{a^4}$ ,  $a < 0$ ;  
 д)  $\sqrt[6]{(b-2)^6} + \sqrt{(b-4)^2}$ ,  $2 \leq b \leq 4$ ; е)  $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-6x+9}$ ,  $x \geq 3$ .

**В** 19. Обчисліть:

а)  $\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$ ; б)  $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}} \cdot \sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$ ;  
 в)  $\sqrt[5]{3\sqrt{2}+5\sqrt{2}} \cdot \sqrt[5]{3\sqrt{2}-5\sqrt{2}}$ ; г)  $\sqrt[4]{(3\sqrt{3}+\sqrt{11})} \cdot \sqrt[4]{(3\sqrt{3}-\sqrt{11})}$ ;  
 д)  $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ; е)  $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}$ .

**Д** 20. Винесіть множник з-під знака кореня:

а)  $\sqrt{20}$ ; б)  $\sqrt[3]{40}$ ; в)  $\sqrt[3]{-81}$ ; г)  $\sqrt[4]{32}$ ;  
 д)  $\sqrt[5]{-96}$ ; е)  $\sqrt[4]{7^4 \cdot 2^5}$ ; є)  $\sqrt[3]{64 \cdot 5^5}$ ; ж)  $\sqrt[5]{10^7 \cdot 8^6 \cdot 9^3}$ ;  
 з)  $\sqrt[3]{-72 \cdot 36}$ .

**Д** 21. Винесіть множник з-під знака кореня:

а)  $\sqrt{27a^8}$ ; б)  $\sqrt[3]{16b^2}$ ; в)  $\sqrt[4]{3a^{10}b^4}$ ; г)  $\sqrt[3]{40a^{16}b^{10}}$ ;  
 д)  $45n^3m\sqrt{\frac{m^6}{162n^4}}$ ,  $m > 0$ ; е)  $\frac{66x^2}{yc^3}\sqrt[4]{\frac{y^8c^{10}}{16x^6}}$ ,  $x < 0$ .

**В** 22. Винесіть множник з-під знака кореня:

а)  $\sqrt[3]{54a^8n^{10}}$ ; б)  $\sqrt[4]{1250a^6c^4}$ ,  $a > 0$ ,  $c < 0$ ;  
 в)  $\sqrt[6]{128x^7y^8}$ ,  $y < 0$ ; г)  $\frac{c}{d^2}\sqrt[4]{c^{11}d^{14}}$ ,  $d < 0$ ;  
 д)  $\frac{n^4x^2}{36m}\sqrt[4]{\frac{162m^7x^{10}}{n^5}}$ ,  $m < 0$ ; е)  $\frac{x^2}{z-1}\sqrt[6]{-x^9(z-1)^8}$ ,  $z < 1$ .

**С** 23. Винесіть множник під знак кореня:

а)  $5\sqrt{7}$ ; б)  $2\sqrt[3]{5}$ ; в)  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{72}$ ; г)  $-1,5\sqrt[3]{\frac{32}{45}}$ ; д)  $0,75\sqrt{\frac{80}{81}}$ ; е)  $\frac{1}{2}\sqrt[5]{96}$ .

**Д** 24. Винесіть множник під знак кореня:

а)  $b\sqrt{5}$ ,  $b > 0$ ; б)  $b\sqrt{5}$ ,  $b < 0$ ; в)  $2y\sqrt{y}$ ;  
 г)  $y\sqrt[4]{-2y}$ ; д)  $2a\sqrt[5]{0,1a^3}$ ; е)  $0,2x^2y^3\sqrt[3]{\frac{10y}{x^2}}$ .

**В** 25. Внесіть множник під знак кореня:

а)  $(c-2)\sqrt[4]{\frac{3}{c-2}}$ ;

б)  $(c-2)\sqrt[4]{\frac{3}{2-c}}$ ;

в)  $(c-2)\sqrt[4]{\frac{3}{(c-2)^2}}$ ;

г)  $(x+3)\sqrt[4]{\frac{5}{x^2+6x+9}}$ ,  $x < -3$ ;

д)  $(x+3)\sqrt[4]{\frac{5}{x^2+6x+9}}$ ;

е)  $(x+3)\sqrt[4]{\frac{5}{x^2+2x-3}}$ ,  $x > 1$ ;

е)  $(1-a)\sqrt[6]{\frac{1}{(1-a)^2}}$ .

**С** 26. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а)  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{5}{\sqrt{10}}$ ; в)  $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ ; г)  $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ ; д)  $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ ; е)  $\frac{7}{\sqrt[5]{14}}$ .

**С** 27. Звільніться від ірраціональності в чисельнику дробу:

а)  $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ; б)  $\frac{\sqrt{6}}{18}$ ; в)  $\frac{5\sqrt{2}}{12}$ ; г)  $\frac{\sqrt[3]{5}}{4}$ ; д)  $\frac{\sqrt[3]{25}}{40}$ ; е)  $\frac{\sqrt[4]{27}}{36}$ .

**Д** 28. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а)  $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ ;

б)  $\frac{12}{3+\sqrt{7}}$ ;

в)  $\frac{12}{2\sqrt{3}+\sqrt{10}}$ ;

г)  $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ ;

д)  $\frac{36}{2+\sqrt[3]{7}}$ ;

е)  $\frac{20}{9+3\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}$ .

**В** 29. Обчисліть суму:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{8}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{38}+\sqrt{35}}.$$

**С** 30. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ ;

б)  $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}}$ ;

в)  $\sqrt{\sqrt{x}}$ ;

г)  $\sqrt[5]{b\sqrt{b}}$ ;

д)  $\sqrt[5]{a^4\sqrt{a^3}}$ ;

е)  $\sqrt[3]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$ .

**С** 31. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt[12]{x^4}$ ;

б)  $\sqrt[4]{25}$ ;

в)  $\sqrt[10]{16}$ ;

г)  $\sqrt[8]{m^6n^{10}}$ ;

д)  $\sqrt[5]{c^3c^2}$ ;

е)  $\sqrt[6]{m^4\sqrt[5]{m^4}}$ .

**В** 32. Обчисліть:

а)  $\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{2}-1}$ ;

б)  $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}} \cdot \sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ;

в)  $\sqrt[3]{\sqrt{3}-1} \cdot \sqrt[6]{4+2\sqrt{3}}$ ;

г)  $\sqrt[6]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ .

**С** 33. Скоротіть дріб:

а)  $\frac{b-4}{\sqrt{b}+2}$ ;

б)  $\frac{a-\sqrt{2}}{a^2-2}$ ;

в)  $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ ;

г)  $\frac{x-3}{x-2\sqrt{3x}+3}$ ;

д)  $\frac{\sqrt{a}+2\sqrt[4]{ab}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ ;

е)  $\frac{\sqrt[3]{a}-4}{\sqrt[6]{a}-2}$ .

**Д** 34. Скоротіть дріб:

а)  $\frac{\sqrt{m^2n}-\sqrt{mn^2}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$ ;

б)  $\frac{\sqrt[4]{m^3}-\sqrt[4]{m}}{m-1}$ ;

в)  $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{1-\sqrt[3]{x^2}}$ ;

г)  $\frac{m+n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}$ ;

д)  $\frac{\sqrt[4]{a^2b^3}-\sqrt[4]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^3b^2}-2\sqrt{ab}+\sqrt[4]{a^2b^3}}$ ;

е)  $\frac{c-27}{\sqrt[3]{c^2}-9}$ .

**В** 35. Спростіть вираз:

а)  $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\left(\sqrt[4]{b}+\sqrt[4]{c}\right)^2$ ;

б)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ ;

в)  $\left(\frac{1}{2\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{1}{2\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)\cdot(b-4a)$ ;

г)  $\frac{a-16b}{\left(\sqrt[4]{a}-2\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a}+2\sqrt[4]{b}\right)}-4\sqrt{b}$ ;

д)  $\frac{\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^2}{2(a-b)}:\frac{1}{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}-3\sqrt{ab}$ ;

е)  $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{2\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}-4}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{a}}+\frac{8+a}{\sqrt[3]{a}-2}:\left(2+\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-\sqrt[3]{a}}\right)$ ;

е)  $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}+\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}\right)^2:\frac{a-b}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$ ;

ж)  $\left(\frac{a\sqrt[4]{b}}{b\sqrt[4]{a}}+\left(\frac{\sqrt[8]{a^5b^7}}{\sqrt{ab^2}}\right)^{-2}\right)\frac{\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)(a-b)^{-1}}{\left(\sqrt[8]{ab}\right)^{-2}}$ .

► Фунція  $y = \sqrt[n]{x}$  та її графік

**Д** 36. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \sqrt{x^2}-2$ ;

б)  $y = \left(\sqrt{x-1}\right)^2$ ;

в)  $y = \sqrt{x^2-6x+9}$ ;

г)  $y = \frac{x^2-4x+4}{\left(\sqrt[5]{x-2}\right)^5}+1$ ;

д)  $y = \frac{\sqrt[4]{(2x-1)^4}}{2x-1}$ ;

е)  $y = x+1+\sqrt[4]{(x+1)^4}$ .

**Д 37.** Побудуйте графік функції:

- |                                |                                  |                                      |
|--------------------------------|----------------------------------|--------------------------------------|
| а) $y = \sqrt[4]{x}$ ;         | б) $y = \sqrt[4]{x} - 2$ ;       | в) $y = \sqrt[4]{x-2}$ ;             |
| г) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ ; | д) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+1}$ ; | е) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x+3} + 1$ ; |
| є) $y = -\sqrt[4]{x}$ ;        | ж) $y = 5 - \sqrt[4]{x}$ ;       | з) $y = \sqrt[4]{-x}$ .              |

**Д 38.** Побудуйте графік функції:

- |                            |                              |                          |
|----------------------------|------------------------------|--------------------------|
| а) $y = \sqrt[3]{x}$ ;     | б) $y = \sqrt[3]{x} + 1$ ;   | в) $y = \sqrt[3]{x-1}$ ; |
| г) $y = 2 - \sqrt[3]{x}$ ; | д) $y = 2 - \sqrt[3]{x-3}$ ; | е) $y = \sqrt[3]{3-x}$ . |

**В 39.** Побудуйте графік функції:

- |                            |   |                           |
|----------------------------|---|---------------------------|
| а) $y = \sqrt[3]{ x +1}$ ; | б) $y = \left  \sqrt[3]{x+1} \right $ ; | в) $y = \sqrt[4]{ x }$ ;  |
| г) $y = \sqrt{ x +2}$ ;    | д) $y = \sqrt{ x -2}$ ;                 | е) $y = \sqrt{2- x }$ ;   |
| є) $ y  = \sqrt[4]{x}$ ;   | ж) $ y  = \sqrt{x-2}$ ;                 | з) $ y  = 2 - \sqrt{x}$ . |

**Д 40.** Розв'яжіть рівняння графічно:

- |                       |                                       |
|-----------------------|---------------------------------------|
| а) $\sqrt{x} = x^2$ ; | б) $\sqrt[3]{x} = \frac{1}{2}x - 2$ . |
|-----------------------|---------------------------------------|

► Розв'язування ірраціональних рівнянь

**С 41.** Розв'яжіть рівняння:

- |                             |                            |                           |
|-----------------------------|----------------------------|---------------------------|
| а) $\sqrt{x-4} = 1$ ;       | б) $\sqrt[4]{2x-1} = -3$ ; | в) $\sqrt[3]{3x-1} = 2$ ; |
| г) $\sqrt[3]{5x-17} = -3$ ; | д) $\sqrt{x^2-16} = 3$ ;   | е) $\sqrt{x^2+25} = 4$ ;  |
| є) $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$ . |                            |                           |

**Д 42.** Розв'яжіть рівняння:

- |  |                                       |
|--|---------------------------------------|
| а) $\sqrt{x^2-3x+12} = x$ ;            | б) $\sqrt{x^2-3x+12} = -x$ ;          |
| в) $\sqrt{x^2+x+1} = -x$ ;             | г) $\sqrt{2x-5} = \sqrt{4-x}$ ;       |
| д) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-4}$ ;        | е) $\sqrt[3]{3x-4} = \sqrt[3]{6-x}$ ; |
| є) $\sqrt{8-5x} = \sqrt{x^2-16}$ ;     | ж) $\sqrt{x^2+x-12} = \sqrt{-3x}$ ;   |
| з) $\sqrt{x^2+11x+16} = \sqrt{4x+6}$ . |                                       |

**Д 43.** Розв'яжіть рівняння:

- |                                    |                              |
|------------------------------------|------------------------------|
| а) $\sqrt{x-2} = x-4$ ;            | б) $\sqrt{x-2} = 4-x$ ;      |
| в) $\sqrt{5x-14} = x-2$ ;          | г) $\sqrt{5x-14} = 2-x$ ;    |
| д) $\sqrt{x^2-1} = x+2$ ;          | е) $\sqrt{x^2+4x-4} = 2-x$ ; |
| є) $\sqrt{3-x}\sqrt{1-3x} = x+5$ . |                              |

**Д 44.** Доведіть, що рівняння не має коренів:

а)  $\sqrt[4]{3-x} \cdot \sqrt{x-5} = 0$ ;

б)  $\sqrt[4]{x-3} + \sqrt{5-2x} = 1$ ;

в)  $5\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+1} = 0$ ;

г)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 2$ .

**В 45.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sqrt{x+10} + \sqrt{6-x} = 4$ ;

б)  $\sqrt{4x+2} + \sqrt{4x-2} = 4$ ;

в)  $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+1} = 6$ ;

г)  $2\sqrt{x-3} - \sqrt{2x+5} = 1$ ;

д)  $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$ ;

е)  $2\sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{1-x^2} = 0$ .

**В 46.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$ ;

б)  $\sqrt{8-x} - \sqrt{9+5x} - \sqrt{4-5x} + \sqrt{5+x} = 0$ ;

в)  $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 7-x$ ;

г)  $\sqrt{1-x} + 3\sqrt{5-x} = 6$ ;

д)  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$ ;

е)  $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{x-2} = 3$ ;

е)  $\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1} + 2\sqrt{2-x} = 4$ .

**Д 47.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} - 6 = 0$ ;

б)  $2\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} - 6 = 0$ ;

в)  $3\sqrt{x} + 5\sqrt[4]{x} = 0$ ;

г)  $x - 8\sqrt[4]{x} = 0$ ;

д)  $\sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{x-2} - 8 = 0$ ;

е)  $2\sqrt[3]{x+3} + \sqrt[6]{x+3} = 10$ .

**В 48.** Розв'яжіть рівняння за допомогою заміни змінних:

а)  $x^2 + 3x - 4 + 2\sqrt{x^2 + 3x + 11} = 0$ ; б)  $7\sqrt{x^2 - 24x} - 2x^2 + 48x + 15 = 0$ ;

в)  $\sqrt{x^2 - x - 11} + \sqrt{x^2 - x - 19} = 4$ ; г)  $\sqrt{\frac{7x}{x+3}} + \sqrt{\frac{x+3}{7x}} = \frac{5}{2}$ .

**В 49.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$ ; б)  $\sqrt[3]{4x-1} - \sqrt{x+1} = 1$ ;

в)  $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$ ; г)  $\sqrt[3]{(x-2)^2} - \sqrt[3]{(x+7)(2-x)} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = 3$ ;

д)  $\sqrt[4]{80+x} + \sqrt[4]{2-x} = 4$ ; е)  $\frac{\sqrt{x+21} + \sqrt{21-x}}{\sqrt{x+21} - \sqrt{21-x}} = \frac{21}{x}$ ;

е)  $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$ .

► Розв'язування ірраціональних нерівностей

**С** 50. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\sqrt{x+4} > 3$ ;      б)  $\sqrt{x+4} < 3$ ;      в)  $\sqrt{x+4} > -3$ ;  
 г)  $\sqrt{x+4} < -3$ ;      д)  $\sqrt{x^2-4} > 1$ ;      е)  $\sqrt{x^2-4} < 1$ ;  
 є)  $\sqrt{\frac{x+5}{x-7}} > 2$ ;      ж)  $\sqrt{3x^2+2x-1} > 2$ ;      з)  $\sqrt{3x^2+2x-1} \leq 2$ .

**Д** 51. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\sqrt{x^2+x-2} > 4-x$ ;      б)  $\sqrt{x^2-x-2} < x-1$ ;  
 в)  $\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+4}$ ;      г)  $\sqrt{x+1} \leq 1-x$ ;  
 д)  $\sqrt{x+1} \geq 1-x$ ;      е)  $\sqrt{5x-4} < 2x-1$ ;  
 є)  $\sqrt{5x-4} > 2x-1$ ;      ж)  $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} < 2$ .

**Д** 52. Знайдіть проміжки, на яких функція  $y = \sqrt{x+10} - x + 2$  набуває:

- а) від'ємних значень;      б) додатних значень.

**Д** 53. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $(x-1)\sqrt{6+x-x^2} \geq 0$ ;  
 б)  $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{4x^2-4x+1} \leq 4\frac{1}{2}$ ;  
 в)  $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{4x^2-4x+1} < 1$ ;  
 г)  $\sqrt{x^2-6x+9} + \sqrt{4x^2-4x+1} \geq 3,5$ ;  
 д)  $\sqrt{|2x+3|-2} \leq 1$ .

**В** 54. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $x^2 - 2x - \sqrt{x^2 - 2x + 12} > 0$ ;      б)  $\sqrt{x+3} - \frac{4}{\sqrt{x+3}} \leq 3$ ;  
 в)  $4\sqrt{\frac{2+3x}{x}} + 5 \leq \frac{3x+2}{x}$ .

► Розв'язання систем ірраціональних рівнянь

**Д** 55. Розв'яжіть систему рівнянь:

- а)  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 7, \\ \sqrt{x} \sqrt{y} = 12; \end{cases}$       б)  $\begin{cases} \sqrt[5]{x} - \sqrt{y} = 1, \\ \sqrt[5]{x} \sqrt{y} = 6; \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} x - y = 45, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9; \end{cases}$       г)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y+8} = 2, \\ \sqrt{3x-2y+6} = y; \end{cases}$

$$\text{д) } \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{6}, \\ x - y = 5; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \sqrt{2x-y} - \sqrt{y} = x-y, \\ \sqrt{2x-y} + \sqrt{y} = x; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5, \\ x + y = 35; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = -1, \\ xy = -8; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 9; \end{cases}$$

$$\text{і) } \begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x^2+xy} = 3, \\ x+y+x^2+xy = 5. \end{cases}$$

► Властивості степенів із раціональними показниками

**С** 56. Подайте степінь із дробовим показником за допомогою знака кореня:

а)  $5^{\frac{1}{2}}$ ; б)  $2^{\frac{1}{3}}$ ; в)  $4^{\frac{3}{5}}$ ; г)  $a^{-\frac{1}{4}}$ ; д)  $c^{0,5}$ ; е)  $b^{-0,75}$ ; є)  $y^{\frac{7}{5}}$ ; ж)  $x^{\frac{5}{6}}$ ; з)  $a^{-1,4}$ .

**Д** 57. Замініть степінь із дробовим показником знаком кореня:

а)  $(5x)^{\frac{1}{6}}$ ; б)  $5x^{\frac{1}{6}}$ ; в)  $xy^{\frac{4}{7}}$ ;  
 г)  $mn^{-\frac{2}{5}}$ ; д)  $-a^{-1,2}$ ; е)  $(a-b)^{\frac{2}{5}}$ ;  
 є)  $a^{\frac{2}{5}} - b^{\frac{2}{5}}$ ; ж)  $9(m+n)^{-\frac{4}{7}}$ ; з)  $2m^{\frac{4}{7}} + 5n^{-\frac{2}{3}}$ .

**С** 58. Подайте арифметичний корінь у вигляді степеня з дробовим показником:

а)  $\sqrt{7}$ ; б)  $\sqrt[4]{1,5^3}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt[5]{3^4}}$ ; г)  $\sqrt[3]{2a}$ ; д)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$ ;  
 є)  $\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$ ; є)  $\sqrt[5]{10a^2c^3}$ ; ж)  $\sqrt[4]{(a-b)^3}$ ; з)  $\sqrt[4]{a^3 - b^3}$ .

**С** 59. Обчисліть:

а)  $27^{\frac{1}{3}}$ ; б)  $25^{\frac{1}{2}}$ ; в)  $25^{-\frac{1}{2}}$ ; г)  $32^{-\frac{1}{5}}$ ;  
 д)  $0,16^{\frac{3}{2}}$ ; е)  $0,64^{-1,5}$ ; є)  $0,001^{-\frac{2}{3}}$ ; ж)  $\left(12\frac{1}{4}\right)^{1,5}$ .

**Д** 60. Знайдіть область визначення функції:

а)  $y = x^{\frac{1}{6}}$ ; б)  $y = x^{-\frac{2}{5}}$ ; в)  $y = (x+5)^{\frac{1}{4}}$ ;  
 г)  $y = (8-x)^{\frac{1}{3}}$ ; д)  $y = (15-2x-x^2)^{\frac{1}{4}}$ ; е)  $y = (x^2+x-20)^{-\frac{1}{5}}$ .



Д 61. Побудуйте графік функції:

а)  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ;                      б)  $y = (x+1)^{\frac{1}{2}}$ ;                      в)  $y = (x+5)^{\frac{1}{3}}$ .

Д 62. Розташуйте в порядку зростання числа:

а)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$ ;  $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{5}}$ ;    б)  $2^2$ ;  $2^{\frac{1}{3}}$ ;  $2^{\frac{1}{4}}$ ;  $2^{\frac{1}{5}}$ .

С 63. Подайте вираз у вигляді степеня з раціональним показником:

а)  $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}}$ ;                      б)  $a^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{6}}$ ;                      в)  $c^{1,2} \cdot c^{-0,8}$ ;  
г)  $b^{\frac{3}{5}} : b^{\frac{1}{10}}$ ;                      д)  $y^{-\frac{2}{3}} : y^{\frac{1}{6}}$ ;                      е)  $m^{0,2} : m^{-0,3}$ ;  
є)  $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ ;                      ж)  $\left(m^{-\frac{3}{8}}\right)^{\frac{2}{3}}$ ;                      з)  $(n^{-0,4})^{-2,5}$ .

Д 64. Спростіть вираз:

а)  $\left(x^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}} \cdot x^{1,6}$ ;    б)  $(x^{-0,3})^{\frac{1}{3}} \cdot x^{1,1}$ ;                      в)  $(a^{0,8})^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(a^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1,5}$ ;  
г)  $\sqrt[4]{c^3} \cdot \sqrt[5]{c}$ ;                      д)  $\left(c^{-\frac{3}{7}} \cdot y^{-0,4}\right)^3 \cdot c^{\frac{2}{7}} \cdot y^{0,2}$ ;    е)  $p^{-1} \cdot q^{\frac{5}{4}} \cdot \left(p^{-\frac{2}{7}} \cdot q^{\frac{1}{14}}\right)^{-3,5}$ ;  
є)  $\frac{a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{15}}}{a^{\frac{4}{15}}}$ ;    ж)  $\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{5}}}{a^{-\frac{1}{2}} b^{1,4}}$ .

Д 65. Знайдіть значення виразу:

а)  $2^{1,3} \cdot 2^{-0,7} \cdot 2^{1,4}$ ;    б)  $3 \cdot 9^{0,4} \cdot \sqrt[5]{3}$ ;                      в)  $(27 \cdot 64)^{-\frac{1}{3}}$ ;  
г)  $\left(\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt[3]{13 \frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ ;    д)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{6}} + 49^{0,3} \cdot 7^{0,4}$ ;    е)  $\frac{32^{0,6} \cdot 8^{0,4}}{0,5^{-1,2} \cdot 125^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{-1}}$ .

Д 66. Спростіть вираз:

а)  $b^{\frac{1}{3}} c^{\frac{1}{4}} \left(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{3}{4}}\right)$ ;                      б)  $(2-y^{1,5})(2+y^{1,5})$ ;  
в)  $(3p^{0,5} + q^{-1})(3p^{0,5} - q^{-1})$ ;    г)  $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right) \left(x + x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y\right)$ ;  
д)  $\left(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$ ;                      е)  $\sqrt{m} + \sqrt{n} - \left(m^{\frac{1}{4}} - n^{\frac{1}{4}}\right)^2$ ;

е)  $\left(a^{\frac{3}{2}} + 5a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 10a^2$ ;      ж)  $\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{8}} + b^{\frac{1}{8}}\right)\left(a^{\frac{1}{8}} - b^{\frac{1}{8}}\right)$ ;  
 з)  $\left(a^{\frac{1}{24}} + b^{\frac{1}{24}}\right)\left(a^{\frac{1}{24}} - b^{\frac{1}{24}}\right)\left(a^{\frac{1}{12}} + b^{\frac{1}{12}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$ ;  
 і)  $\left(x^{\frac{1}{9}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{9}} - x^{\frac{1}{9}} + 1\right) - x^{\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{6}} + x^{\frac{1}{12}}\right)$ .

**Д** 67. Скоротіть дріб:

а)  $\frac{3+3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$ ;      б)  $\frac{10}{10-10^{\frac{1}{2}}}$ ;      в)  $\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{2x}$ ;  
 г)  $\frac{b-4y}{b^{0,5}+2y^{0,5}}$ ;      д)  $\frac{y^{1,5}-8}{y+2y^{0,5}+4}$ ;      е)  $\frac{a-x}{a^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}$ ;  
 є)  $\frac{x-y}{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{y^4}}$ ;      ж)  $\frac{b-2b^{0,7}}{5b^{0,5}-10b^{0,2}}$ ;      з)  $\frac{7y^{\frac{1}{4}}-14}{y^2+3y^{\frac{1}{4}}-10}$ .

**В** 68. Спростіть вираз:

а)  $\left(\frac{b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-2}{b-1}-2\right)\cdot\left(1+b^{-\frac{1}{2}}\right)$ ;  
 б)  $\left(\frac{2+2b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}+b^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{b}}{b+2\sqrt{b}+1}$ ;  
 в)  $\left(\frac{b^{\frac{2}{3}}-1}{b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}+b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-1}:\frac{1-\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}$ ;  
 г)  $\frac{b^{\frac{1}{2}}-4}{b-2b^{\frac{1}{2}}-8}\cdot\left(\frac{b^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}-8}-\frac{b+16}{2b-32}+\frac{4}{b+4b^{\frac{1}{2}}}\right)$ .

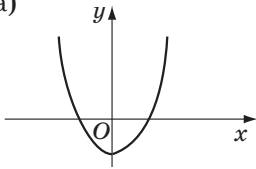
**В** 69. Спростіть вираз  $\frac{a^{\frac{4}{3}}+2(ab)^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{4}{3}}}{a^2-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}}\cdot\frac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ba^{\frac{2}{3}}}{b+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$  і знайдіть його

значення, якщо  $a=-1,4$ ,  $b=2,7$ .

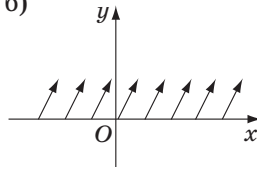
► Обернена функція

**С 70.** Визначте, чи є оборотною функція, графік якої зображено на рисунку:

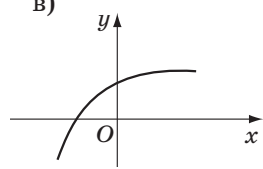
а)



б)



в)



**С 71.** Визначте, чи є оборотною функція:

а)  $y = 5x - 1$ ;

б)  $y = (x - 1)^2$ ;

в)  $y = (x - 1)^2, x \in (-\infty; 1]$ ;

г)  $y = -\frac{1}{x^2}$ ;

д)  $y = -\frac{1}{x}$ ;

е)  $y = \frac{1}{3x + 2}$ ;

є)  $y = \sqrt{x + 1}$ ;

ж)  $y = 1 - \sqrt{x + 1}$ ;

з)  $y = x^3 + 1$ ;

і)  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ .

**Д 72.** Знайдіть функцію, обернену до функції:

а)  $y = x - 4$ ;

б)  $y = -\frac{1}{x}$ ;

в)  $y = x^3 + 1$ ;

г)  $y = 1 - 2x$ ;

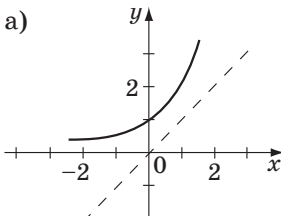
д)  $y = \frac{1}{3x + 1}$ ;

е)  $y = \sqrt{x + 1}$ .

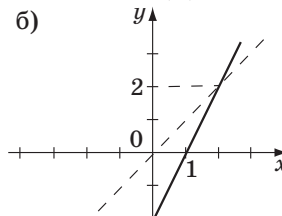
**Д 73.** Задайте і побудуйте графік функції, оберненої до функції  $y = x^2 - 1, x \in [-2; 0]$ .

**Д 74.** За допомогою графіка функції  $f(x)$ , наведеного на рисунку, побудуйте графік функції  $g(x)$ , оберненої до функції  $f(x)$ :

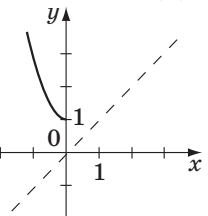
а)



б)



в)



Тест 4. Корінь  $n$ -го степеня .....

..... *Варіант 1* .....

**П 1.** Укажіть серед наведених чисел раціональне.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt[3]{8}}{2}$	$\sqrt{0,081}$	$\sqrt[3]{0,27}$

II 2. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x-4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$[2; +\infty)$	$[-2; 2]$	$[4; +\infty)$	$[-4; +\infty)$	$[-2; +\infty)$

II 3. Обчисліть:  $\sqrt{(-3)^2} + \sqrt[3]{(-5)^3}$ .

А	Б	В	Г	Д
15	2	-2	-8	8

II 4. Спростіть вираз  $\sqrt{(a+3)^2} + \sqrt{a^2}$ , якщо  $a < -4$ .

А	Б	В	Г	Д
$2a+3$	$-3$	$3-2a$	3	$-2a-3$

II 5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу  $\frac{2}{5+\sqrt{5}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$2(5+\sqrt{5})$	$5-\sqrt{5}$	$0,1(5+\sqrt{5})$	$(5-\sqrt{5}) \cdot 0,1$	$2(5-\sqrt{5})$

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1-4), виберіть твердження, позначене буквою (А-Д).

C 6. Установіть відповідність між виразами (1-4) і виразами, отриманими в результаті їхніх перетворень (А-Д).

- |   |                |
|---|----------------|
| 1 $\sqrt{3} \left( \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ | А $2-\sqrt{3}$ |
| 2 $(\sqrt{3} + \sqrt{12})^2$                              | Б $\sqrt{3}-2$ |
| 3 $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$                                 | В 4            |
| 4 $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$                                    | Г $\sqrt{3}+2$ |
|   | Д 27           |

C 7. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} + 3 = 0$ . У відповідь запишіть добуток коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть 100.

C 8. Знайдіть корені рівняння  $\sqrt{5+x} = 2x$ , якщо їх декілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

- Д 9. Знайдіть суму коренів рівняння  $6\sqrt[3]{x^2} + 7\sqrt[3]{x} - 3 = 0$ .
- Д 10. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності  $\sqrt{(x-3)(x-1)} \leq \sqrt{3}$ .
- В 11. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{4x+13} + \sqrt{x+1} = \sqrt{3x+12}$ .
- В 12. Спростіть вираз  $\left( \frac{x^2+y^2}{x\sqrt{y}+\sqrt{x^3}} - \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{x}{y}$ .

Варіант 2

- П 1. Укажіть серед наведених чисел раціональне.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[4]{0,81}$	$\frac{5}{\sqrt[3]{-125}}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$	$\sqrt{12,1}$

- П 2. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x-16}$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-16; +\infty)$	$[4; +\infty)$	$[-4; 4]$	$[-4; +\infty)$	$[16; +\infty)$

- П 3. Обчисліть:  $\sqrt[3]{(-7)^3} - \sqrt{(-10)^2}$ .

А	Б	В	Г	Д
-93	-17	17	3	-3

- П 4. Спростіть вираз  $\sqrt{(a-4)^2} - \sqrt{a^2}$ , якщо  $a < -1$ .

А	Б	В	Г	Д
4	$2a-4$	-4	$2a+4$	$4-2a$

- П 5. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу

$$\frac{3}{3-\sqrt{3}}$$

А	Б	В	Г	Д
$3(3+\sqrt{3})$	$0,5(3-\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$0,5(3+\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1-4), виберіть твердження, позначене буквою (А-Д).

**С** 6. Установіть відповідність між виразами (1–4) і виразами, отриманими в результаті їхніх перетворень (А–Д).

- |   |                  |
|---|------------------|
| 1 $\sqrt{5} \left( \sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$ | А 6              |
| 2 $(\sqrt{5} + \sqrt{45})^2$                              | Б 80             |
| 3 $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$                               | В $2 - \sqrt{5}$ |
| 4 $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$                                  | Г $\sqrt{5} - 2$ |
|   | Д $\sqrt{5} + 2$ |

**С** 7. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+5} + 1 = 0$ . У відповідь запишіть добуток коренів. Якщо рівняння не має коренів, то у відповідь запишіть 100.

**С** 8. Знайдіть корені рівняння  $\sqrt{x+5} = -2x$ ; якщо коренів декілька, то у відповідь запишіть їхню суму.

**Д** 9. Знайдіть суму коренів рівняння  $2\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 3 = 0$ .

**Д** 10. Знайдіть найбільший цілий розв'язок нерівності  $\sqrt{(x-2)(x-3)} \leq \sqrt{6}$ .

**В** 11. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x} + \sqrt{3x+1} = \sqrt{7x+2}$ .

**В** 12. Спростіть вираз  $\left( \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + 1} - \frac{3\sqrt[3]{x-1}}{x+1} \right) \cdot \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$ .

Тест 5. Степінь із раціональним показником

Варіант 1

**П** 1. Знайдіть значення виразу  $49^{\frac{1}{2}} \cdot (0,001)^{-\frac{1}{3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
7	0,7	-70	70	-0,7

**П** 2. Спростіть вираз  $\frac{b^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{1}{6}}}{b^{-\frac{5}{12}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$b^{\frac{3}{10}}$	$b$	$b^{\frac{1}{6}}$	$b^{\frac{3}{10}}$	$\frac{1}{b}$

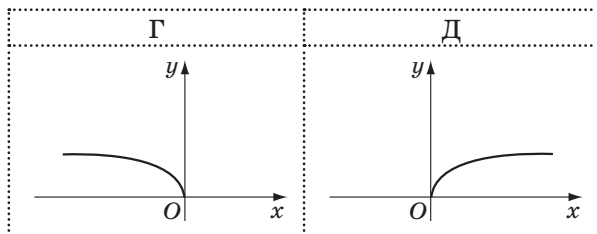
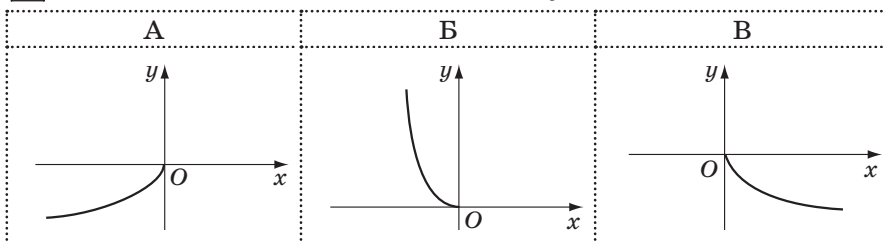
II 3. Спростіть вираз  $y^{\sqrt{2}} \cdot y^{1,5} : \sqrt[3]{y^{3\sqrt{2}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$y$	$y^{1,5}$	$y^{\sqrt{3}}$	$y^3$	$y^2$

II 4. Обчисліть:  $\left(2 \cdot \sqrt[4]{8 \cdot 4^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	2	1	4

II 5. Укажіть ескіз графіка функції  $y = -x^{\frac{1}{2}}$ .



Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

С 6. Установіть відповідність між функціями (1–4) і оберненими до них функціями (А–Д).

$$1 \quad y = \frac{1}{2x+3}$$

$$2 \quad y = 2x-3$$

$$3 \quad y = \frac{1}{2}x+3$$

$$4 \quad y = \frac{1}{3x-2}$$

$$А \quad y = \frac{2}{3x} + \frac{1}{3}$$

$$Б \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$В \quad y = \frac{1}{2x-3}$$

$$Г \quad y = 2x-6$$

$$Д \quad y = \frac{1-3x}{2x}$$

- С 7. Розв'яжіть рівняння  $x^{0,5} + 5x^{\frac{1}{4}} - 14 = 0$ . У відповідь запишіть суму коренів, якщо їх декілька.
- С 8. Знайдіть значення виразу  $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)\left(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)(x + y)$  при  $x = 4$ ,  $y = 5$ .
- Д 9. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}} = 3, \\ x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}} = 1. \end{cases}$  У відповідь запишіть  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.
- Д 10. Скільки цілих значень набуває функція  $y = x^{-\frac{1}{2}}$ , якщо  $x \in \left[\frac{1}{16}; \frac{4}{9}\right]$ .
- В 11. Знайдіть область визначення функції  $y = (\sqrt{3-x} - 2)^{\frac{1}{4}}$ .
- В 12. Обчисліть:  $(\sqrt{5} - 1)^{\frac{1}{2}}(6 + 2\sqrt{5})^{\frac{1}{4}}$ .

..... Варіант 2 .....

П 1. Знайдіть значення виразу  $27^{\frac{1}{3}} \cdot (0,001)^{-\frac{1}{3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
3	30	-0,3	0,3	-30

П 2. Спростіть вираз  $\frac{a^{\frac{5}{8}} \cdot a^{-\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{8}}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$a^{\frac{29}{48}}$	$a^{-\frac{5}{6}}$	$a^{\frac{7}{12}}$	$a^{\frac{5}{6}}$	$a^{\frac{1}{3}}$

П 3. Спростіть вираз  $x^{\sqrt{2}} \cdot x^{1,5} : \sqrt[4]{x^{4\sqrt{2}}}$ .

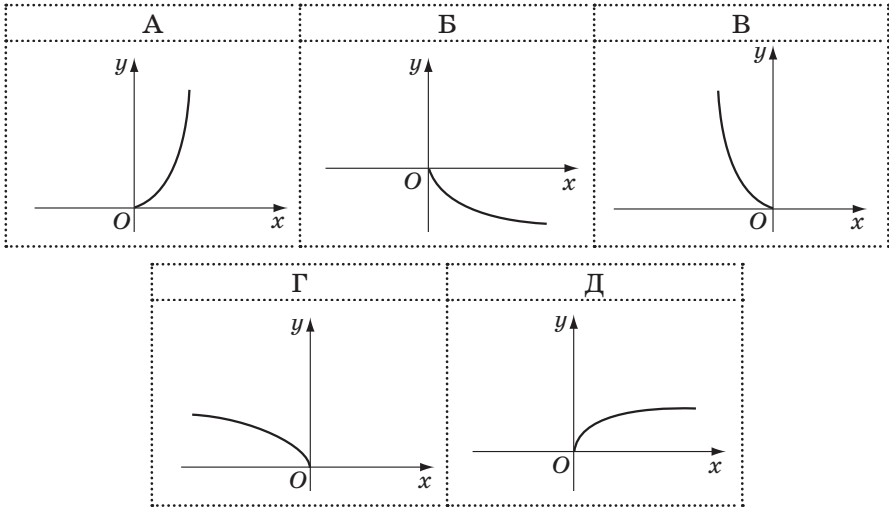
А	Б	В	Г	Д
$x^{1,5}$	$x^2$	$x^3$	$x^4$	$x$

П 4. Обчисліть:  $\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{1}{3}}} : (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt{2}$	2	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$



II 5. Укажіть ескіз графіка функції  $y = (-x)^{\frac{1}{2}}$ .



Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

С 6. Установіть відповідність між функціями (1–4) і оберненими до них функціями ( А–Д).

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 1 $y = \frac{1}{3x+5}$   | А $y = 5x - 15$         |
| 2 $y = 3x - 5$           | Б $y = \frac{1}{3x-5}$  |
| 3 $y = \frac{1}{5}x + 3$ | В $y = \frac{1}{5x-3}$  |
| 4 $y = \frac{1+3x}{5x}$  | Г $y = \frac{1-5x}{3x}$ |
|                          | Д $y = \frac{5+x}{3}$   |

С 7. Розв'яжіть рівняння  $x^{0.5} + 2x^{\frac{1}{4}} - 15 = 0$ . У відповідь запишіть суму коренів, якщо їх декілька.

С 8. Знайдіть значення виразу  $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)(a+b)$  при  $a = \sqrt{6}$ ,  $b = 2$ .

**Д 9.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 3, \\ x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = 1. \end{cases}$  У відповідь за-  
пишіть  $x_0 + y_0$ , де  $(x_0; y_0)$  — розв'язок системи.

**Д 10.** Скільки цілих значень набуває функція  $y = x^{-\frac{1}{4}}$ , якщо  $x \in \left[ \frac{1}{625}; 5\frac{1}{16} \right]$ .

**В 11.** Знайдіть область визначення функції  $y = (\sqrt{2x+4} - 5)^{\frac{1}{6}}$ .

**В 12.** Обчисліть:  $(\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{3}} (9 + 4\sqrt{5})^{\frac{1}{6}}$ .

**Контрольна робота 3. Степенева функція** .....

*Варіант 1* .....

**П 1.** Знайдіть значення виразу:

а)  $5\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[5]{-32} + \sqrt[4]{81}$ ;    б)  $(0,008)^{\frac{1}{3}} \cdot 64^{\frac{2}{3}}$ ;    в)  $\left( \frac{2^{1,3} \cdot 2^{1,4}}{2^{0,7}} \right)^{\frac{3}{2}}$ .

**П 2.** Побудуйте графік функції  $y = \sqrt{x-3} + 2$ .

**С 3.** Спростіть вираз:

а)  $\frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt[4]{m} + \sqrt[4]{n}}$ ;    б)  $\frac{\sqrt{a} \sqrt{b} - b}{a^{0,5} + 2a^{0,25}b^{0,25} + b^{0,5}}$ .

**С 4.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $x^{0,5} - 7x^{0,25} + 12 = 0$ ;    б)  $\sqrt{2x+8} = x$ ;  
в)  $\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = 2$ ;    г)  $\sqrt[4]{\frac{3-x}{2x+1}} + \sqrt[4]{\frac{2x+1}{3-x}} = 2$ .

**Д 5.** Розв'яжіть нерівність:

а)  $\sqrt[4]{5-x} \leq 2$ ;    б)  $\sqrt{x^2-9} > -1$ ;  
в)  $\sqrt[3]{2-x} < 1$ ;    г)  $\sqrt{3x+x^2} < 4-x$ .

**В 6.** Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt[3]{y} = 4, \\ \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 6. \end{cases}$

..... *Варіант 2* .....

**П** 1. Знайдіть значення виразу:

а)  $\frac{1}{2}\sqrt[4]{16} - 2\sqrt[3]{-27} + \sqrt[5]{32}$ ; б)  $(0,125)^{\frac{1}{3}} \cdot 27^{\frac{2}{3}}$ ; в)  $\left(\frac{7^{2,5} \cdot 7^{1,7}}{7^{0,2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

**П** 2. Побудуйте графік функції  $y = \sqrt{x+4} + 1$ .

**С** 3. Спростіть вираз:

а)  $\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b}}$ ;

б)  $\frac{a^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{3}}}{a - a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}$ .

**С** 4. Розв'яжіть рівняння:

а)  $y^{\frac{1}{2}} - 7y^{\frac{1}{4}} + 10 = 0$ ;

б)  $\sqrt{2x+48} = -x$ ;

в)  $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$ ;

г)  $\sqrt[6]{\frac{x-1}{3x+1}} + \sqrt[6]{\frac{3x+1}{x-1}} = 2$ .

**Д** 5. Розв'яжіть нерівність:

а)  $\sqrt{3-x} \leq 1$ ;

б)  $\sqrt{x^2-4} > -2$ ;

в)  $\sqrt[5]{x-3} > 1$ ;

г)  $\sqrt{x^2-5x+7} < 2+x$ .

**В** 6. Розв'яжіть систему рівнянь  $\begin{cases} \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} = 2, \\ \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{y} = 4. \end{cases}$

### ТЕМА 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

**Стислі теоретичні відомості** .....

▶ Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left( \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \right)$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \quad \left( \alpha \neq \pi k, k \in \mathbf{Z} \right) \quad \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \left( \alpha \neq \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z} \right)$$

▶ Формули додавання

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

▶ Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

▶ Формули перетворення суми (або різниці) однойменних тригонометричних функцій на добуток

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

▶ Формули перетворення добутку тригонометричних функцій на суму (або різницю)

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

▶ Формули потрійного аргументу

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

▶ Формули половинного аргументу

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}; \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

► Тригонометричні функції числового аргументу

- С 1. Виразить у радіанах кути:  
 а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $120^\circ$ ; г)  $180^\circ$ ; д)  $225^\circ$ ; е)  $270^\circ$ ;  
 є)  $300^\circ$ ; ж)  $330^\circ$ ; з)  $360^\circ$ .

- С 2. Виразить у радіанах кути:  
 а)  $20^\circ$ ; б)  $400^\circ$ ; в)  $480^\circ$ ; г)  $1200^\circ$ ; д)  $1600^\circ$ ; е)  $3600^\circ$ .

- С 3. Виразить у градусах кути:  
 а)  $\frac{\pi}{36}$ ; б)  $\frac{\pi}{12}$ ; в)  $\frac{\pi}{8}$ ; г)  $\frac{\pi}{25}$ ; д)  $\frac{2\pi}{3}$ ; е)  $\frac{7\pi}{9}$   
 є)  $8\pi$ ; ж)  $\frac{10\pi}{3}$ ; з)  $\frac{18\pi}{25}$ .

- С 4. Визначте знак виразу:  
 а)  $\sin \frac{5\pi}{7}$ ; б)  $\cos \frac{6\pi}{5}$ ; в)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ ; г)  $\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{7}$ ;  
 д)  $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{7}$ ; е)  $\sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{3\pi}{10} \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ ; є)  $\frac{\cos \frac{3\pi}{5}}{\sin \frac{5\pi}{4}}$ .

- С 5. Визначте знак виразу:  
 а)  $\sin 200^\circ$ ;  
 б)  $\cos 112^\circ$ ;  
 в)  $\operatorname{tg} 130^\circ$ ;  
 г)  $\operatorname{ctg} 250^\circ$ ;  
 д)  $\operatorname{tg} 370^\circ \cdot \sin 350^\circ \cdot \cos 280^\circ \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ$ ;  
 е)  $\frac{\sin 230^\circ \cdot \operatorname{ctg} 100^\circ}{\cos 130^\circ \cdot \operatorname{tg} 50^\circ}$ ;  
 є)  $\operatorname{tg}(-18^\circ) \cdot \cos(-200^\circ) \cdot \cos(-350^\circ)$ .

- Д 6. Знайдіть значення виразу:  
 а)  $\sin 30^\circ - \cos 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$ ;  
 б)  $2 \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{2\pi}{3}$ ;  
 в)  $-\sin 90^\circ + \cos 270^\circ \cdot \sin 45^\circ + \cos 180^\circ$ ;  
 г)  $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ - \cos 210^\circ \cdot \sin 300^\circ$ ;  
 д)  $\left( \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4}$ ;  
 е)  $\sin 270^\circ \cdot \cos \frac{4\pi}{3} - \cos 135^\circ \cdot \sin(-45^\circ)$ .



► Властивості і графіки тригонометричних функцій

У завданнях 13–15 використовуйте графіки функцій  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  і  $y = \operatorname{ctg} x$ .

Д 13. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ;    б)  $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;    в)  $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ .

Д 14. Побудуйте графік функції:

а)  $y = -\cos x$ ;    б)  $y = 2\sin x$ ;    в)  $y = -2\operatorname{ctg} x$ .

Д 15. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \cos x + 1$ ; б)  $y = \sin x - 1$ ; в)  $y = -\operatorname{tg} x - 1$ ; г)  $y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{ctg} x$ .

Д 16. Укажіть період і побудуйте графік функції:

а)  $y = \cos 2x$ ;    б)  $y = \sin \frac{x}{2}$ ;    в)  $y = 2\cos\left(-\frac{x}{2}\right)$ ;    г)  $y = -\operatorname{ctg} 3x$ .

В 17. Перетворіть формулу заданої функції, наприклад подайте функцію  $y = A\sin(\omega x + \varphi)$  у вигляді  $y = A\sin\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ , і побудуйте її графік:

а)  $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ ;    б)  $y = 3\cos(2x + \pi)$ ;  
в)  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$ ;    г)  $y = -2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ .

В 18. Побудуйте графік функції:

а)  $y = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ ;    б)  $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ ;  
в)  $y = \cos x - |\cos x|$ ;    г)  $y = |\operatorname{tg} x| - 1$ .

В 19. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівняння:

а)  $|y| = \sin x$ ;    б)  $|y| = \cos x - 1$ ;    в)  $|y| = \operatorname{ctg} 2x$ .

► Спрощення тригонометричних виразів

С 20. Спростіть вираз:

а)  $1 - \cos^2 \alpha$ ;    б)  $\sin^2 \alpha - 1$ ;    в)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha$ ;  
г)  $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - 1}$ ;    д)  $1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;    е)  $\sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - \cos \alpha$ .

**С** 21. Спростіть вираз:

а)  $(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)$ ;

б)  $(\cos \alpha + 1)(\cos \alpha - 1) + \sin^2 \alpha$ ;

в)  $3 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ ;

г)  $\frac{\frac{1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha}$ ;

д)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ .

**С** 22. Спростіть вираз:

а)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ ; б)  $\sin^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$ ;

в)  $\frac{2\sin^2 \alpha - 1}{1 - 2\cos^2 \alpha}$ ;

г)  $1 - \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$ ;

д)  $\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + 1$ .

**С** 23. Спростіть вираз:

а)  $\frac{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ ;

б)  $\frac{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2}{1}$ ;

в)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha)}$ .

**С** 24. Доведіть тотожність:

а)  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ ; б)  $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1} = \operatorname{tg}^2 \alpha$ ;

в)  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha$ ;

г)  $\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha - 1} = 1$ ;

д)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1}$ ;

е)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ ;

е)  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha$ .

**Д** 25. Знайдіть значення виразу:

а)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}$ , якщо  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  и  $0 < \alpha < 90^\circ$ ;

б)  $\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha}$ , якщо  $\operatorname{ctg} \alpha = 3$ ;

в)  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**С** 26. Обчисліть:

а)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 2$ ;

б)  $\operatorname{tg}^3 \alpha + \operatorname{ctg}^3 \alpha$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 5$ .



**Д 27.** Спростіть вираз, використовуючи формули зведення:

а)  $\sin^2(\pi + \alpha) + \cos^2(\pi - \alpha)$ ;

б)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + 1$ ;

в)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi - \alpha) \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ ;

г)  $\frac{\operatorname{ctg}(2\pi + \alpha) \sin^2 \alpha}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$ ;

д)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .

**Д 28.** Спростіть вираз, використовуючи формули зведення:

а)  $\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(4\pi + \alpha)} - \operatorname{tg}^2\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$ ;    б)  $\sin\left(\frac{31\pi}{2} + \alpha\right) - \cos(\alpha - 25\pi)$ .

**С 29.** Обчисліть:

а)  $\sin 13^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 13^\circ$ ;    б)  $\cos 76^\circ \cos 16^\circ + \sin 76^\circ \sin 16^\circ$ ;

в)  $\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ$ ;    г)  $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}$ ;

д)  $\frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{ctg} 65^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ}$ ;    е)  $\frac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{ctg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{ctg} 18^\circ}$ .

**Д 30.** Обчисліть:

а)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$ ;    б)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$ ;    в)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$ ;

г)  $\frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$ ;    д)  $(\cos^2 10^\circ - \cos^2 80^\circ)^2 + \cos^2 70^\circ$ .

**Д 31.** Спростіть:

а)  $\sin 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 3\alpha \sin 2\alpha$ ;    б)  $\cos 5\alpha \cos 3\alpha + \sin 5\alpha \sin 3\alpha$ ;

в)  $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha \cos\beta}{\cos(\alpha + \beta) + 2\sin\alpha \sin\beta}$ ;    г)  $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$ ;

д)  $\sin^3 \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos^3 \alpha$ .

**Д 32.** Обчисліть:

а)  $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ ;    б)  $\operatorname{tg} 5^\circ \cdot \operatorname{tg} 85^\circ$ ;

в)  $\operatorname{ctg} 1^\circ \cdot \operatorname{ctg} 2^\circ \cdot \operatorname{ctg} 3^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{ctg} 89^\circ$ ;    г)  $\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$ ;

д)  $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$ .

**Д 33.** Доведіть тотожність:

а)  $\sin \alpha \cos \alpha \cdot (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = 1$ ;    б)  $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha}$ ;

в)  $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - \sin 2\alpha} \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}^3 \alpha$ ;    г)  $\frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha} + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha$ .

**Д 34.** Спростіть вираз:

а)  $\sin 3\alpha + \sin 6\alpha + \sin 9\alpha$ ;    б)  $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ ;

в)  $\frac{\cos 5\alpha + \cos 6\alpha + \cos 7\alpha}{\sin 5\alpha + \sin 6\alpha + \sin 7\alpha}$ .

**Д 35.** Доведіть тотожність:

а)  $\cos 3\alpha \cdot \cos 9\alpha - \cos 12\alpha = \sin 3\alpha \cdot \sin 9\alpha$ ;

б)  $\frac{\sin \alpha + \sin 9\alpha}{\cos \alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$ ;

в)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha$ ;

г)  $-2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\alpha\right) \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4\alpha$ ;

д)  $\frac{-2 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)}{\sin 2\alpha} = 1$ ;

е)  $\sin(3\pi + \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{1}{4} \sin 3\alpha$ .

**Д 36.** Спростіть вираз, використовуючи формули пониження степеня:

а)  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;    б)  $2 \cos^2(4\alpha - 5\pi) - \cos 8\alpha$ ;

в)  $\sin 20^\circ + 2 \sin^2 35^\circ$ ;    г)  $(\cos^2 10^\circ - \cos^2 80^\circ)^2 + \cos^2 70^\circ$ .

**Д 37.** Спростіть вираз:

а)  $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \cdot \frac{1 - \cos \beta}{\sin \beta}$ ;    б)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha$ ;    в)  $\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2} - \frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}$ ;

г)  $\frac{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin(\pi + x)}$ ;    д)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

**Д 38.** Спростіть вираз:

а)  $\operatorname{ctg} 3\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha (3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;    б)  $\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha}$ .

**Д 39.** Доведіть тотожність:

- а)  $\sin 3\alpha = \sin \alpha (4\cos^2 \alpha - 1)$ ;
- б)  $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}$ ;
- в)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) = \operatorname{tg} 3\alpha$ ;
- г)  $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha - 1} \cdot \frac{1 - \operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg} 3\alpha} = 1$ ;
- д)  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha = 2\operatorname{ctg} 2\alpha$ ;
- е)  $\cos 3\alpha + \sin 3\alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(1 + 2\sin 2\alpha)$ .

**В 40.** Подайте у вигляді добутку:

- а)  $1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha$ ;
- б)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$ ;
- в)  $\frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ ;
- г)  $\cos \alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$ .

**Д 41.** Спростіть:

- а)  $\operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ ;
- б)  $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$ ;
- в)  $2\sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha - 1$ ;
- г)  $\frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}$ ;
- д)  $2 + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha$ .

**Д 42.** Доведіть тотожність:

- а)  $\sin 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha - \cos 4\alpha = 1$ ;
- б)  $\frac{1 + \cos 4\alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{-\sin 4\alpha}{2}$ ;
- в)  $\frac{\cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - 2\alpha \right)$ ;
- г)  $\frac{\sin 4\alpha}{1 + \cos 4\alpha} \cdot \frac{\cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ;
- д)  $\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$ .

**В 43.** Спростіть вираз:

- а)  $\frac{4\sin^2(7\pi + \alpha) - \sin^2(3\pi + 2\alpha)}{\cos^2\left(\frac{5\pi}{2} - 2\alpha\right) + 4\sin^2 \alpha - 4}$ ;
- б)  $\frac{\cos^2 \alpha - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ ;
- в)  $\frac{\sin 4\alpha + \sin 5\alpha + \sin 6\alpha}{\cos 4\alpha + \cos 5\alpha + \cos 6\alpha}$ ;
- г)  $\frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - 1}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}$ .

**В 44.** Спростіть вираз:

- а)  $\sqrt{\frac{2\sin \alpha - \sin 2\alpha}{2\sin \alpha + \sin 2\alpha}}$ , якщо  $\pi < \alpha < 2\pi$ ;
- б)  $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$ , якщо  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

- Д 45. Обчисліть:
- а)  $\sin 15^\circ$ ; б)  $\cos 105^\circ$ ; в)  $\operatorname{tg} 105^\circ$ ;  
 г)  $\sin 52^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$ ; д)  $\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ$ .

..... *Варіант 2* .....

► Тригонометричні функції числового аргументу

- С 1. Виразіть у радіанах кути:  
 а)  $60^\circ$ ; б)  $90^\circ$ ; в)  $135^\circ$ ; г)  $240^\circ$ ; д)  $260^\circ$ ; е)  $315^\circ$ .
- С 2. Виразіть у радіанах кути:  
 а)  $50^\circ$ ; б)  $450^\circ$ ; в)  $600^\circ$ ; г)  $1500^\circ$ ; д)  $2000^\circ$ ; е)  $8000^\circ$ .
- С 3. Виразіть у градусах кути:  
 а)  $\frac{\pi}{24}$ ; б)  $\frac{\pi}{10}$ ; в)  $\frac{\pi}{6}$ ; г)  $\frac{\pi}{2}$ ; д)  $\frac{3\pi}{4}$ ; е)  $\frac{5\pi}{18}$ ;  
 е)  $10\pi$ ; ж)  $\frac{22\pi}{9}$ ; з)  $\frac{9\pi}{2}$ .
- С 4. Визначте знак виразу:  
 а)  $\sin \frac{7\pi}{5}$ ; б)  $\cos \frac{2\pi}{7}$ ; в)  $\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$ ; г)  $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{7}$ ;  
 д)  $\operatorname{tg} \frac{8\pi}{5}$ ; е)  $\cos \frac{3\pi}{5} \cdot \sin \frac{4\pi}{5} \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ ; е)  $\frac{\sin \frac{10\pi}{7}}{\cos \frac{11\pi}{7}}$ .
- С 5. Визначте знак виразу:  
 а)  $\cos 320^\circ$ ; б)  $\sin 230^\circ$ ; в)  $\operatorname{tg} 150^\circ$ ; г)  $\operatorname{ctg} 140^\circ$ ;  
 д)  $\sin 140^\circ \cdot \operatorname{tg} 400^\circ \cdot \cos 89^\circ \cdot \operatorname{ctg} 100^\circ$ ;  
 е)  $\frac{\operatorname{tg} 70^\circ \cdot \operatorname{ctg} 10^\circ}{\cos 170^\circ \cdot \sin 250^\circ}$ ;  
 е)  $\operatorname{ctg}(-50^\circ) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \cdot \cos(-40^\circ) \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)$ .
- Д 6. Знайдіть значення виразу:  
 а)  $\cos 60^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 45^\circ$ ;  
 б)  $4 \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 3 \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4}$ ;  
 в)  $-\sqrt{2} \cos 0^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 300^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} - \sin 180^\circ \cdot \sin 30^\circ$ ;  
 г)  $\sin 120^\circ \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ ;  
 д)  $\left( \sin \frac{5\pi}{4} + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \cdot \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} - \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ;  
 е)  $\sin \frac{4\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{7\pi}{6} + \operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$ .

**Д 7.** а) У кінці хорди, довжина якої дорівнює радіусу, проведено дотичну до кола. Знайдіть радіанну міру кута між хордою і дотичною.

**С** б) Знайдіть градусну міру кута, суміжного з кутом  $\frac{9\pi}{20}$ .

**С** в) Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює  $\frac{2\pi}{5}$ . Знайдіть градусну міру кутів при основі цього трикутника.

**С** г) Дуга закруглення залізничної колії містить  $25^\circ$  і має довжину 500 м. Знайдіть радіус закруглення.

**Д 8.** Обчисліть:

а)  $-2\sin 750^\circ + 4\cos 780^\circ - \sin(-630^\circ) + 4\cos 450^\circ$ ;

б)  $\sqrt{2} \cos \frac{41\pi}{4} - 4\sin \frac{125\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{67\pi}{6} + \operatorname{ctg} \frac{97\pi}{4}$ ;

в)  $8\sin^2\left(-\frac{23\pi}{3}\right) + 3\operatorname{ctg}^2 \frac{29\pi}{3} - 4\cos^2\left(-\frac{41\pi}{6}\right)$ .

**Д 9.** Визначте знак виразу:

а)  $\sin 4$ ;

б)  $\cos 2$ ;

в)  $\operatorname{tg} 8$ ;

г)  $\operatorname{ctg} 5$ ;

д)  $\sin 235^\circ - \sin 234^\circ$ ;

е)  $\cos 99^\circ - \cos 105^\circ$ ;

е)  $\operatorname{tg} 300^\circ - \operatorname{tg} 305^\circ$ .

**Д 10.** Знайдіть значення тригонометричних функцій кута  $\alpha$ , якщо:

а)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $0 < \alpha < 90^\circ$ ;

б)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

в)  $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ;

г)  $\cos \alpha = -\frac{3}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;

д)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;

е)  $\sin \alpha = -0,6$ ,  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ .

**С 11.** Знайдіть найменший додатний період функції:

а)  $y = \sin 3x$ ;

б)  $y = 3\cos \frac{x}{5}$ ;

в)  $y = \operatorname{tg} 4x$ ;

г)  $y = -2\cos \frac{2x}{3}$ ;

д)  $y = \cos 4x - \sin 3x$ ;

е)  $y = \cos^5 x$ ;

е)  $y = \operatorname{ctg} 6x \cdot \sin \frac{5x}{4}$ .

**Д 12.** Визначте:

а)  $\sin 3015^\circ$ ;

б)  $\cos 1890^\circ$ ;

в)  $\cos \frac{37\pi}{3}$ ;

г)  $\operatorname{tg} \frac{167\pi}{4}$ ;

д)  $\operatorname{ctg}(-1350^\circ)$ ;

е)  $\operatorname{ctg}\left(-\frac{377\pi}{6}\right)$ .

► Властивості і графіки тригонометричних функцій

У завданнях 13–15 використовуйте графіки функцій  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$  і  $y = \operatorname{ctg} x$ .

Д 13. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ;    б)  $y = \operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ;    в)  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

Д 14. Побудуйте графік функції:

а)  $y = -\sin x$ ;    б)  $y = 2\cos x$ ;    в)  $y = -\operatorname{tg} x$ .

Д 15. Побудуйте графік функції:

а)  $y = \cos x - 1$ ;    б)  $y = 1 - \sin x$ ;  
в)  $y = \operatorname{ctg} x - 1$ ;    г)  $y = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{tg} x$ .

Д 16. Укажіть період і побудуйте графік функції:

а)  $y = \sin 2x$ ;    б)  $y = -\sin \frac{x}{2}$ ;    в)  $y = -\cos 3x$ ;    г)  $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

В 17. Перетворіть формулу заданої функції, наприклад подайте функцію  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  у вигляді  $y = A \sin \omega\left(x + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ , і побудуйте її графік:

а)  $y = -\sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$ ;    б)  $y = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$ ;  
в)  $y = 3\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;    г)  $y = -\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

В 18. Побудуйте графік функції:

а)  $y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1$ ;    б)  $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ ;  
в)  $y = |\sin x| + \sin x$ ;    г)  $y = |\operatorname{ctg} x| + 1$ .

В 19. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівняння:

а)  $|y| = 1 - \sin x$ ;    б)  $|y| = -\cos x$ ;    в)  $|y| = |\operatorname{tg} x| - 1$ .

► Спрощення тригонометричних виразів

С 20. Спростіть вираз:

а)  $1 - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ ;    б)  $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1$ ;    в)  $\operatorname{ctg} \alpha \cdot \sin \alpha$ ;  
г)  $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha}$ ;    д)  $\cos^2 \alpha + 1 + \sin^2 \alpha$ ;    е)  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha$ .

- С 21.** Спростіть вираз:
- а)  $(\cos \alpha - 1)^2 + 2 \cos \alpha$ ;      б)  $\cos^2 \alpha + (1 + \sin \alpha)(\sin \alpha - 1)$ ;
- в)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 2 \sin \alpha \cos \alpha$ ;      г)  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}}{\frac{1}{\sin \alpha}}$ ;
- д)  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2$ .

- С 22.** Спростіть вираз:
- а)  $\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha$ ;      б)  $\sin^4 \beta + \cos^4 \beta + 2 \sin^2 \beta \cos^2 \beta$ ;
- в)  $(1 + \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} \alpha - 1) - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ;      г)  $\sin^2 \alpha - 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$ ;
- д)  $\frac{\sin \beta \cos \alpha}{\cos \beta \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + 1$ .

- С 23.** Спростіть вираз:
- а)  $\frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;
- б)  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 + (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2$ ;
- в)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha)}$ .

- С 24.** Доведіть тотожність:
- а)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}$ ;
- б)  $\cos \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha) = \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$ ;
- в)  $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = 2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ ;
- г)  $(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$ ;
- д)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \alpha}$ .

- Д 25.** Знайдіть значення виразу:
- а)  $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$ , якщо  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{6}{5}$ ;
- б)  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ , якщо  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ ;
- в)  $\frac{\sin \alpha + 2 \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5}$ .

- С 26.** Обчисліть:
- а)  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 3$ ;
- б)  $\operatorname{tg}^3 \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha$ , якщо  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = 1$ .

**Д 27.** Спростіть вираз, використовуючи формули зведення:

а)  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}^2(\pi - \alpha)$ ;

б)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\cos(\pi - \alpha) + \cos^2 \alpha$ ;

в)  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ ;

г)  $\frac{\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)\cos \alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$ ;

д)  $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ .

**Д 28.** Спростіть вираз, використовуючи формули зведення:

а)  $\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{ctg}^2\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ ;

б)  $\sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha) - \operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) + \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$ .

**С 29.** Обчисліть:

а)  $\sin 78^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 78^\circ$ ;

б)  $\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \sin 66^\circ \sin 6^\circ$ ;

в)  $\sin 64^\circ \sin 34^\circ - \sin 56^\circ \cos 116^\circ$ ;

г)  $\frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 35^\circ}$ ;

д)  $\frac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{ctg} 48^\circ}{1 + \operatorname{tg} 72^\circ \operatorname{ctg} 48^\circ}$ ;

е)  $\sin 15^\circ \cos 15^\circ - (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)^2$ .

**Д 30.** Обчисліть:

а)  $\cos^2 \frac{\pi}{8} - \sin^2 \frac{\pi}{8}$ ;

б)  $2\cos^2 \frac{\pi}{12} - 1$ ;

в)  $\frac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}$ ;

г)  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 15^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 15^\circ}$ ;

д)  $(\sin^2 20^\circ - \sin^2 70^\circ)^2 + \cos^2 50^\circ$ .



Д

**31.** Спростіть:

а)  $\sin 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cos 4\alpha$ ;      б)  $\cos 6\alpha \cos 3\alpha + \sin 6\alpha \sin 3\alpha$ ;

в)  $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$ ;      г)  $\frac{1 - 2\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ ;

д)  $\frac{1 - \sin 2\alpha}{(\cos \alpha - \sin \alpha)^2}$ .

Д

**32.** Обчисліть:

а)  $\sin 75^\circ \cdot \cos 75^\circ$ ;      б)  $\operatorname{ctg} 7^\circ \cdot \operatorname{ctg} 83^\circ$ ;

в)  $\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 89^\circ$ ;      г)  $\cos \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{2\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{9}$ ;

д)  $8 \cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ$ .

Д

**33.** Доведіть тотожність:

а)  $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ ;      б)  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ;

в)  $\frac{2 \sin x - \sin 2x}{2 \sin x + \sin 2x} = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}$ ;      г)  $\frac{1 - 2 \sin^2 2\alpha}{1 - \sin 4\alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg} 2\alpha}$ .

Д

**34.** Спростіть вираз:

а)  $\cos x - \cos 5x - 2 \sin 3x$ ;

б)  $\cos 2\alpha - \cos 3\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha$ ;

в)  $\frac{\sin 7\alpha - \sin 8\alpha + \sin 9\alpha}{\cos 7\alpha - \cos 8\alpha + \cos 9\alpha}$ .

Д

**35.** Доведіть тотожність:

а)  $\cos 5\alpha \cdot \cos 4\alpha - \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha = \cos 6\alpha \cdot \cos 3\alpha$ ;

б)  $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} + \sin \alpha \cos \alpha - 1 = 0$ ;

в)  $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ;

г)  $\sin \alpha + \sin \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) = -\sin \left( \alpha + \frac{4\pi}{3} \right)$ ;

д)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \cdot \operatorname{tg} \left( \frac{3\pi}{4} + \alpha \right) = -\cos 2\alpha$ ;

е)  $4 \sin \alpha \cdot \sin(60^\circ - \alpha) \cdot \sin(60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha$ .

Д

**36.** Спростіть вираз, використовуючи формули пониження степеня:

а)  $\sin^2 \alpha + \frac{\cos 2\alpha}{2}$ ;      б)  $2 \sin^2(6\alpha + 7\pi) + \cos 12\alpha$ ;

в)  $1 - 8 \sin^2 \beta \cos^2 \beta$ ;      г)  $\frac{1 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ .

**Д 37.** Спростіть вираз:

а)  $\frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{4} - \cos \frac{\alpha}{4}}$ ;      б)  $\left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{3} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{2\alpha}{3}$ ;

в)  $\sin^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin \alpha$ ; г) знайдіть  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , якщо  $\sin \alpha = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$ ;

д)  $\sqrt{\left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) \left( \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)}$ , якщо  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**Д 38.** Спростіть вираз:

а)  $\frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha} \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$ ;      б)  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} + 4 \sin^2 \alpha$ .

**Д 39.** Доведіть тотожність:

а)  $\frac{\sin \alpha + \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \alpha + \cos \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ ;      б)  $\sin 6\alpha \operatorname{ctg} 3\alpha - \cos 6\alpha = 1$ ;

в)  $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;      г)  $\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2$ ;

д)  $\frac{\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) - 1}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)} = \sin 2\alpha$ ;      е)  $\frac{\cos 3\alpha - \sin 3\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 7 - 2 \sin 2\alpha$ .

**В 40.** Подайте у вигляді добутку:

а)  $\sin(2x - 30^\circ) - \sin(2x - 60^\circ)$ ;      б)  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right)$ ;

в)  $\sin 40^\circ - 2 \cos 10^\circ + \sin 20^\circ$ ;      г)  $1 + \cos x + \sin x + \operatorname{tg} x$ .

**Д 41.** Спростіть:

а)  $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$ ;      б)  $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ ;

в)  $2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$ ;      г)  $\frac{\left( \cos \frac{3}{4} \alpha - \sin \frac{3}{4} \alpha \right)^2}{1 - \sin \frac{3\alpha}{2}}$ ;

д)  $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cos(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(30^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \sin \alpha}$ .

**Д 42.** Доведіть тотожність:

- а)  $\frac{\sin(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ + \alpha)} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$ ;
- б)  $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ ;
- в)  $\sin 200^\circ \cdot \sin 310^\circ + \cos 340^\circ \cdot \cos 50^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
- г)  $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$ ;
- д)  $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$ .

**В 43.** Спростіть вираз:

- а)  $\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha$ ;
- б)  $\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha$ ;
- в)  $\sin(\pi + \alpha) \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \alpha\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right)$ ;
- г)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$ .

**В 44.** Спростіть вираз:

- а)  $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha}}$  при  $0 < \alpha < \pi$ ;
- б)  $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{4 \sin^4 \alpha + \sin^2 2\alpha}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**Д 45.** Обчисліть:

- а)  $\cos 75^\circ$ ;
- б)  $\operatorname{ctg} 15^\circ$ ;
- в)  $\sin 105^\circ$ ;
- г)  $\sin 37^\circ 30' \cdot \sin 7^\circ 30'$ ;
- д)  $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ$ .

**Тест 6. Тригонометричні функції**

*Варіант 1*

**П 1.** Укажіть неправильну формулу.

А	Б	В
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{7\pi}{12} = 102^\circ$
Г	Д	
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	

II 2. Визначте правильну нерівність.

А	Б	В
$\sin 100^\circ < 0$	$\sin 180^\circ < \sin 200^\circ$	$\cos 89^\circ < \cos 31^\circ$
Г	Д	
$\cos 123^\circ < \cos 170^\circ$	$\operatorname{tg}(-13^\circ) < \operatorname{tg}(-45^\circ)$	

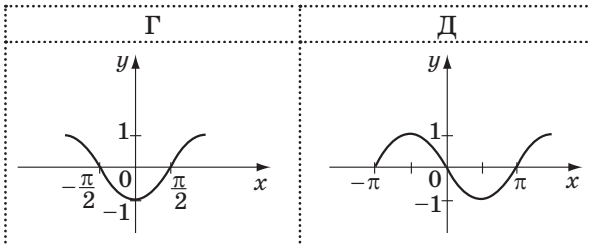
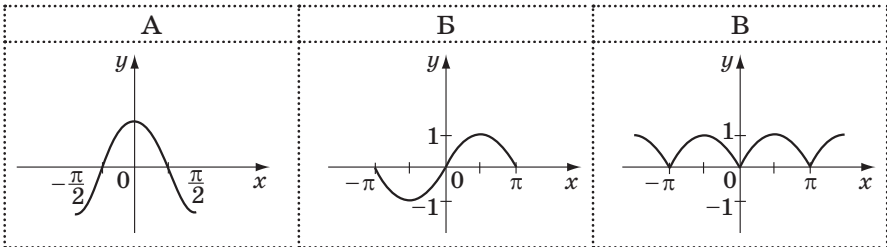
II 3. Виразіть  $\operatorname{ctg} \alpha$  через  $\sin \alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
$\pm \frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{1-\sin \alpha}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{1-\sin^2 \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - 1}}{\sin \alpha}$

II 4. Яка з наведених функцій є парною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^4 \sin x$	$y = \sin \frac{1}{x-1}$	$y = x - 2 \operatorname{tg} x$	$y = \frac{\cos 2x}{2x^2}$	$y = \sqrt{\operatorname{ctg} x - 1}$

II 5. Серед наведених рисунків укажіть той, на якому зображено графік функції  $y = -\sin x$ .



Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

С 6. Установіть відповідність між виразами (1–4) і виразами, отриманими в результаті їх спрощення (А–Д).

- |   |  |                               |
|---|--|-------------------------------|
| 1 | $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ | А $-\sin\alpha$               |
|   |  | Б $\sin\alpha$                |
|   |  | В $-\operatorname{ctg}\alpha$ |
| 2 | $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$             | Г $\operatorname{tg}x$        |
|   |  | Д $\cos x$                    |

3  $\sqrt{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha + 1}}$ ,  $\pi < \alpha < 2\pi$

4  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$

С 7. Обчисліть:  $3\cos\frac{3\pi}{2} - 2\sin\frac{7\pi}{6} + \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$ .

Д 8. Укажіть найменший додатний період функції  $y = -3\cos\frac{2\pi}{5}$ .

Д 9. Знайдіть  $\cos\alpha$ , якщо  $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ , а  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

В 10. а) Побудуйте графік функції  $y = -2\cos x + 1$ , за допомогою цього графіка вкажіть:  
 б) нулі функції;  
 в) проміжки зростання, спадання функції;  
 г) значення аргументу, при яких функція додатна.

..... *Варіант 2* .....

П 1. Укажіть неправильну формулу.

А	Б	В
$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$	$\cos 2\pi = 1$
Г		Д
$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$		$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

**II** 2. Визначте правильну нерівність.

А	Б	В
$\operatorname{ctg} 20^\circ > \operatorname{ctg} 70^\circ$	$\sin 90^\circ < \sin 91^\circ$	$\cos \pi > \cos \frac{\pi}{2}$
Г		Д
$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) > \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$		$\cos(-300^\circ) > \cos 80^\circ$

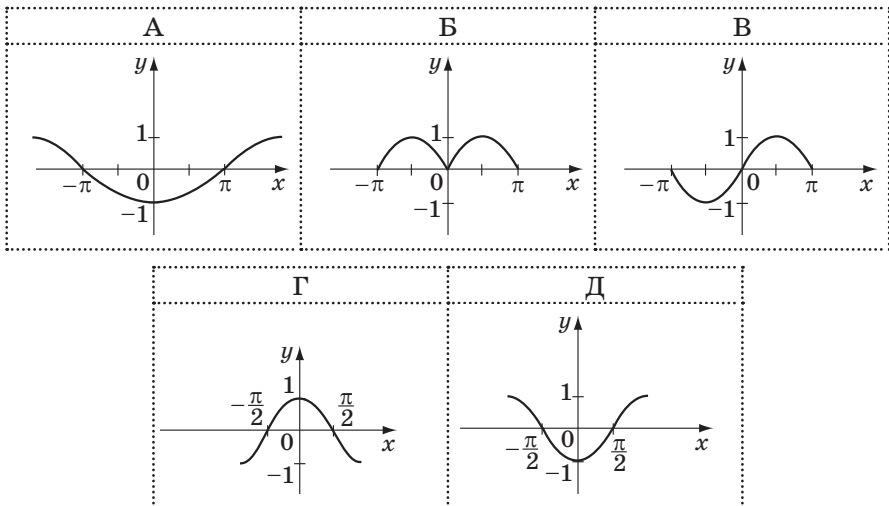
**II** 3. Виразить  $\operatorname{tg} \alpha$  через  $\cos \alpha$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\frac{2}{\cos^2 \alpha - 1}$	$\frac{\sqrt{\cos^2 \alpha - 1}}{ \cos \alpha }$

**II** 4. Яка з наведених функцій є непарною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x^5 \sin x$	$y = \cos(x+1)$	$y = x^3 + 2 \operatorname{ctg} x$	$y = \frac{x^4}{\cos 4x}$	$y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x-1}$

**II** 5. Серед наведених рисунків укажіть той, на якому зображено графік функції  $y = -\cos x$ .



Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

**С** 6. Установіть відповідність між виразами (1–4) і виразами, отриманими в результаті їх спрощення (А–Д).

- |  |  |
|--|--|
| 1 $\operatorname{tg} 2\alpha$                | А $\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha}$ |
| 2 $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$ | Б $\cos 2\alpha$   |
| 3 $2\cos^2 \alpha - 1$                       | В $\frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}$ |
| 4 $2\sin \alpha \cos \alpha$                 | Г $\cos^2 \alpha$  |
|  | Д $-\cos^2 \alpha$   |

**С** 7. Обчисліть:  $-5\sin 4\pi + 3\cos \frac{4\pi}{3} - \frac{1}{2}\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$ .

**Д** 8. Укажіть найменший додатний період функції  $y = 6\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}$ .

**Д** 9. Знайдіть  $\sin \alpha$ , якщо  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

**В** 10. а) Побудуйте графік функції  $y = -2\sin x - 1$ . За допомогою побудованого графіка вкажіть:  
 б) нулі функції;  
 в) проміжки зростання, спадання функції;  
 г) значення аргументу, при яких функція від'ємна.

**✓ Тест 7. Тригонометричні функції** .....

..... *Варіант 1* .....

**П** 1. Обчисліть:  $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

**П** 2. Виразіть у градусах  $\frac{11\pi}{4}$ .

А	Б	В	Г	Д
$225^\circ$	$135^\circ$	$247,5^\circ$	$990^\circ$	$495^\circ$

**П 3.** Якій чверті належить кут 4 радіан?

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	Неможливо визначити

**П 4.** Обчисліть:  $\cos 40^\circ \cos 5^\circ - \sin 40^\circ \sin 5^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\cos 35^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

**П 5.** Обчисліть:  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1–4), виберіть твердження, позначене буквою (А–Д).

**С 6.** Установіть відповідність між виразами (1–4) і виразами, отриманими в результаті їх спрощення (А–Д).

- |  |   |
|--|---|
| 1 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ | А $\cos \alpha$   |
| 2 $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$    | Б $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$                                |
| 3 $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$                  | В $\sin^2 \alpha$   |
| 4 $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$                           | Г $\cos^2 \alpha$   |
|  | Д $\frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$ |

**С 7.** Спростіть:  $\operatorname{tg}(x + 75^\circ) - \operatorname{tg}(x + 15^\circ)$ .

**Д 8.** Перетворіть суму на добуток:  $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$ .

**Д 9.** Перетворіть добуток на суму:  $2 \sin 21^\circ \cos 69^\circ$ .

**В 10.** Спростіть:  $\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$ .



Варіант 2

II 1. Обчисліть:  $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

II 2. Виразіть у градусах  $\frac{13\pi}{6}$ .

А	Б	В	Г	Д
$780^\circ$	$390^\circ$	$400^\circ$	$195^\circ$	$30^\circ$

II 3. Якій чверті належить кут  $3,5$  радіан?

А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	Неможливо визначити

II 4. Обчисліть:  $\cos 70^\circ \cos 10^\circ + \sin 70^\circ \sin 10^\circ$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

II 5. Обчисліть:  $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-1

Завдання 6 передбачає встановлення відповідності. До кожного твердження, позначеного цифрою (1-4), виберіть твердження, позначене буквою (А-Д).

C 6. Установіть відповідність між виразами (1-4) і виразами, отриманими в результаті їх спрощення (А-Д).

1 $(1 - \cos 2\alpha) \cdot \frac{1}{2}$	А $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$
2 $\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$	Б $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}$
3 $\sin^2 \frac{\alpha}{4} + \cos^2 \frac{\alpha}{4}$	В $\sin^2 \alpha$
4 $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$	Г 1
	Д $\cos \frac{\alpha}{2}$





## ТЕМА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ. ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

### Стислі теоретичні відомості .....

- Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

$$\cos x = a; \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \text{для } -1 \leq a \leq 1$$

$$\sin x = a; \quad x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad \text{для } -1 \leq a \leq 1$$

$$\operatorname{tg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \text{для будь-яких } a$$

$$\operatorname{ctg} x = a; \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi l, \quad l \in \mathbf{Z}; \quad \text{для будь-яких } a$$

Рівняння виду  $a \sin x + b \cos x = 0$

$$\text{або } a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0,$$

де  $a, b, c$  — числа, є *однорідними*.

- Розв'язування тригонометричних рівнянь методом введення допоміжного аргументу:

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi),$$

$$a \sin x - b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x - \varphi), \quad \text{де } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

- Використання рівності однойменних тригонометричних функцій при розв'язуванні тригонометричних рівнянь:

$$\text{якщо } \cos \alpha = \cos \beta, \quad \text{то } \alpha = \pm \beta + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{якщо } \sin \alpha = \sin \beta, \quad \text{то } \alpha = (-1)^k \beta + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

- Універсальна підстановка для розв'язування тригонометричних рівнянь:

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

- Формули пониження степеня:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

### Тренувальні вправи .....

#### Варіант 1

- Обернені тригонометричні функції

1. Укажіть область визначення функції:

а)  $y = \arcsin(x-1)$ ;

б)  $y = 2 \arccos \frac{x}{2}$ ;

в)  $y = \operatorname{arctg} 2x$ ;

г)  $y = \operatorname{arctg}(-x)$ .

С 2. Укажіть значення змінної  $x$ , при яких тотожність є правильною:

- а)  $\sin(\arcsin x) = x$ ;                      б)  $\arcsin(\sin x) = x$ ;  
в)  $\cos(\arccos x) = x$ ;                      г)  $\arccos(\cos x) = x$ .

С 3. Укажіть множину значень функції:

- а)  $y = \arctg x$ ;                              б)  $y = \operatorname{arccotg} x$ ;  
в)  $y = \frac{1}{2} \arcsin x$ ;                          г)  $y = 2 \arccos x$ .

С 4. Закінчіть запис так, щоб отримана рівність була правильною:

- а)  $\arcsin(-\alpha) = \dots$ ;                      б)  $\arccos(-\alpha) = \dots$ ;  
в)  $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \dots$ ;              г)  $\arctg \alpha + \operatorname{arccotg} \alpha = \dots$ ;  
д)  $\sin(\arccos x) = \dots$ ;                      е)  $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \dots$ .

С 5. Обчисліть:

- а)  $\arccos \frac{1}{2} + \arcsin(-1)$ ;  
б)  $\arctg 0 - \operatorname{arccotg} 1$ ;  
в)  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;  
г)  $\arctg^2(-\sqrt{3}) - \operatorname{arccotg}^2 \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  
д)  $\arcsin 1 - \arccos 0 - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  
е)  $\arctg \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arccotg} 1 + \arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot \operatorname{arccotg}(-1)$ .

С 6. Обчисліть:

- а)  $2 \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arctg(-1) + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \arccos(-1)$ ;  
б)  $\operatorname{tg}\left(4 \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})\right)$ ;  
в)  $\sin\left(3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} - \arccos \frac{1}{2}\right)$ ;  
г)  $\cos\left(\frac{2}{3}\left(\arccos(-1) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right)$ .

С 7. Обчисліть:

- а)  $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ ;      б)  $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$ ;  
 в)  $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{8}{17}\right)$ ;      г)  $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$ ;  
 д)  $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}5)$ ;      е)  $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{13}\right)$ .

Д 8. Побудуйте графік:

- а)  $y = \arcsin(x-1)$ ;      б)  $y = \arccos x - \pi$ ;  
 в)  $y = |\operatorname{arctg} x|$ ;      г)  $|y| = 2\arcsin x$ .

Д 9. Обчисліть:

- а)  $\sin\left(\arcsin\frac{3}{7}\right)$ ;      б)  $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$ ;  
 в)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-5))$ ;      г)  $\arcsin\left(3\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ .

► Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

С 10. Укажіть рівняння, коренем якого є число  $\frac{\pi}{4}$ :

- а)  $\cos x = -1$ ;      б)  $\sin 2x = 1$ ;      в)  $\operatorname{tg} x = 1$ ;      г)  $\operatorname{ctg} x = -1$ .

С 11. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      б)  $\cos y = \frac{1}{2}$ ;      в)  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 г)  $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      д)  $\cos x = 0$ ;      е)  $\sin z = -1$ .

С 12. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\operatorname{tg} x = 0$ ;      б)  $\operatorname{tg} y = -1$ ;      в)  $\operatorname{tg} z = \sqrt{3}$ ;  
 г)  $\operatorname{ctg} x = 1$ ;      д)  $\operatorname{ctg} y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;      е)  $-\sqrt{3} \operatorname{tg} x = 3$ .

С 13. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ ;      б)  $\operatorname{tg} 2x = -1$ ;      в)  $\cos\frac{1}{3}x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 г)  $\operatorname{ctg}(\pi + 3x) = -\sqrt{3}$ ;      д)  $\sin 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      е)  $\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .

**С** 14. Знайдіть всі розв'язки заданого рівняння, які задовольняють зазначені умови:

а)  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ;      б)  $\sin \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ;

в)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ ,  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ ;      г)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ;

д)  $\operatorname{ctg}(-x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $0 < x < 2\pi$ ;      е)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) = 1$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь способом зведення до квадратного рівняння

**С** 15. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\cos x - \cos^2 x + 2 = 0$ ;

б)  $\sin^2 x - 2\sin x = -1$ ;

в)  $\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 5 = 0$ ;

г)  $4\sin^2 x - 3\sin x = 1$ ;

д)  $\sin^2 y = \sqrt{3}$ ;

е)  $\cos^2 t + \cos t = -2$ .

**С** 16. Розв'яжіть рівняння:

а)  $-\cos^2 x - 2\sin x + 2 = 0$ ;

б)  $3\cos^2 x + 4\sin x - 4 = 0$ ;

в)  $\operatorname{tg} z + 2\operatorname{ctg} z = 3$ ;

г)  $\operatorname{tg} 2y + \operatorname{ctg} 2y = 2$ ;

д)  $\cos(\pi + x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2$ ;

е)  $\operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) + \operatorname{tg}^2 t = 1$ ;

ж)  $\sin x + \cos 2x + 2 = 0$ ;

з)  $2\sqrt{3}\sin^2 \frac{x}{2} + 2 = 2\sin^2 x + \sqrt{3}$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь способом групування і розкладання на множники

**С** 17. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sin x - 2\sin^2 x = 0$ ;

б)  $\cos^2 x + 2\cos x = 0$ ;

в)  $\sin 8x - 2\cos 4x = 0$ ;

г)  $1 - \cos 2x - 4\sin x = 0$ ;

д)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ ;

е)  $2\sin 2x \sin 4x - \cos 2x = \sin 3x$ .

**Д** 18. Розв'яжіть рівняння:

а)  $2\sin x \cos x - 2\sin x + \cos x = 1$ ;

б)  $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$ ;

в)  $2\sin^3 x - \cos 2x - \sin x = 0$ ;

г)  $\sin^3 x + \cos^3 x = 5\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$ ;

д)  $2(\cos x - 1)\sin 2x = 3\sin x$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь способом зведення до однорідного рівняння

**С** 19. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin y - \cos y = 0$  ;
- б)  $3\sin x - 2\cos x = 0$  ;
- в)  $5\sin 5t - 2\cos 5t = 0$  ;
- г)  $4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 3$  ;
- д)  $3\sin^2 x + 3\sin 2x - 2 = 5\cos^2 x$  ;
- е)  $(1 + \operatorname{tg}^2 z)\sin z - \operatorname{tg}^2 z + 1 = 0$

► Розв'язування тригонометричних рівнянь методом введення допоміжного аргументу

**20.** Розв'яжіть рівняння:

**С** а)  $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$  ; б)  $\cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x - 1$  ;

**Д** в)  $\sqrt{3}\sin 2x + 2\sin^2 x - 1 = 2\cos x$  ; г)  $3\operatorname{tg} x = 4 + \frac{5}{\cos x}$  ;

- д)  $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x)$  ;
- е)  $\cos 2x - \sin 2x = 1 - \sin x - \cos x$  .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь, виходячи з рівності однойменних тригонометричних функцій

**21.** Розв'яжіть рівняння:

**С** а)  $\cos 3x = \cos x$  ; б)  $\sin 6x = \sin 2x$  ; в)  $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg} 2x$  ;  
г)  $\operatorname{ctg} 5x = \operatorname{ctg} x$  ; д)  $\cos x = \sin 3x$  ; е)  $\cos 4x = 1 - 2\sin^2 x$  ;

**Д** е)  $3\sin x - 4\sin^3 x = \sin 5x$  ; ж)  $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$  .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної підстановки

**Д** 22. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin 2x + \cos 2x = -1$  ;
- б)  $10\cos 2x + 8 = \operatorname{tg} x$  ;
- в)  $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x$  ;
- г)  $2\sin^2 z + \operatorname{tg}^2 z = 2$  ;
- д)  $\operatorname{ctg} x - 2\cos 2x = 1$  ;
- е)  $3\operatorname{ctg} x - 3\operatorname{tg} x + 4\sin 2x = 0$  .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою формул пониження степеня

**Д** 23. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$  ;
- б)  $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$  ;
- в)  $1 - \cos 4t + 2\cos^2 t = 0$  ;
- г)  $\cos^2 6x - \sin^2 3x - 1 = 0$  ;



$$д) \sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2};$$

$$е) \sin^2\left(\frac{\pi}{8} + z\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - z\right) = \sin z.$$

► Використання властивості обмеженості функцій  $y = \sin x$  і  $y = \cos x$  при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

**В** 24. Розв'яжіть рівняння:

$$а) \sin x + \sin 6x = 2;$$

$$б) \sin \frac{x}{2} + \cos 5x = -2;$$

$$в) \sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2;$$

$$г) \sin 3x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1;$$

$$д) |\sin x| = \cos 2x - 1;$$

$$е) (\sin x + \sqrt{3} \cos x) \sin 4x = 2.$$

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою формул перетворення суми (або різниці) однойменних тригонометричних функцій на добуток і формул перетворення добутку тригонометричних функцій на суму (або різницю)

**Д** 25. Розв'яжіть рівняння:

$$а) \sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x;$$

$$б) \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0;$$

$$в) \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = -2 \operatorname{tg} x;$$

$$г) \sin 3x + \sin 5x = \sin 4x;$$

$$д) \cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2};$$

$$е) \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}.$$

**В** 26. Розв'яжіть рівняння:

$$а) \sin 5x \cos 3x = \sin 6x \cos 2x;$$

$$б) \sin x + 2 \sin 10x \cos 3x = 0;$$

$$в) \cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 4x);$$

$$г) \sin 2x \sin 6x \cos 4x + \frac{1}{4} \cos 12x = 0;$$

$$д) 4 \sin 5x \cos 5x (\cos^4 x - \sin^4 x) = \sin 4x;$$

$$е) \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{8} \cos 15x.$$

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою підстановок  $t = \sin x \pm \cos x$ ,  $t = \operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x$  тощо.

**В 27.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin 2x = 2(1 + \sin x + \cos x)$ ;
- б)  $\sin 2x - 12(\sin x + \cos x) + 12 = 0$ ;
- в)  $2\sin 2x = 1 + \sin x - \cos x$ ;
- г)  $\sin x + \cos x + 4\sin x \cos x - 1 = 0$ ;
- д)  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 4 = 0$ .

► Відбір коренів при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

**Д 28.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ ;
- б)  $\frac{2\cos x - 1}{2\sin x + \sqrt{3}} = 0$ ;
- в) знайдіть кількість коренів рівняння  $\sin x = \frac{1}{2}$  на відрізку  $[-4\pi; 2\pi]$ ;
- г)  $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$ ;
- д)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x = \frac{8}{\sin 2x}$ ;
- е)  $\frac{\sin 4x}{4\sin x - \sin 3x} = \cos x$ .

► Розв'язування ірраціональних тригонометричних рівнянь

**В 29.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{\sin x} = \cos x$ ;
- б)  $\sqrt{\cos x - 1} = -\sin x$ ;
- в)  $\sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3$ ;
- г)  $(1 + 2\sin x)\sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$ ;
- д)  $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x$ ;
- е)  $\sqrt{\sin x + \cos x} = \sin x - \cos x$ .

**В 30.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має розв'язок, і вкажіть ці розв'язки:

- а)  $\sin 2x = a + 1$ ;
- б)  $\sin x + \cos x = a$ ;
- в)  $\cos 3x = a \cos x$ ;
- г)  $\cos^2 x - 2\cos x + a = 0$ ;
- д)  $\sin^2 x - (a + 1)\sin x - (a + 2) = 0$ ;
- е)  $2\sin x \cos x - (a + 2)(\sin x + \cos x) + 2a + 1 = 0$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь різних типів

**С 31.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $3\cos x = \pi$ ;                      б)  $\sin \frac{3}{x} = -1$ ;                      в)  $\cos \frac{2}{x} = 0$ ;  
 г)  $\sin(\pi(x^2 + 2x)) = 0$ ;            д)  $\sin(\sin x) = 1$ ;                      е)  $\operatorname{tg} \sqrt{x} = -1$ .

**Д 32.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 0$ ;                      б)  $\cos 2x + 3\sin x = 2$ ;  
 в)  $\cos 3x \cdot \cos 2x = 1$ ;                      г)  $\cos 5x - \cos x = \sin 3x$ ;  
 д)  $\frac{1}{2} \sin 2x - 4\cos 2x = \cos^2 x$ ;            е)  $6\cos^2 x - 5\sin x + 5 = 0$ .

**Д 33.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{8}$ ;                      б)  $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x = 0$ ;  
 в)  $11\sin x + \cos 2x - 6 = 0$ ;                      г)  $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$ ;  
 д)  $2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3$ ;                      е)  $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$ .

**Д 34.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $1 + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2}$ ;                      б)  $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x$ ;  
 в)  $\sin 4x + \sin 2x = 1 + \cos 2x$ ;                      г)  $\cos x \operatorname{tg}^2 x - \sqrt{3} \sin x = 0$ ;  
 д)  $\sin x - \sin 9x \cos x = \frac{3}{2}$ ;                      е)  $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 2\cos^3 x + 2\operatorname{tg} x$ .

**В 35.** Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1} = -\sqrt{15} \sin x$ ;  
 б)  $\sqrt{6\operatorname{tg} x + 8} = -\frac{3}{\cos x}$ ;  
 в)  $6\cos \frac{15\pi}{4} \cos \frac{x}{2} - \cos x = 3$  на відрізку  $[-2; 10,99]$ ;  
 г)  $3 + \cos 2x = 8\cos x$  на відрізку  $\left[\frac{\pi}{4}; 3\pi\right]$ ;  
 д) укажіть найбільший корінь рівняння  $\cos 2x + 3\sin x = 2$ , який належить відрізку  $[-3\pi; -\pi]$ ;  
 е)  $\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$ .

► Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

**С 36.** Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\cos x < \frac{1}{2}$ ;      б)  $\sin x > \frac{1}{2}$ ;      в)  $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
 г)  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      д)  $\cos x > 0$ ;      е)  $\sin x \leq -1$ .

**С 37.** Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\operatorname{tg} x > 1$ ;      б)  $\operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$ ;      в)  $\operatorname{ctg} x \geq -1$ ;  
 г)  $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ;      д)  $\operatorname{ctg} x < 0$ ;      е)  $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$ .

**С 38.** Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\cos 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      б)  $\sin \frac{x}{3} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;      в)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \geq 0$ ;  
 г)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$ ;      д)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) \leq -\frac{1}{2}$ ;      е)  $2\sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \sqrt{3}$ .

**Д 39.** Розв'яжіть нерівність, використовуючи формули подвійного аргументу:

- а)  $\cos^2 x - \sin^2 x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      б)  $\sin \frac{4x}{5} \cos \frac{4x}{5} \geq -\frac{1}{4}$ ;  
 в)  $\cos^4 2x - \sin^4 2x \leq 0$ ;      г)  $\frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \geq -\frac{1}{2}$ .

**Д 40.** Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\cos^2 x < \frac{1}{2}$ ;      б)  $\operatorname{tg}^2 2x \geq 1$ ;      в)  $0 < \cos x < \frac{1}{2}$ ;      г)  $0 \leq \operatorname{ctg} x \leq 1$ .

**В 41.** Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод введення допоміжного аргументу:

- а)  $\sin t + \cos t < \sqrt{2}$ ;      б)  $\sqrt{3} \sin 3x + \cos 3x < -\sqrt{2}$ ;  
 в)  $\sin 3x > \cos 3x$ ;      г)  $\sin z + \cos z > 2\sqrt{2} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$ .

**В 42.** Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод розкладання на множники і метод інтервалів для тригонометричної функції:

- а)  $2\sin^2 x + \sin x > 0$ ;      б)  $\cos^2 x + 2\cos x < 0$ ;  
 в)  $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x \geq 0$ ;      г)  $\sin^2 x - 2\sin x + 1 \leq 0$ ;  
 д)  $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 < 0$ ;      е)  $\cos 2x + 5\cos x + 3 \geq 0$ .

**В 43.** Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\sin^2 x - 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x > 0$ ;  
 б)  $\sin 2x + \cos 2x \operatorname{ctg} x > 1$ ;  
 в)  $\operatorname{ctg}^3 x + 2\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg}^2 x > 2$ ;  
 г)  $\operatorname{tg}^3 x + 3 > 3\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x$ .

- В 44.** Розв'яжіть нерівність методом інтервалів для аргументу:
- а)  $\sin x \cos 2x \geq 0$ ;                      б)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x < 0$ ;  
 в)  $\cos 2x \cos 5x < \cos 3x$ ;                г)  $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$ .
- В 45.** Розв'яжіть нерівність, що містить модуль:
- а)  $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;                              б)  $|\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}$ ;  
 в)  $|\sin x| \cdot |\cos x| > \frac{1}{4}$ ;                г)  $2|\sin^2 x - 1| < 7 \cos x$ .
- Д 46.** Розв'яжіть рівняння, що містить обернені тригонометричні функції:
- а)  $\arcsin 2x = \frac{\pi}{4}$ ;                              б)  $\arccos(x-1) = \frac{\pi}{2}$ ;  
 в)  $\arcsin(x^2 - 2x) = -\frac{\pi}{2}$ ;                г)  $\operatorname{arctg}(\sqrt{3} - x^2) = \frac{\pi}{3}$ ;  
 д)  $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$ ;            е)  $\arccos^2 x + 2\pi \arccos x - 3\pi^2 = 0$ .
- Д 47.** Розв'яжіть рівняння, що містить обернені тригонометричні функції:
- а)  $3\arcsin^2 x - 10\arcsin x + 3 = 0$ ;  
 б)  $\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;  
 в)  $\arcsin \frac{5x-1}{3} + 2\arccos \frac{5x-1}{3} = \frac{5\pi}{6}$ ;  
 г)  $\arcsin x - \arcsin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$ ;  
 д)  $\operatorname{arctg}(2 + \cos x) - \operatorname{arctg}\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ .
- В 48.** Розв'яжіть рівняння з параметром:
- а)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = a + 1$ ;                      б)  $\sin x + \cos x = a$ ;  
 в)  $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ ;                      г)  $\cos^2 2x + a \cos^2 x = 1$ ;  
 д)  $\arccos^2 x - (a+1)\arccos x - (a+2) = 0$ .
- В 49.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має розв'язки:
- а)  $\sin^2 x - 3\sin x + a = 0$ ;                б)  $3 - 4\sin^2 x = a$ .
- В 50.** Розв'яжіть нерівність з параметром:
- а)  $\sin x \leq a$ ;                                      б)  $\operatorname{tg} x > a$ .

**В 51.** Розв'яжіть нерівність, що містить обернену тригонометричну функцію:

- а)  $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{6}$ ;                      б)  $\arccos x > \frac{2\pi}{3}$ ;  
 в)  $\arcsin x + 2\arccos x > \frac{5\pi}{6}$ ;            г)  $\arcsin x \leq \arccos x$ ;  
 д)  $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{3}$ .

..... *Варіант 2* .....

► Обернені тригонометричні функції

**С 1.** Укажіть область визначення функції:

- а)  $y = \arcsin(2+x)$ ;                      б)  $y = \frac{1}{2} \arccos \frac{2x}{3}$ ;  
 в)  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} x$ ;                      г)  $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$ .

**С 2.** Укажіть множину значень функції:

- а)  $y = 3\arcsin x$ ;                      б)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x$ ;  
 в)  $y = -\arcsin 2x$ ;                      г)  $y = 4\arccos x$ .

**С 3.** Закінчіть запис так, щоб отримана рівність була правильною:

- а)  $\arcsin(-\alpha) + \arccos(-\alpha) = \dots$ ; б)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \dots$  при  $x = \dots$ ;  
 в)  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = \dots$  при  $x = \dots$ ; г)  $\cos(\arcsin x) = \dots$  при  $x = \dots$ .

**С 4.** Обчисліть:

- а)  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} \cdot \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;  
 б)  $\sqrt{3} \arcsin \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \arccos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ ;  
 в)  $\arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) - \arccos \left( -\frac{1}{2} \right)$ ;  
 г)  $\arcsin 0 + \arccos(-1) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ ;  
 д)  $\operatorname{arctg}(-1) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \arcsin \frac{1}{2}$ ;  
 е)  $\arcsin 1 \cdot \arccos 0 + 4 \operatorname{arctg} 1 \cdot \operatorname{arcctg}(-1)$ .

С 5. Обчисліть:

а)  $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ ;

б)  $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + 4\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ;

в)  $\cos\left(3\operatorname{arctg}(-1) - \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ;

г)  $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg}(-1)\right)$ .

С 6. Обчисліть:

а)  $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$ ;

б)  $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$ ;

в)  $\sin\left(\arccos\frac{5}{13} - \arcsin\frac{12}{13}\right)$ ;

г)  $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ ;

д)  $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$ ;

е)  $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}\right)$ .

Д 7. Побудуйте графік:

а)  $y = -\arccos x$ ;

б)  $y = |\arcsin x|$ ;

в)  $|y| = \operatorname{arctg} x$ ;

г)  $y = 2\arccos|x|$ .

Д 8. Обчисліть:

а)  $\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$ ;

б)  $\arcsin\left(\sin\frac{17\pi}{8}\right)$ ;

в)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}4)$ ;

г)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\arccos\frac{3}{5}\right)$ .

► Розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь

С 9. Укажіть рівняння, коренем якого є число  $\frac{\pi}{3}$ :

а)  $\cos t = -\frac{1}{2}$ ; б)  $\sin 2y = \frac{1}{2}$ ; в)  $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ; г)  $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 0$ .

С 10. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\cos x = -1$ ;

б)  $\sin t = \frac{1}{2}$ ;

в)  $\sin y = 1$ ;

г)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

д)  $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

е)  $\cos y = -\frac{1}{2}$ .

С 11. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\operatorname{tg} x = 1$ ;

б)  $\operatorname{ctg} y = -1$ ;

в)  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ ;

г)  $\operatorname{ctg} t = \sqrt{3}$ ;

д)  $3\operatorname{tg} z = \sqrt{3}$ ;

е)  $\operatorname{ctg} t = 0$ .

С 12. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$ ;    б)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = -1$ ;    в)  $\cos\frac{3x}{4} = \frac{1}{2}$ ;  
г)  $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ;    д)  $\cos\left(\frac{25\pi}{4} + x\right) = 0$ ;    е)  $\sin 0,2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

С 13. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\operatorname{tg}\frac{2x}{5} = 0$ ;    б)  $\operatorname{tg}(\pi + 4x) = 1$ ;    в)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -1$ ;  
г)  $\operatorname{tg}\left(\frac{31\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{3}$ ;    д)  $\operatorname{ctg}\frac{5x}{4} = -\sqrt{3}$ ;    е)  $\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

С 14. Знайдіть всі розв'язки заданого рівняння, які задовольняють зазначені умови:

а)  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ ,  $x \in [0; \pi]$ ;    б)  $\sin\frac{2x}{3} = -1$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ;  
в)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ;    г)  $\cos(5\pi - x) = \frac{1}{2}$ ,  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;  
д)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ,  $x \in (0; 2\pi)$ ;    е)  $\sin(3x - \pi) = 0$ ,  $x \in [0; \pi]$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь способом зведення до квадратного рівняння

С 15. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\operatorname{tg}^2 t + 1 = -2\operatorname{tg} t$ ;    б)  $\sin^2 x - \sin x = -2$ ;  
в)  $2\cos^2 z - \cos z - 1 = 0$ ;    г)  $6\operatorname{ctg}^2 x - 5\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ ;  
д)  $\cos^2 y = \sqrt{2}$ ;    е)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$ .

С 16. Розв'яжіть рівняння:

а)  $4 - \cos^2 x = 4\sin x$ ;    б)  $3\cos 2x = 2\sin^2 2x$ ;  
в)  $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin^2 x$ ;    г)  $5 - 2\cos x = 5\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}$ ;  
д)  $\frac{1}{1 - \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$ ;    е)  $\cos^4 x = \cos 2x$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь способом групування і розкладання на множники

С 17. Розв'яжіть рівняння:

а)  $2\sin x + \sin^2 x = 0$ ;    б)  $\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x = 0$ ;  
в)  $2\sin 5x - \sin 10x = 0$ ;    г)  $1 + \cos 2x + 4\cos x = 0$ .



**Д** 18. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin x + 1 - \sin 2x = 2 \cos x$ ;      б)  $4(\sin x - \cos x) - \sin 2x + 1 = 0$ ;  
 в)  $\operatorname{tg}^3 x - \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$ ;    г)  $\cos^3 x - \sin^3 x = 2(1 + \sin x \cos x)$ ;  
 д)  $\sin 2x(\cos x - 2) = 6 \sin x$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь способом зведення до однорідного рівняння

**С** 19. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $\sin 2t = \cos 2t$ ;    б)  $\sin 4t - \sqrt{3} \cos 4t = 0$ ;  
 в)  $\sin^2 z - 2 \sin 2z + 4 \cos^2 z = 0$ ;  
 г)  $\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$ ;  
 д)  $\cos^2 x + 3 \sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1$ ;  
 е)  $3 \cos^2 x + \sin 2x + 5 \sin^2 x = 2$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь методом введення допоміжного аргументу

**20.** Розв'яжіть рівняння:

- С** а)  $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -2$ ;      б)  $\cos 5y = \sin 5y + 1$ ;  
**Д** в)  $\sqrt{3} \sin 2x - 2 \sin^2 x + 1 = \sqrt{2}$ ;      г)  $3 \sin t = 4 \cos t + 5$ ;  
 д)  $\sin 4x + \cos 2x = \sqrt{3}(\sin 2x + \cos 4x)$ ;    е)  $4 \cos x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 1$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь, виходячи з рівності однойменних тригонометричних функцій

**21.** Розв'яжіть рівняння:

- С** а)  $\sin 3x = \sin 5x$ ;      б)  $\cos 4x = \cos 2x$ ;  
 в)  $-\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$ ;      г)  $\operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} x$ ;  
 д)  $\sin x = \cos 4x$ ;      е)  $\cos^2 2x - \sin^2 2x = 2 \cos^2 x - 1$ ;  
**Д** є)  $2 \cos^2 x + \cos 5x = 1$ ;      ж)  $\sin 5x + \cos 5x = \sqrt{2} \cos 13x$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою універсальної підстановки

**Д** 22. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $1 - \cos 6x = \operatorname{tg} 3x$ ;      б)  $\operatorname{ctg} x - 2 \cos 2x = 1$ ;  
 в)  $\sin 2x(\operatorname{tg}^2 x + 3) = 4(\cos 2x - 1)$ ;    г)  $\operatorname{tg}^2 x + \cos 4x = 0$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою формул пониження степеня

**Д** 23. Розв'яжіть рівняння:

- а)  $2 \cos^2 x + \cos 4x = 1$ ;    б)  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$ ;  
 в)  $\cos^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right) = \frac{1}{2}$ ;    г)  $\cos^4 x + \sin^4 x = \cos 4x$ ;  
 д)  $\sin^2 4x + \cos^2 2x = 1$ .

► Використання властивості обмеженості функцій  $y = \sin x$  і  $y = \cos x$  при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

**В** 24. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\cos 3x + \cos \frac{5x}{2} = 2$ ;

б)  $2\sin x + 3\cos x = 5$ ;

в)  $\cos \frac{3x}{2} + 3\cos 7x = 4$ ;

г)  $\sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 3$ ;

д)  $\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \sin 3x = 1$ ;

е)  $(\sin x - \sqrt{3} \cos x) \sin 3x = 2$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою формул перетворення суми (або різниці) однойменних тригонометричних функцій на добуток і формул перетворення добутку тригонометричних функцій на суму (або різницю)

**Д** 25. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sin 4t - \sin 2t = 2\cos 3t$ ;

б)  $\cos 3y + \sin 2y - \sin 4y = 0$ ;

в)  $\cos 7x + \cos x = 4\cos 4x$ ;

г)  $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$ ;

д)  $\cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - 2x \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) = \frac{1}{2}$ ;

е)  $\sin \left( \frac{\pi}{6} - 2x \right) + \cos \left( \frac{\pi}{3} - 2x \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**В** 26. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sin x \sin 3x = \cos 3x \cos 5x$ ;

б)  $1 + 2\cos 5x \cos x - \cos 6x = 0$ ;

в)  $\cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos x = \frac{1}{2}$ ;

г)  $\cos x \cos 2x \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 2x$ ;

д)  $3 + 2\sin 3x \sin x = 3\cos 2x$ ;

е)  $9\cos 3x \cos 5x + 7 = 9\cos 3x \cos x + 12\cos 4x$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь за допомогою підстановок  $t = \sin x \pm \cos x$ ,  $t = \operatorname{tg} x \pm \operatorname{ctg} x$  тощо.

**В** 27. Розв'яжіть рівняння:

а)  $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$ ;

б)  $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$ ;

в)  $\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2$ ;

г)  $9(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x) = 15(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 2$ .

► Відбір коренів при розв'язуванні тригонометричних рівнянь

**Д** 28. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\cos\sqrt{x-1} = 1$ ;

б)  $\frac{\sin 2x}{\sqrt{4-x^2}} = 0$ ;

в) знайдіть кількість коренів рівняння  $\cos x = -\frac{1}{2}$  на відрізку  $[0; 2\pi]$ ;

г)  $\frac{\sin 4x}{\sin 2x} = 2$ ;

д)  $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$ ;

е)  $\frac{1}{\cos x} + 1 = \sin(\pi - x) - \cos x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$ .

► Розв'язання ірраціональних тригонометричних рівнянь

**В** 29. Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sqrt{\sin x} = -\cos x$ ;

б)  $\sqrt{2\cos x - 1} = -\sin x$ ;

в)  $\sqrt{9 - 16\operatorname{tg} x} = 4\operatorname{tg} x - 1$ ;

г)  $\sqrt{2} \cos \frac{x}{2} = \sqrt{\cos 2x - 3\cos x}$ ;

д)  $(\sin x + 1 - 2\sin^2 x)\sqrt{\operatorname{tg} x} = 0$ ;

е)  $\sin 2x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 2\sqrt{2 + 2\cos 2x}$ .

**В** 30. Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має розв'язок, і вкажіть ці розв'язки:

а)  $\sin 3x = a - 1$ ;

б)  $\sin 2x - \cos 2x = a$ ;

в)  $\cos 2x = a \cos x$ ;

г)  $\sin^2 x + 2\sin x + a = 0$ ;

д)  $\cos^2 x + (a+1)\cos x - (a+2) = 0$ ;

е)  $\sin 2x + (a+2)(\sin x - \cos x) - 2a - 1 = 0$ .

► Розв'язування тригонометричних рівнянь різних типів

**С** 31. Розв'яжіть рівняння:

а)  $2\operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $\cos \frac{\sqrt{2}}{x} = 1$ ;

в)  $\sin \frac{\pi}{\sqrt{x}} = 0$ ;

г)  $\cos \pi(x^2 - 3x + 2) = 0$ ;

д)  $\sin(\cos 2x) = 1$ ;

е)  $\operatorname{ctg} 2\sqrt{x} = -1$ .

**Д 32.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\sin 2x + \sqrt{2} \cos x = 0$ ;

б)  $8\sin^2 x + 6\cos^2 x = 13\sin 2x$ ;

в)  $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \frac{x}{2}$ ;

г)  $\sin^4 t - \cos^4 t = \frac{1}{2}$ ;

д)  $\sin^4 y + \cos^4 y = \sin 2y$ ;

е)  $2\sin 2x \cos 2x \cos 4x = -\frac{1}{4}$ .

**Д 33.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $4\sin^3 x + 4\sin^2 x - 3\sin x = 3$ ;

б)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$ ;

в)  $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ;

г)  $\sin z + 2\cos z = 1$ ;

д)  $\sin y + \cos y = 1 - \frac{1}{2}\sin 2y$ ;

е)  $\sin 2x + \operatorname{tg} x - 2 = 0$ .

**Д 34.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$ ;

б)  $1 + \cos 8x = \operatorname{ctg} 4x$ ;

в)  $\sin 3x + \cos 3x = \sqrt{2} \cos 5x$ ;

г)  $2 + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ ;

д)  $\sin 5x + \sin x + 2\sin^2 x = 1$ ;

е)  $\sin^3 t - \cos^3 t = \cos^2 t - \sin^2 t$ .

**В 35.** Розв'яжіть рівняння:

а)  $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$ ;

б)  $\frac{|\sin x|}{\sin x} = 1 - \cos 2x$ ;

в)  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 1 + \cos x = 2\cos 2x$  на відрізку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ;

г)  $2\sin\left(\sqrt{x} + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$  на відрізку  $[0; \pi^2]$ ;

д) укажіть найменший корінь рівняння  $-1 + \cos x = \cos 2x$ , який належить відрізку  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;

е)  $\sqrt{\frac{1}{2} + \sin x} = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin 3x}$ .

► Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей

**С 36.** Розв'яжіть нерівність:

а)  $\cos x > \frac{1}{2}$ ;

б)  $\sin x \leq \frac{1}{2}$ ;

в)  $\cos t \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;

г)  $\sin y > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

д)  $\cos z \leq 0$ ;

е)  $\sin x > -1$ .

С 37. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\operatorname{tg} x < 1$ ;                      б)  $\operatorname{tgy} > -\sqrt{3}$ ;                      в)  $\operatorname{ctg} x \leq -1$ ;  
г)  $\operatorname{tg} x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;                      д)  $\operatorname{ctg} x \geq 0$ ;                      е)  $\operatorname{tg} z \leq -\sqrt{3}$ .

С 38. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\cos 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;                      б)  $\sin 5x > 0$ ;                      в)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq -1$ ;  
г)  $\cos \frac{2x}{5} < 2$ ;                      д)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \geq -\frac{1}{2}$ ;                      е)  $\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) < 0$ .

Д 39. Розв'яжіть нерівність, використовуючи формули подвійного аргументу:

- а)  $\cos^2 2x - \sin^2 2x > 0$ ;                      б)  $2\sin \frac{3x}{7} \cos \frac{3x}{7} < \frac{1}{2}$ ;  
в)  $\cos^4 x - \sin^4 x \geq \frac{1}{2}$ ;                      г)  $\frac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x} < \frac{\sqrt{3}}{4}$ .

Д 40. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $\sin^2 2x \geq \frac{1}{4}$ ;                      б)  $\operatorname{ctg}^2 t < 1$ ;  
в)  $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$ ;                      г)  $|\cos x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

В 41. Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод введення допоміжного аргументу:

- а)  $\sqrt{3} \sin x + \cos x \geq 1$ ;                      б)  $\sin 2t - \cos 2t > \sqrt{2}$ ;  
в)  $\sin 4x < \cos 4x$ ;                      г)  $\sin 3z - \cos 3z < -2\sqrt{2} \cos\left(3z + \frac{\pi}{4}\right)$ .

В 42. Розв'яжіть нерівність, використовуючи метод розкладання на множники і метод інтервалів для тригонометричної функції:

- а)  $2\sin^2 x - \sqrt{3} \sin x < 0$ ;                      б)  $(2\cos t - 1)(2\cos t + \sqrt{3}) \leq 0$ ;  
в)  $-\operatorname{tg}^2 x + 4\operatorname{tg} x - 4 \geq 0$ ;                      г)  $\operatorname{tg}^2 z + \frac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} z \geq 1$ ;  
д)  $\cos^2 2x + \cos^2 x \leq 1$ ;                      е)  $\operatorname{tg}^2 x + (2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 2\sqrt{3} < 0$ .

В 43. Розв'яжіть нерівність:

- а)  $2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 9\cos^2 x > 0$ ;  
б)  $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$ ;  
в)  $4\cos x - \frac{5}{\cos x} > 8$ ;  
г)  $2\cos^4 x - 2\cos^2 x + \frac{1}{2} \leq 0$ .

**В 44.** Розв'яжіть нерівність методом інтервалів для аргументу:

- а)  $\cos 2x \operatorname{tg} x > 0$ ;                      б)  $\sin \frac{2x}{3} \sin 2x < 0$ ;  
в)  $\cos x \cos 2x \cos 3x \leq 0$ ;              г)  $\sin 5x \cos 3x < \sin 7x \cos x$ .

**В 45.** Розв'яжіть нерівність, що містить модуль:

- а)  $|\sin x| \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;                      б)  $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| < 1$ ;  
в)  $|\sin x + \cos x| < 1$ ;              г)  $|\sin x| |\cos x| > \frac{1}{4}$ .

**Д 46.** Розв'яжіть рівняння, що містить обернені тригонометричні функції:

- а)  $\arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{3}$ ;                      б)  $\arcsin(x+1) = -\frac{\pi}{2}$ ;  
в)  $\arccos(x^2 - 2x) = -\frac{\pi}{2}$ ;              г)  $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + x\right) = \frac{\pi}{6}$ ;  
д)  $6 \arcsin(x^2 - 6x + 8,5) = \pi$ ;      е)  $\arccos x - \arcsin x = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Д 47.** Розв'яжіть рівняння, що містить обернені тригонометричні функції:

- а)  $\arccos^2 x - 6 \arccos x + 8 = 0$ ;  
б)  $\arccos x + \arccos(1-x) = \arccos(-x)$ ;  
в)  $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{3} = \operatorname{arctg} x$ ;  
г)  $\operatorname{arctg}(5-x) + \operatorname{arctg}(5+x) = \frac{\pi}{4}$ ;  
д)  $\operatorname{arctg}(1 + \cos x) = \operatorname{arctg}(4 - 4 \cos x)$ .

**В 48.** Розв'яжіть рівняння з параметром:

- а)  $\cos \frac{3x}{4} = a - 1$ ;                      б)  $\sin 2x - \cos 2x = a$ ;  
в)  $\sin^4 3x - \cos^4 3x = a$ ;              г)  $\sin^2 2x - a \cos^2 x = 0$ ;  
д)  $\arcsin^2 x + (a+1) \arcsin x - (a+2) = 0$ .

**В 49.** Знайдіть всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння має розв'язки:

- а)  $3 + 2 \cos^2 x = a$ ;                      б)  $5 \sin x + 24 \cos^2 \frac{x}{2} = a$ .

**В 50.** Розв'яжіть нерівність з параметром:

- а)  $\cos x > a$ ;                      б)  $\operatorname{tg} x \leq a$ .

**В** 51. Розв'яжіть нерівність, що містить обернену тригонометричну функцію:

- а)  $0 \leq \arccos x \leq \frac{\pi}{3}$ ;                      б)  $\arcsin x \leq \frac{\pi}{6}$ ;  
 в)  $2\arcsin x + \arccos x < \frac{3\pi}{4}$ ;            г)  $\arcsin x > \arccos x$ ;  
 д)  $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{3\pi}{4}$ .

Тест 8. Обернені тригонометричні функції .....

..... *Варіант 1* .....

**П** 1. Обчисліть:  $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{6}$

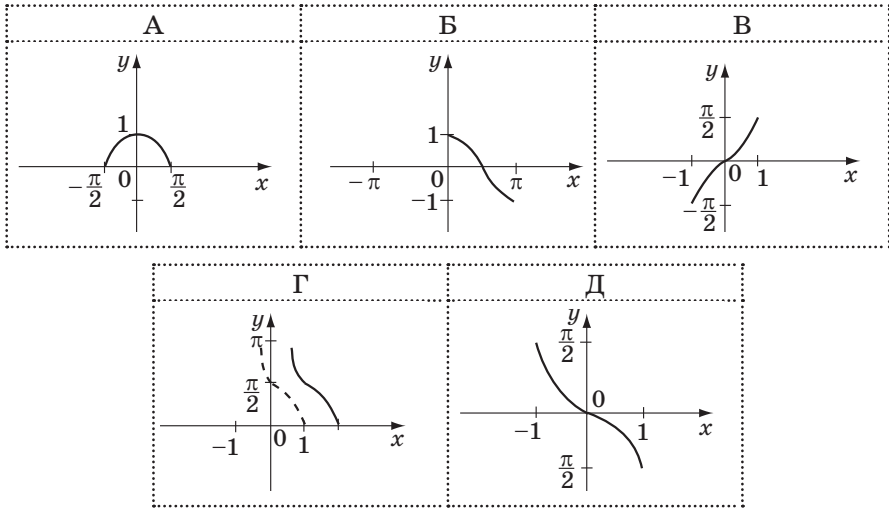
**П** 2. Укажіть неправильну нерівність.

А	Б	В
$\operatorname{arctg} 1 < \operatorname{arctg} 1$	$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} > \arcsin \frac{1}{2}$	$\arcsin 1 > \arccos 1$
Г		Д
$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) \leq \operatorname{arctg}(-1)$		$\arccos 0 > \arcsin \frac{1}{2}$

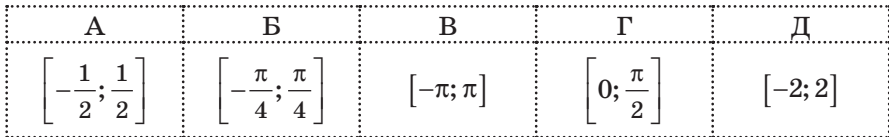
**П** 3. Укажіть рівняння, областю визначення якого є будь-які дійсні значення змінної.

А	Б	В	Г	Д
$\operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1$	$\sqrt{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sin 2x = \frac{1}{4}$	$\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = 1$	$\frac{ \sin x }{\sin x} = x$

**П** 4. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції  $y = \arccos x - \frac{\pi}{2}$ .



**П 5.** Знайдіть множину значень функції  $y = \frac{1}{2} \arcsin 2x$ .



**С 6.** Укажіть розв'язок рівняння  $\sin 2x = -1$ , що належить проміжку  $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ .

**С 7.** Укажіть кількість коренів рівняння  $\cos 5x = -\frac{1}{2}$  на проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**С 8.** Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ .

**Д 9.** Знайдіть корені рівняння  $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$ .

**Д 10.** Розв'яжіть рівняння  $2\sin x + \sin 2x = 0$ .

**В 11.** Розв'яжіть рівняння  $\sin 2x + \cos 2x = \frac{\pi}{2}$ .

**В 12.** Знайдіть розв'язок рівняння  $\sqrt{1 + \cos x} = -\sin x$ .



Варіант 2

II 1. Обчисліть:  $-\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ .

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$	0

II 2. Укажіть неправильну нерівність.

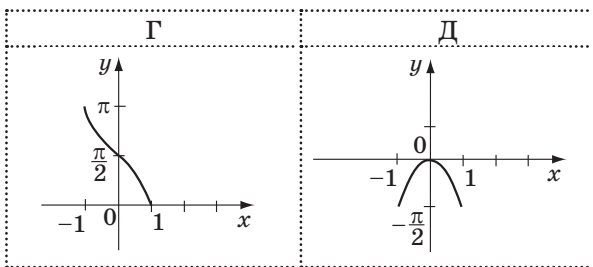
А	Б	В
$\arctg 0 < \text{arccctg} 0$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} < \arccos \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	$\arctg \sqrt{3} > \arctg (-\sqrt{3})$
Г	Д	
$\arccos 0 > \arccos 1$	$\arctg(-1) > \text{arccctg}(-1)$	

II 3. Укажіть рівняння, область визначення якого є будь-які дійсні значення змінної.

А	Б	В
$\cos x \cdot \text{tg} x = 0$	$\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$
Г	Д	
$\text{tg}^2 x + \text{ctg}^2 x = 2$	$\frac{\cos 2x}{ \cos 2x } = 2x$	

II 4. Укажіть рисунок, на якому зображено графік функції  $y = |\arcsin x|$ .

А	Б	В



**П** 5. Знайдіть множину значень функції  $y = 2\arccos x$ .

А	Б	В	Г	Д
$[-1; 1]$	$[0; 2\pi]$	$[0; \pi]$	$[-\pi; \pi]$	$[0; 2]$

**С** 6. Укажіть розв'язок рівняння  $\operatorname{tg} 3x = 1$ , що належить проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**С** 7. Укажіть кількість коренів рівняння  $\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$  на проміжку  $[0; 2\pi]$ .

**С** 8. Розв'яжіть рівняння  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ .

**Д** 9. Знайдіть корені рівняння  $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$ .

**Д** 10. Розв'яжіть рівняння  $-2\cos x + \sin 2x = 0$ .

**В** 11. Розв'яжіть рівняння  $2\cos x(\cos x - 2\sqrt{2} \operatorname{tg} x) = 5$ .

**В** 12. Знайдіть розв'язок рівняння  $\sqrt{\sin x + 1} = -\cos x$ .

Тест 9. Тригонометричні рівняння і нерівності .....

*Варіант 1*

**П** 1. Укажіть нерівність, розв'язком якої є число 0.

А	Б	В	Г	Д
$\cos t < -\frac{1}{2}$	$\sin x > \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} x > -1$	$\operatorname{tg} x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sin y \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

□ 2. Укажіть розв'язок нерівності  $\cos x \geq \frac{1}{2}$ .

А	Б	В
$\left[2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{\pi}{3} + 2\pi l\right), l \in \mathbf{Z}$	$\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$
Г	Д	
$\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l\right], l \in \mathbf{Z}$	$\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$	

□ 3. Укажіть розв'язок нерівності  $\operatorname{tg} x \leq 0$ .

А	Б	В
$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right], n \in \mathbf{Z}$	$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$	$\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$
Г	Д	
$(-\infty; \pi n), n \in \mathbf{Z}$	$\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$	

□ 4. Укажіть розв'язок рівняння  $\arccos\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{2\pi}{3}$ .

А	Б	В	Г	Д
1	0	-1	$\frac{1}{2}$	Немає розв'язків

□ 5. При яких значеннях  $a$  має зміст рівняння  $\sin 2x = a$ ?

А	Б	В	Г	Д
$[-2; 2]$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$	$[0; 1]$	$[-1; 1]$	$(-1; 1)$

□ 6. Розв'яжіть нерівність  $\cos 2x \geq 1$ .

□ 7. Укажіть розв'язок нерівності  $\arcsin \frac{t}{2} < 0$ .

□ 8. Знайдіть корінь рівняння  $\arcsin x = (x-1)^2 + \frac{\pi}{2}$ .

Д 9. Знайдіть найбільший корінь рівняння

$$\operatorname{arctg}^2 y - \frac{\pi}{4} \operatorname{arctg} y - \frac{\pi^2}{36} = 0.$$

Д 10. Розв'яжіть подвійну нерівність  $\frac{\pi}{2} \leq \arccos x \leq \pi$ .

В 11. Розв'яжіть нерівність  $6 \cos^2 x - 5 \sin x + 5 \geq 0$ .

В 12. При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $\operatorname{Zarcsin} x + \arccos x = \frac{\pi}{2} + a$  має розв'язки?

Варіант 2

П 1. Укажіть нерівність, розв'язком якої є число  $\frac{\pi}{2}$ .

А	Б	В	Г	Д
$\cos y \geq \frac{1}{2}$	$\sin x > \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} x \geq 1$	$\cos t < 0$	$\sin y \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

П 2. Укажіть розв'язок нерівності  $\cos x < 0$ .

А	Б	В
$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi l\right), l \in \mathbf{Z}$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbf{Z}$	$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$
Г	Д	
$(\pi + 2\pi l; 2\pi + 2\pi l), l \in \mathbf{Z}$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{3\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$	

П 3. Укажіть розв'язок нерівності  $\operatorname{ctg} x > 0$ .

А	Б	В
$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$	$\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$	$\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$
Г	Д	
$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$	$\left(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$	

П 4. Укажіть розв'язок рівняння  $\arcsin\left(x - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ .

А	Б	В	Г	Д
-1	1	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

П 5. При яких значеннях  $a$  має зміст рівняння  $\cos 3x = a$ ?

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 3]$	$\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$	$[0; 1]$	$[-1; 1]$	$(-1; 1)$

С 6. Розв'яжіть нерівність  $\sin \frac{x}{2} \leq -1$ .

С 7. Укажіть розв'язок нерівності  $\arccos 2x \geq \frac{\pi}{2}$ .

С 8. Знайдіть корінь рівняння  $\arccos x = (x+1)^2 + \pi$ .

Д 9. Знайдіть найменший корінь рівняння

$$\arcsin^2 t - \frac{\pi}{12} \arcsin t - \frac{\pi^2}{12} = 0.$$

Д 10. Розв'яжіть подвійну нерівність  $-\frac{\pi}{4} \leq \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{6}$ .

В 11. Розв'яжіть нерівність  $3(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) - 8(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 11 \geq 0$ .

В 12. При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $2\arcsin x + 4\arccos x = \pi - a$  має розв'язки?

Контрольна робота 5. Обернені тригонометричні функції

Варіант 1

П 1. а) Знайдіть область визначення функції  $y = \arcsin(x-1)$ ;

б) знайдіть множину значень функції  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2x$ ;

в) побудуйте схематично графік функції  $y = \arccos x$ .

**П** 2. Розв'яжіть найпростіше тригонометричне рівняння:  
 а)  $\sin(-x) = \frac{1}{2}$ ;      б)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$ ;      в)  $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = \sqrt{3}$ .

**С** 3. Розв'яжіть рівняння:  
 а)  $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ ;      б)  $\sin 2x + 2\cos x = 0$ ;  
 в)  $\sin 2x - \sin 3x + \sin 4x = 0$ .

**С** 4. Знайдіть корені рівняння:  
 а)  $\sqrt{3} \sin 3t - \cos 3t = -1$ , що належать проміжку  $[0; \pi]$ ;  
 б)  $\sin x + \sin 9x = 2$ .

**Д** 5. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{\cos 2x} = 1 - 2\sin x$ .

**В** 6. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра  $a$ :  
 $\sin^2 x - 2a \sin x \cos x - 3a^2 \cos^2 x = 0$ .

..... *Варіант 2* .....

**П** 1. а) Знайдіть область визначення функції  $y = \arccos(x+1)$ ;  
 б) знайдіть множину значень функції  $y = 2\operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ ;  
 в) побудуйте схематично графік функції  $y = \operatorname{arctg} x$ .

**П** 2. Розв'яжіть найпростіше тригонометричне рівняння:  
 а)  $\cos(-x) = -\frac{1}{2}$ ;      б)  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$ ;      в)  $\operatorname{tg} \frac{5x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**С** 3. Розв'яжіть рівняння:  
 а)  $\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$ ;      б)  $\sin 2x - 2\sin x = 0$ ;  
 в)  $\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$ .

**С** 4. Знайдіть корені рівняння:  
 а)  $\sin 5x + \sqrt{3} \cos 5x = -2$ , що належать проміжку  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ;  
 б)  $\cos 8x - \cos x = 2$ .

**Д** 5. Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{1 - \cos 4x} = \sin 4x$ .

**В** 6. Розв'яжіть рівняння залежно від параметра  $a$ :  
 $\cos^2 x + 3a \cos x \sin x + 2a^2 \sin^2 x = 0$ .

**☑ Контрольна робота 6. Тригонометричні рівняння і нерівності** .....

..... *Варіант 1* .....

- П** 1. Розв'яжіть найпростішу тригонометричну нерівність:  
 а)  $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      б)  $\operatorname{ctg} x \geq 1$ ;      в)  $\sin x < \sqrt{3}$ .
- П** 2. Розв'яжіть найпростішу нерівність, що містить обернену тригонометричну функцію:  
 а)  $\operatorname{arctg} t > \frac{\pi}{6}$ ;      б)  $\operatorname{arcsin} y < -\frac{\pi}{6}$ ;      в)  $\operatorname{arccos} x \geq \frac{\pi}{2}$ .
- С** 3. Розв'яжіть рівняння або нерівність, що містить обернені тригонометричні функції:  
 а)  $\operatorname{arccotg} |x| = \frac{\pi}{4}$ ;  
 б)  $2 \operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{arccos} x = -\pi^2$ ;  
 в)  $3 \operatorname{arccos} \frac{x}{2} \leq 2\pi$ .
- С** 4. Розв'яжіть тригонометричну нерівність:  
 а)  $\sin^4 x - \cos^4 x \leq 0$ ;  
 б)  $2 \cos^2 x - \sqrt{3} \cos x \geq 0$ .
- Д** 5. Розв'яжіть нерівність  $\sqrt{1-2\sin x} \geq \sin x + 1$ .
- В** 6. Знайдіть всі значення параметра  $a$  такі, при яких нерівність  $(1 + \sin x)^2 + a \sin x + a + 1 > 0$  є правильною для всіх значень  $x$ .

..... *Варіант 2* .....

- П** 1. Розв'яжіть найпростішу тригонометричну нерівність:  
 а)  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ ;      б)  $\operatorname{tg} x < -1$ ;      в)  $\cos x > -\sqrt{3}$ .
- П** 2. Розв'яжіть найпростішу нерівність, що містить обернену тригонометричну функцію:  
 а)  $\operatorname{arctg} t \leq -\frac{\pi}{6}$ ;      б)  $\operatorname{arcsin} y \geq -\frac{\pi}{3}$ ;      в)  $\operatorname{arccos} x < \frac{5\pi}{6}$ .
- С** 3. Розв'яжіть рівняння або нерівність, що містить обернені тригонометричні функції:  
 а)  $\operatorname{arctg} |x| = \frac{\pi}{3}$ ;      б)  $\operatorname{arcsin} x \cdot \operatorname{arccos} x = -\frac{3\pi^2}{2}$ ;      в)  $4 \operatorname{arccos} 3x \geq \pi$ .
- С** 4. Розв'яжіть тригонометричну нерівність:  
 а)  $\cos^4 t - \sin^4 t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;      б)  $\sqrt{3} \sin x + 2 \sin^2 x \leq 0$ .
- Д** 5. Розв'яжіть нерівність  $\sqrt{1+2\cos x} \leq 1 - \cos x$ .
- В** 6. Знайдіть всі значення параметра  $a$  такі, при яких нерівність  $(1 - \cos x)^2 - a \cos x + a + 1 > 0$  є правильною для всіх значень  $x$ .

# ВІДПОВІДІ

## ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ

- ▶▶ Варіант 1
- ▶▶ Варіант 2 (високий рівень складності)

Відповіді до всіх тренувальних вправ, тестових завдань і контрольних робіт можна знайти на сайті видавництва «Ранок»:

[www.ranok.com.ua](http://www.ranok.com.ua)



# ТЕМА 1. ФУНКЦІЇ, МНОГОЧЛЕНИ, РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

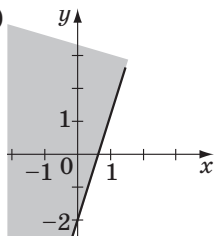
## ЧАСТИНА 1. МНОЖИНИ

Тренувальні вправи

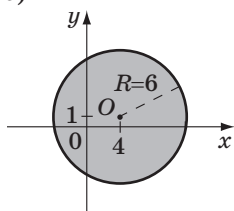
Варіант 1

2. а)  $\{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ ; б)  $\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31\}$ ;  
 в)  $\{2; 4; 8; 16; 32\}$ ; г)  $\{11; 12; 13; 14; 15\}$ ; д)  $\{1; 2; 3; 6\}$ ;  
 е)  $\{123; 132; 213; 231; 312; 321\}$ .  
 3. а)  $\{4\}$ ; б)  $\{1\}$ ; в)  $\{3; 4\}$ ; г)  $\{1\}$ ; д)  $\emptyset$ ; е)  $\{1; -2; 2\}$ .  
 4. а)  $\{-1; 0; 1\}$ ; б)  $\{1\}$ ; в)  $\{-1; 0; 1\}$ ; г)  $\{1; 2; 3\}$ ; д)  $\{-3; -2; 3\}$ .  
 5. а)  $\{3; 9\}$ ; б)  $\emptyset$ ; в)  $\mathbb{A}$ ; г) множина квадратів; д)  $\{1\}$ ; е)  $[1; 4]$ .  
 6. а) Сфера радіуса 4 з центром у точці  $O$ ; б) куля радіуса  $R$  з центром у точці  $O$ ; в) площина, паралельна площині  $\alpha$ ; г) циліндр.

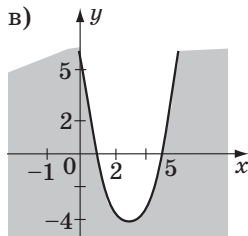
7. а)



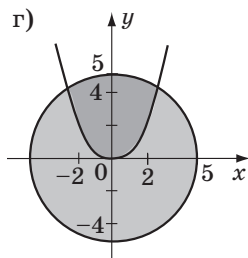
б)



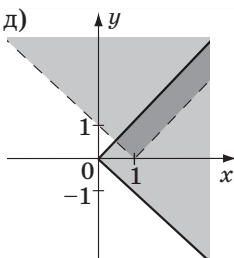
в)



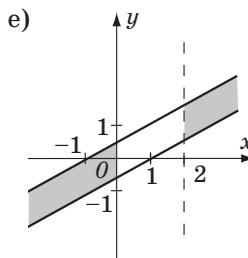
г)



д)



е)



8. а)  $\{3; 5\}$ ; б)  $\emptyset$ ; в)  $\{1; -1; 3; -3\}$ ; г)  $\{2\}$ .  
 9. а)  $\{-1; 0; 1; 2; 4\}$ ; б)  $\mathbb{Z}$ ; в)  $\mathbb{N}$ ; г)  $[-1; 4]$ ; д) множина цілих чисел, які не діляться на 18.

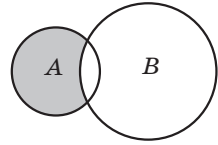
10. а)  $5 \in \mathbb{N}$ ;  $\frac{11}{5}$ ;  $\frac{3}{22}$ ;  $-21, 2$ ;  $3, (034) \in \mathbb{Q}$ ;  $-1001 \in \mathbb{Z}$ ;  $\pi$ ;

$\sqrt{7}$  — ірраціональні; б)  $\left(-7, 1 + \frac{1}{3}\right) \in \mathbb{Q}$ ;  $5\sqrt{2}$  — ірраціональне;  
 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} \in \mathbb{N}$ ;  $\left(\left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 - \sqrt{60}\right) \in \mathbb{N}$ .

11. а) Ні; б) так; в) так; г) так; д) ні; е) так.

12. а)  $\{3\}$ ; б) множина правильних  $n$ -кутників,  $n \geq 4$ .

13. а) див. рисунок; б) множина хлопчиків 9-х класів; в)  $\{4; 6\}$ ;  $\{1; 2\}$ ;  $\{1; 2\} \cup \{4; 6\}$ .



14. а)  $\left\{\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}\right\}$ ; б)  $\{5; 7; 11\}$ ; в)  $\left\{1; \frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right\}$ ; г)  $\{2; 16; 512\}$ .

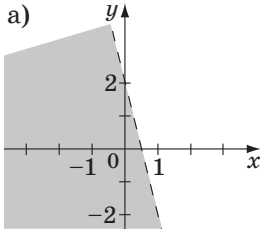
15. а) Так; б) так; в) так; г) ні; д) так.

16. а) Так; б) ні (кожному колу відповідає його центр, але не кожній точці ставиться у відповідність коло); в) так; г) ні (у кожного трикутника, загалом кажучи, три різні висоти).

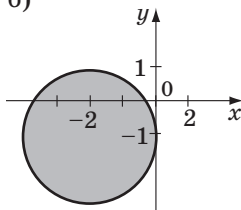
..... *Варіант 2\** .....

6. а) Сфера радіуса 2 з центром у точці  $O$ ; б) куля радіуса 10 з центром у точці  $O$ ; в) вісь циліндра; г) площина, паралельна  $\alpha$  і віддалена від  $\alpha$  на відстань  $l$ .

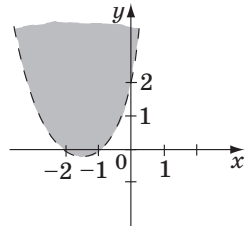
7. а)



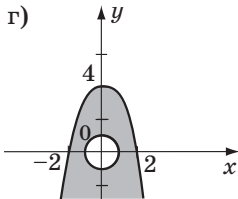
б)



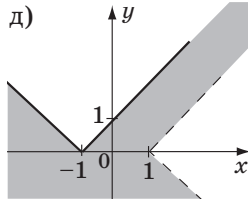
в)



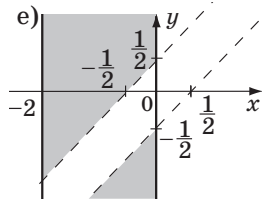
г)



д)



е)



15. а) Ні; б) так; в) так; г) ні; д) так.

16. а) Ні (у кожний трикутник можна вписати одне коло, але навколо кола можна описати який завгодно трикутник); б) ні (коло можна вписати не в кожний чотирикутник, а тільки в той, у якого суми протилежних сторін однакові); в) ні (у кожного паралелограма, крім окремого випадку — ромби, — існують дві нерівні висоти); г) так (у кожне коло можна вписати єдиний квадрат, і навколо кожного квадрата можна описати єдине коло).

\* Тут і далі: відповіді до завдань другого варіанта наведені для високого рівня складності.

## ЧАСТИНА 2. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ

### ☑ Тренувальні вправи

#### Варіант 1

1. Графіки функцій а); б); г); е)

2. а) 3,3; б)  $\frac{1}{3}$ ; в) 51; г) 2; д) 3; е) 7.

3. а)  $f(-x) = \frac{x-1}{x+1}$ ;  $f(0) = -1$ ;  $f\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1-x}{1+x}$ ; б)  $f(-1) = 3$ ;  $f(2) = -2$ ;

в)  $f(-5) = -10$ ;  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$ ;  $f(12) = -10$ .

4. а)  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$ ;

в)  $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; 0) \cup (0; 4) \cup (4; +\infty)$ ; д)  $[2; +\infty)$ ;

е)  $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .

5. а)  $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; -4] \cup (1; +\infty)$ ; в)  $[0; 5]$ ;

г)  $[-2; -1] \cup (-1; 1) \cup (1; 2]$ ; д)  $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ ; е)  $[-1; 3]$ .

6. а)  $[0; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; 4]$ ; в)  $[5; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; +\infty)$ ; д)  $[0; +\infty)$ ;

е)  $\left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$ ; е)  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ ; ж)  $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ .

7. а)  $y \uparrow x \in (-\infty; 1]$ ;  $y \downarrow x \in [1; +\infty)$ ; б)  $y \uparrow x \in (-\infty; -1]$ ;  $[2; +\infty)$   
 $y \downarrow x \in [-1; 2]$ ; в)  $y \downarrow x \in (-\infty; 1]$ ;  $(1; +\infty)$ .

8. а) Вказівка:  $x_2 > x_1$ ,  $y_2 - y_1 = (2 - x_2) - (2 - x_1) = \cancel{2} - x_2 - \cancel{2} + x_1 = - (x_2 - x_1) < 0$  отже,  $y_2 < y_1$  і функція спадає;

д) вказівка:  $x_2 > x_1 \geq 1$ ;  $y_2 - y_1 = \sqrt{x_2 - 1} - \sqrt{x_1 - 1} = \frac{(\sqrt{x_2 - 1} - \sqrt{x_1 - 1})(\sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_1 - 1})}{\sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_1 - 1}} = \frac{x_2 - \cancel{1} - x_1 + \cancel{1}}{\sqrt{x_2 - 1} + \sqrt{x_1 - 1}} > 0$ ,

тому що  $x_2 - x_1 > 0$ ,  $\sqrt{x_2 - 1} > 0$ ,  $\sqrt{x_1 - 1} \geq 0$ , впливає, що,  $y_2 > y_1$  і функція  $y = \sqrt{x - 1}$  зростає;

е) вказівка:  $y_2 - y_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} - \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1} = \frac{(x_2 x_1 - x_1 + x_2 - 1) - (x_2 x_1 - x_2 + x_1 - 1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{\cancel{x_2 x_1} - x_1 + x_2 - \cancel{1} - \cancel{x_2 x_1} + x_2 - x_1 + \cancel{1}}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} = \frac{2(x_2 - x_1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} > 0$ , тому що  $x_2 > x_1$ ;

$x_2 + 1 < 0$ ;  $x_1 + 1 < 0$ , отже,  $y_2 > y_1$  і функція зростає.

9. а) Парна; б) непарна; в) непарна; г) ні парна, ні непарна;  
 д) парна; е) парна; є) парна; ж) парна.

10. а) Нулі функції: -4; -1; 2;  $D(y) = [-5; 5]$ ;  $E(y) = [-2; 4]$ ;

$f(x) \uparrow$ , якщо  $x \in [-5; -3]$ ;  $[-1; 1]$ ;  $[2; 5]$ ;  $f(x) \downarrow$ , якщо  $x \in [-3; -1]$ ;

$[1; 2]$ ;  $y_{\text{найб}} = y(5) = 4$ ;  $y_{\text{найм}} = y(-5) = -2$ ; ні парна, ні непарна;

б) нулі:  $-4; -2; -1; 1; 5$ ;  $D(y) = [-4; 5]$ ;  $E(y) = [-2; 3]$ ;  $f(x) \uparrow$ , якщо  $x \in [-3; -1,5]$ ;  $[0; 2]$ ;  $f(x) \downarrow$ , якщо  $x \in [-4; -3]$ ;  $[-1,5; 0]$ ;

$[2; 5]$ ;  $y_{\text{найб}} = y(2) = 3$ ;  $y_{\text{найм}} = y(0) = -2$ ; ні парна, ні непарна;

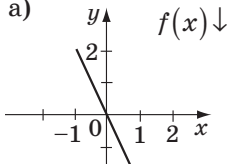
в) нулі:  $1$ ;  $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ ;  $E(y) = (-\infty; 2) \cup [3; +\infty)$ ;  $f(x) \downarrow$ , якщо  $x \in (-\infty; 2)$ ;  $(2; 4]$ ;  $f(x) \uparrow$ , якщо  $x \in [4; +\infty)$ ;  $y_{\text{найм}} = y(4) = 3$ ;

ні парна, ні непарна; г) нулі:  $\emptyset$ ;  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ ;  $E(y) = (-\infty; 1] \cup (1; +\infty)$ ;  $f(x) \uparrow$ , якщо  $x \in (-\infty; -1)$ ;  $(-1; 0]$ ;  $f(x) \downarrow$ , якщо  $x \in [0; 1)$ ;  $(1; +\infty)$ ;  $y_{\text{найб}} = y(0) = -1$ ; парна.

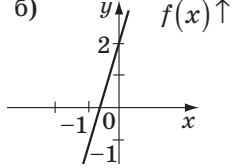
11. а)  $f(0) = 1$ ;  $f(2) = 3$ ;  $f(-1) = 0$ ;  $-1 = f(-2)$ ;  $3 = f(2)$ ;  $2 = f(1,5)$ ;

б)  $f(0) = 3$ ;  $f(2) = 0$ ;  $f(-1) = 1$ ;  $(-1)$  — таких значень аргументу немає;  $3 = f(0)$ ;  $2 = f(0,8) = f(-0,8)$ .

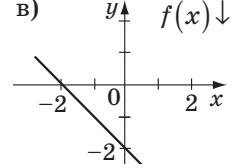
12. а)



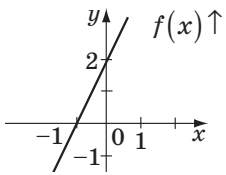
б)



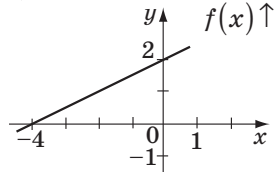
в)



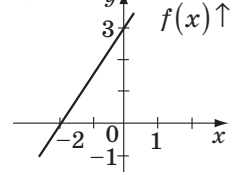
г)



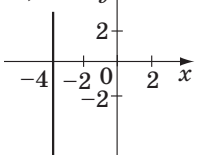
д)



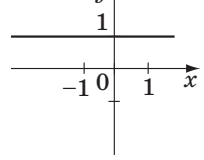
е)



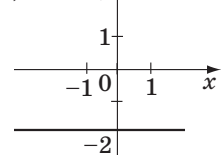
є)



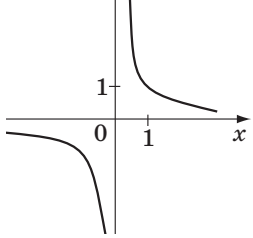
ж)



з)

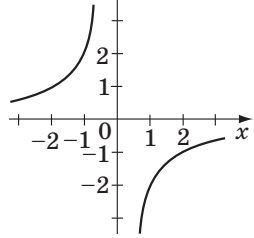


13. а)



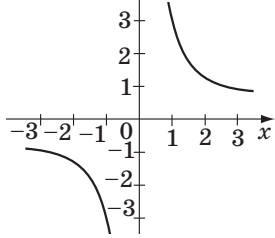
$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

б)

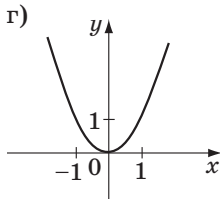


$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

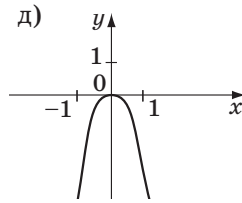
в)



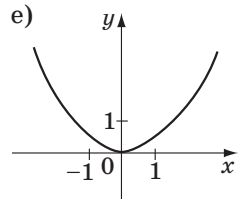
$x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



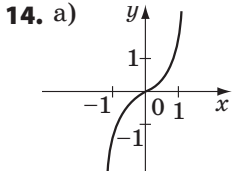
$x \in (-\infty; +\infty)$



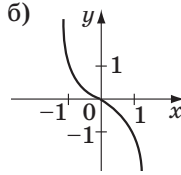
$x \in (-\infty; +\infty)$



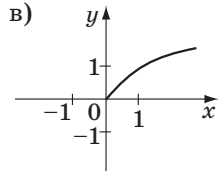
$x \in (-\infty; +\infty)$



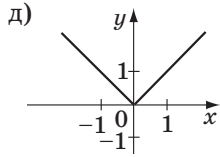
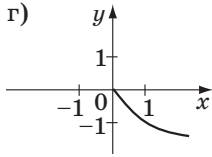
нечетна



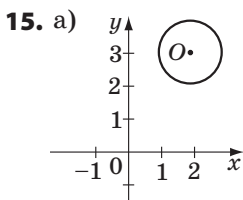
нечетна



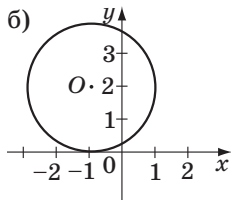
$y_{\text{наим}} = y(0) = 0$



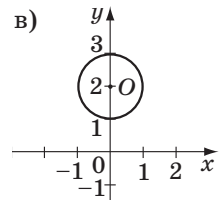
$y_{\text{наим}} = y(0) = 0$



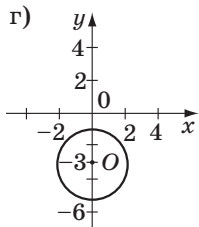
$O(2; 3)$



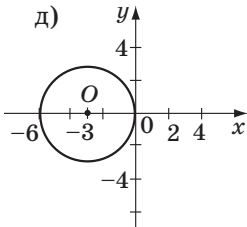
$O(-1; 2)$



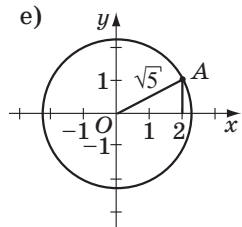
$O(0; 2)$



$O(0; -3)$

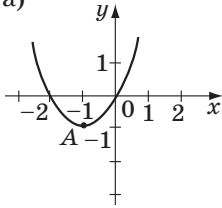


$O(-3; 0)$



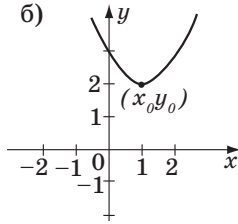
$OA = \sqrt{5} = R ; O(0; 0)$

16. а)



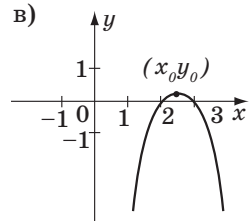
$$A(x_0; y_0) = A(-1; -1)$$

б)



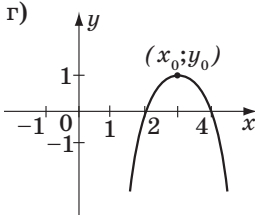
$$x_0 = 1; y_0 = 2$$

в)



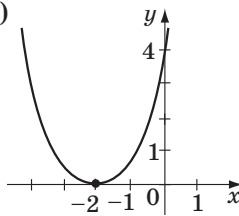
$$x_0 = 2,5; y_0 = \frac{1}{4}$$

г)



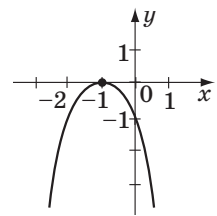
$$x_0 = 3; y_0 = 1$$

д)



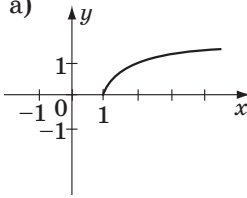
$$x_0 = -2; y_0 = 0$$

е)



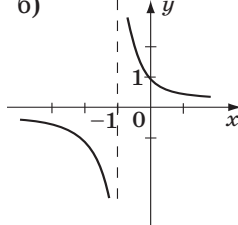
$$x_0 = -1; y_0 = 0$$

17. а)



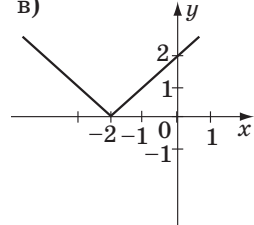
$$D(y) = [1; +\infty)$$

б)



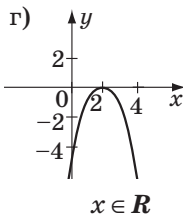
$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$$

в)



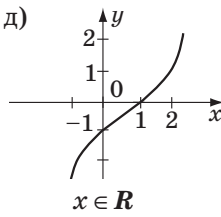
$$D(y) = (-\infty; +\infty)$$

г)



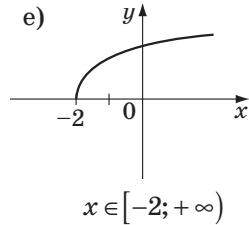
$$x \in \mathbf{R}$$

д)



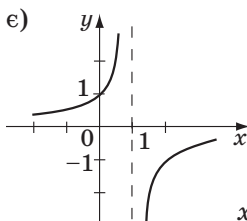
$$x \in \mathbf{R}$$

е)



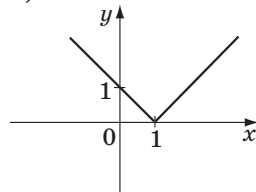
$$x \in [-2; +\infty)$$

е)



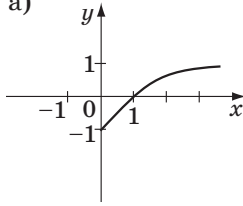
$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

ж)



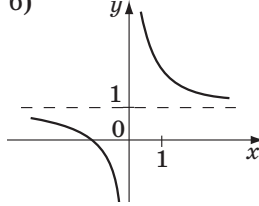
$$x \in \mathbf{R}$$

18. а)



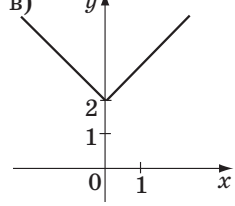
$$E(y) = [-1; +\infty)$$

б)



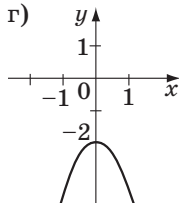
$$E(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

в)



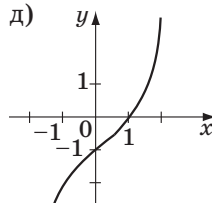
$$E(y) = [2; +\infty)$$

г)



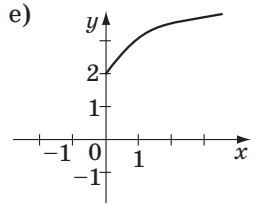
$$E(y) = (-\infty; -2]$$

д)



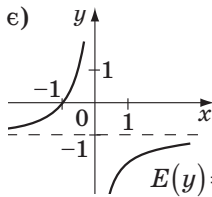
$$E(y) = (-\infty; +\infty)$$

е)



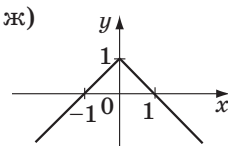
$$E(y) = [2; +\infty)$$

е)



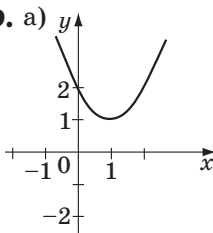
$$E(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$$

ж)

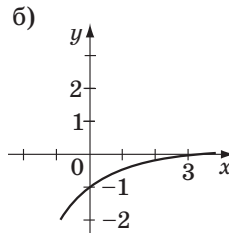


$$E(y) = (-\infty; 1]$$

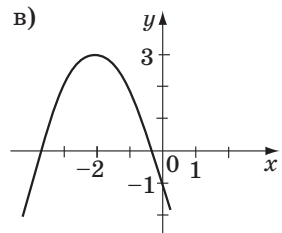
19. а)



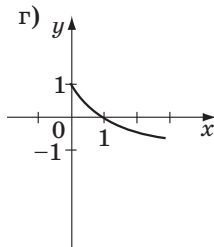
б)



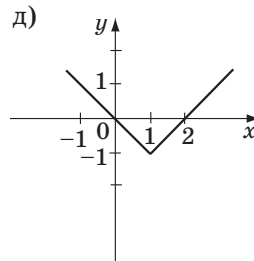
в)



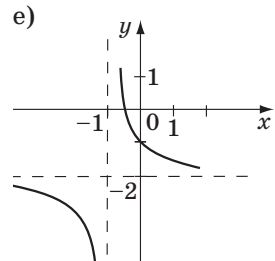
г)

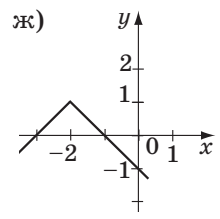
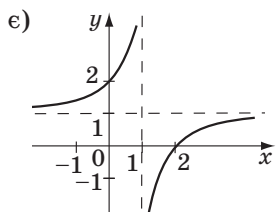


д)

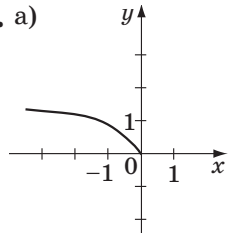


е)

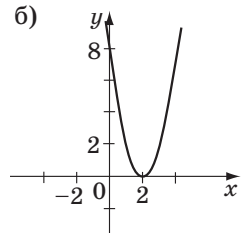




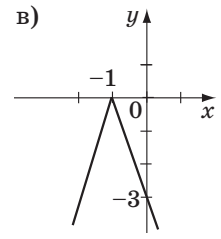
20. а)



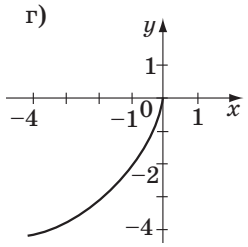
б)



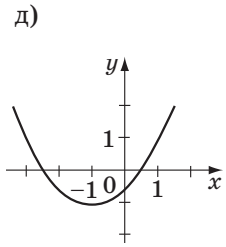
в)



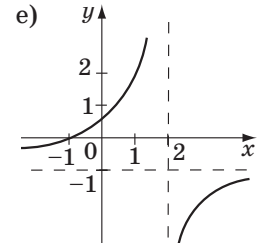
г)



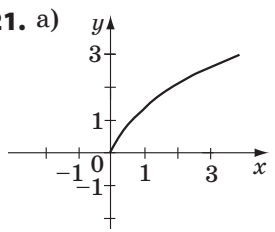
д)



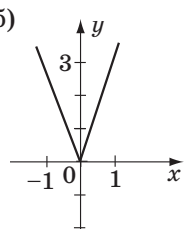
е)



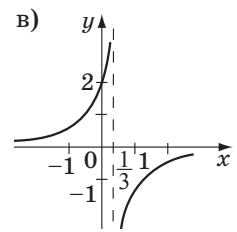
21. а)



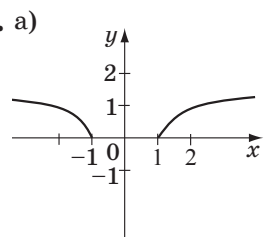
б)



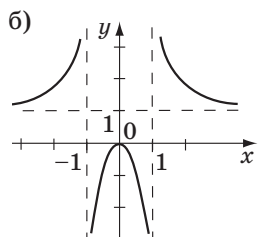
в)



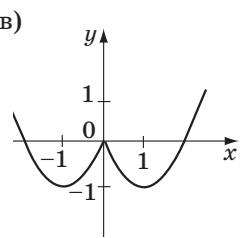
22. а)



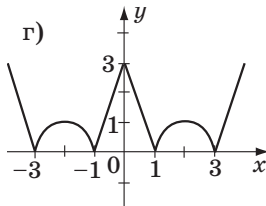
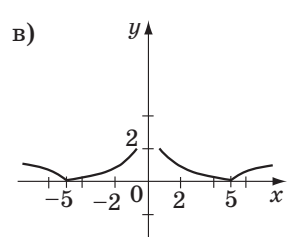
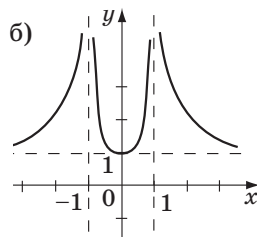
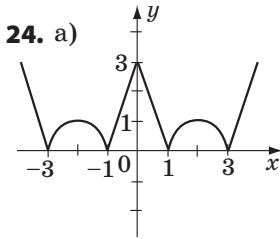
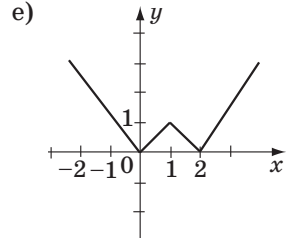
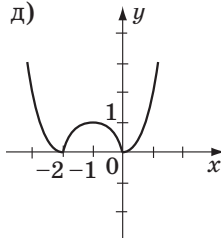
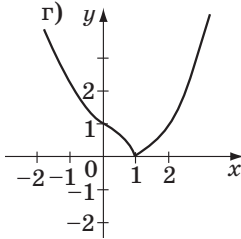
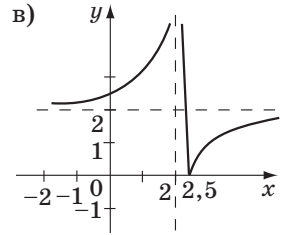
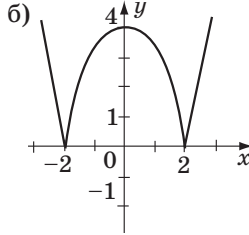
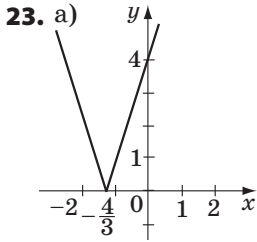
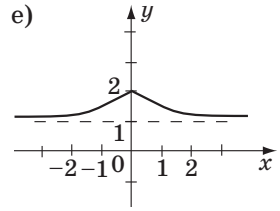
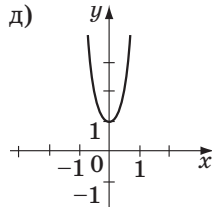
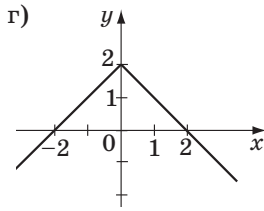
б)

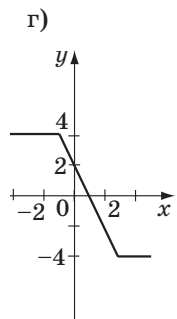
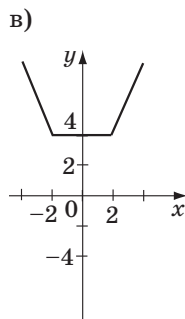
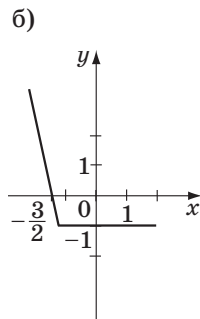
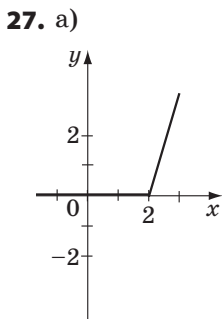
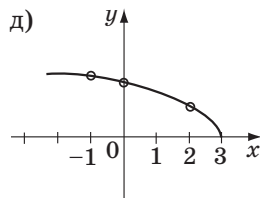
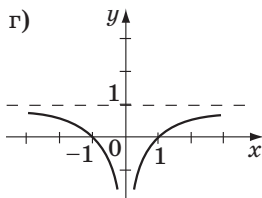
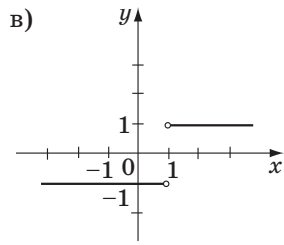
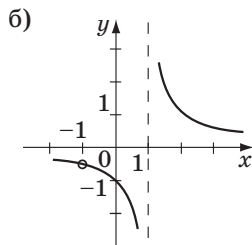
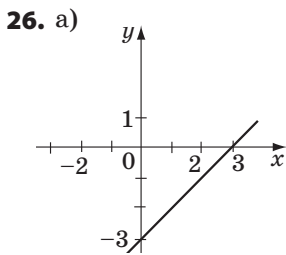
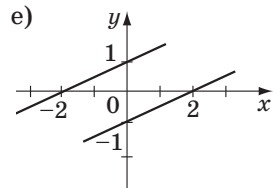
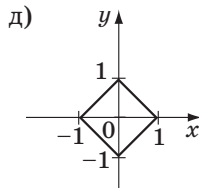
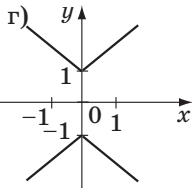
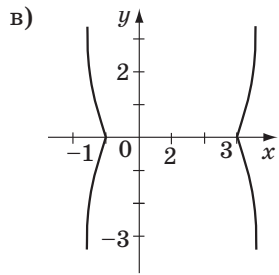
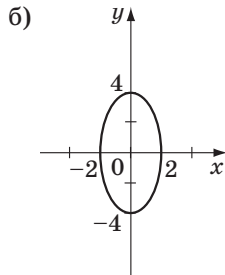
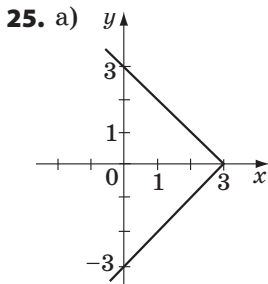


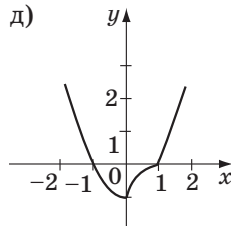
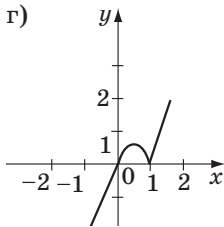
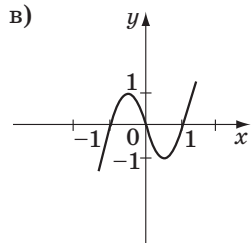
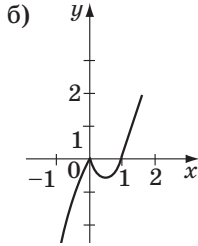
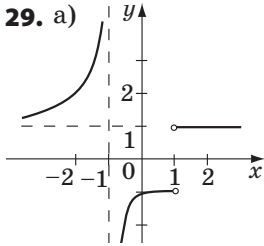
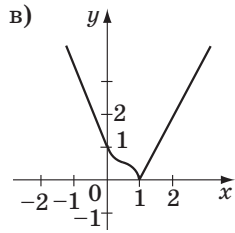
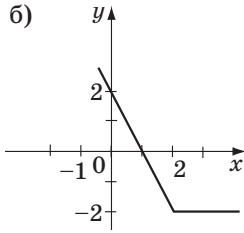
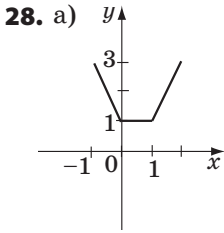
в)





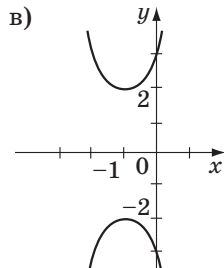
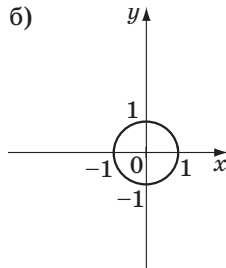
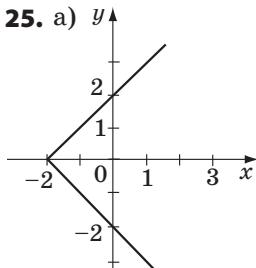
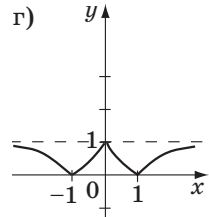
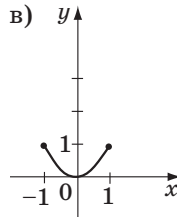
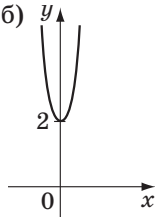
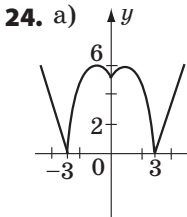


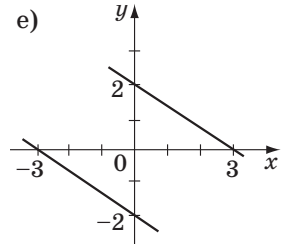
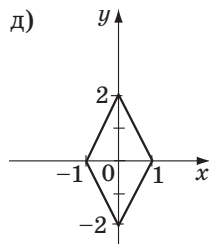
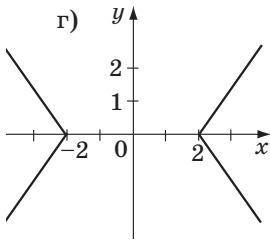




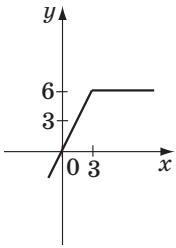
..... *Вариант 2* .....

9. е) Парна; ж) непарна; з) парна.

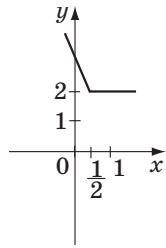




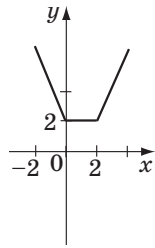
27. а)



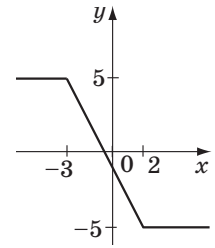
б)



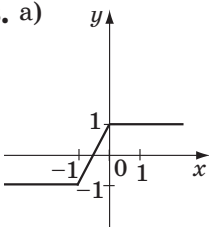
в)



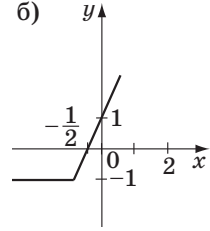
г)



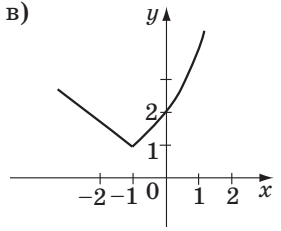
28. а)



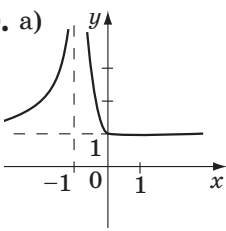
б)



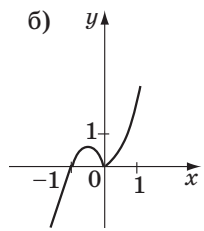
в)



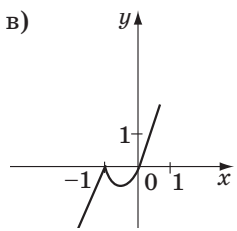
29. а)



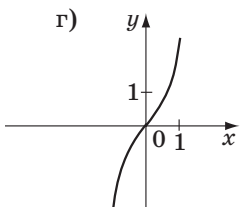
б)



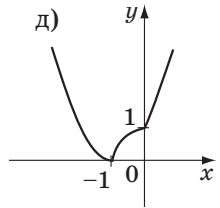
в)



г)



д)



**ЧАСТИНА 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ**

Тренувальні вправи

*Варіант 1*

2. а) 6; б)  $1\frac{8}{9}$ ; в)  $x \in \mathbf{R}$ ; г) 0;  $2\frac{5}{7}$ ; д)  $\emptyset$ ; е) -8; 2; є)  $\frac{-6 \pm \sqrt{6}}{3}$ ;  
 ж)  $\frac{1}{2}$ ; з)  $\frac{1}{2}$ ; 3.
3. а)  $-\frac{9}{11}$ ; б) 4; в) 4; г) -3; д) -0,8; е) -1,5.
4. а) 0; 4; б)  $-\frac{1}{2}$ ; в) -4; 6; г) 5; д)  $\frac{5}{7}$ ; 4; е) -8.
6. а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\emptyset$ ; в) 4; г)  $\emptyset$ .
7. а) -3; 1; 5; б) 1,5; 2,5; в) -3; г) -2.
8. а) 3; б) 2; в)  $\emptyset$ .
9. а) 0; б) 0; в) 1,5; г) 0.
10. а) -1; б) 4; в) 4; г) 9.
11. а) 2; б) 1; в) 1; г) 1.
15. а)  $[2; +\infty)$ ; б)  $(-4; +\infty)$ ; в)  $(-\infty; 10]$ ; г)  $[2; 3]$ ; д)  $(-8; 7]$ ;  
 е)  $(-1; 4]$ ; є)  $(2; 4]$ ; ж)  $(-2; -1] \cup [4; +\infty)$ ; з)  $[-2; 1] \cup (1; 3]$ .
16. а)  $[-4; 1,2]$ ; б)  $(-2; 1) \cup (5; +\infty)$ ; в)  $[-2,5; 1,5] \cup [6; +\infty)$ ;  
 г)  $(-\infty; -10) \cup$ ; д)  $[-3,5; 0,5] \cup [4; +\infty)$ ; е)  $(-\infty; -1,5] \cup \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right] \cup \left[1\frac{3}{4}; +\infty\right)$ .
17. а)  $(-2; 1)$ ; б)  $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$ ; в)  $(-2,5; 1,5]$ ; г)  $(-6; 3]$ ;  
 д)  $(-\infty; -4] \cup [-1; 6)$ ; е)  $(-3,2; -2,4] \cup [3; +\infty)$ .
18. а)  $[-5; -2] \cup [0; 5]$ ; б)  $(-\infty; 0) \cup (1; 3) \cup (6; +\infty)$ ; в)  $(-3; -2) \cup (2; 5)$ ;  
 г)  $(-\infty; -7] \cup (-4; 1] \cup (4; +\infty)$ .
19. а)  $(-\infty; -5] \cup [-2; 1] \cup [5; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; -2) \cup [-1; 1] \cup (5; +\infty)$ .
20. а)  $[-3; 1]$ ; б)  $(-6; -3) \cup (-3; 4)$ ; в)  $[-6; 4]$ ; г)  $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$ ;  
 д)  $(-\infty; -6] \cup \{-3\} \cup [4; +\infty)$ ; е)  $(1; 4) \cup (4; +\infty)$ ; є)  $(-\infty; 1] \cup \{4\}$ ;  
 ж)  $(-\infty; -7] \cup [-2; +\infty)$ .
21. а)  $[-3; -1] \cup [3; +\infty)$ ; б)  $\left(-5; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ ; в)  $[-3; -1] \cup (1; 4)$ ;  
 г)  $\left[\frac{2}{11}; 1,5\right)$ ; д)  $(-\infty; 2) \cup \{6\} \cup (10; +\infty)$ ;
- е)  $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(-1; \frac{\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$ .
22. а)  $\pm 3$ ; б) -1; 6; в)  $\pm 3$ ; г) -1; 3; д) -4; 0; е) -5,5;  $\pm 1,5$ ; -2,5.
23. а) 2;  $-3 + \sqrt{13}$ ; б) -3; -1; 6; в) 1; 5; г) 1; д)  $\frac{-13 \pm \sqrt{161}}{2}$ ;  
 е) -2,25; 2; 3,5.

24. а)  $[-4; 3]$ ; б) 0; в) -1; 3; г) 1.

25. а)  $\pm 0,5$ ; б)  $-1 - \sqrt{6}$ ;  $1 + \sqrt{2}$ ; в)  $-2 \pm \sqrt{14}$ ; г)  $-\sqrt{11}$ ; 3; д)  $\pm 2$ ; е) 4.

27. а)  $[-1; 0,2]$ ; б)  $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(5\frac{1}{3}; +\infty\right)$ ; в)  $(-1; 3)$ ;

г)  $\left(-\infty; 2 - \sqrt{2}\right] \cup \{2\} \cup [2 + \sqrt{2}; +\infty)$ .

28. а)  $[-1; 3]$ ; б)  $(-\infty; -1,5) \cup (3,5; +\infty)$ ; в)  $[0; 2]$ ; г)  $(-\infty; +\infty)$ .

29. а)  $(-2; 3)$ ; б)  $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$ ; в)  $(-\infty; 1]$ ; г)  $(-\infty; 3]$ .

30. а)  $[1; 7]$ ; б)  $(-\infty; -13) \cup (-3; 4)$ ; в)  $\{1\} \cup [2; +\infty)$ ; г)  $(-2; 3)$ .

31. а)  $[-3 - \sqrt{5}; -4) \cup (-2; 0]$ ; б)  $(-\infty; -1 - \sqrt{8}) \cup [-1; 1) \cup (3; +\infty)$ .

32.  $(-4; 1] \cup (4; +\infty)$ .

33. а)  $(-\infty; -8] \cup [-3; 3] \cup [8; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; 3)$ .

34. а)  $\left[\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; -3]$ ; в)  $[0; 1,6] \cup [2,5; +\infty)$ .

35. б) 7; 10,5.

36. а) 2; б) 2.

37. а) при  $a=0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 0$   $x = \frac{a-1}{a}$ ; б) при  $c=1$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $c \neq 1$   $x = c+1$ ; в) при  $b=0$   $x \in \emptyset$ ; при  $b \neq 0$   $x \in \mathbf{R}$ , при  $b \neq 0$ ,  $b \neq 3$   $x = \frac{b+3}{b}$ ; г) при  $a=-8$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq -8$   $x = \frac{(a+2)(a-8)}{a+8}$ ; д) при  $b=1$   $x \in \mathbf{R}$ ; при  $b \neq 1$   $x \in \emptyset$ ; при  $b \neq 1$ ,  $b \neq -1$   $x = \frac{b+5}{b+1}$ .

38. а)  $a < \frac{1}{16}$ ; б)  $(-\infty; 0) \cup (0; 4)$ ; в)  $(-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$ ;

г)  $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{15}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{15}}{2}; +\infty\right)$ .

39. а)  $-4a$ ;  $-a$ ; б)  $-6b$ ;  $b$ ; в)  $2a$ ;  $-4$ ; г)  $3b+2$ ;  $b-2$ ; д) при

$a=-4$   $x = -\frac{1}{4}$ ; при  $a \neq -4$   $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2a + 8}}{a+4}$ .

40. а) при  $a=4$ ,  $a=-3$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 4$ ,  $a \neq -3$   $x = a$ ; б) при  $a=2$ ,  $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$ ; при  $a \neq 2$   $x \in \emptyset$ ; в) при  $a=3$ ,  $a=5$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 3$ ,  $a \neq 5$   $x = \frac{3(1-a)}{a-5}$ .

41. а) при  $a=0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 0$   $x = \frac{3}{a}$   $x = -\frac{1}{a}$ ; б) при  $a < 0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a=0$   $x=2$ ; при  $a > 0$   $x=2+a$ ,  $x=2-a$ ; в) при  $a < 0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a=0$   $x=0$ ,  $x=3$ ; при  $a > 0$   $x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4a}}{2}$ ,  $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4a}}{2}$ .

42. -4,8.

43.  $a < 1$ .

44.  $m < 0$ ;  $x > -\frac{7}{4m}$ ;  $m = 0$   $x \in \emptyset$ ;  $m > 0$   $x < -\frac{7}{4m}$ .

45. а)  $a > \frac{1}{3}$ ; б)  $a > 1$ ; в)  $a > 1\frac{2}{3}$ .

48. а)  $(0; 0)$ ; б)  $(0; 6)$ ; в)  $(-3; 5)$ .

60. а)  $-14$ ; б)  $13$ ; в)  $1,75$ .

61.  $a = 1$ .

62. а)  $-1$ ; б)  $-10$ .

63.  $2\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$ .

64.  $2x + 1$ .

..... *Варіант 2* .....

4. а)  $-6$ ;  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $-3$ ; 2; г) 0; д)  $-1$ ; 11; е) 0.

7. а) 1; 8;  $-2$ ; б) 0,2; в) 2; г) 0.

9. а) 0; б) 0; в) 1; г) 1.

11. а) 1; б) 4; в) 6; г)  $-1$ .

21. а)  $[-3; -2] \cup [2; +\infty)$ ; б)  $\left(\frac{5-\sqrt{41}}{4}; \frac{5+\sqrt{41}}{4}\right) \cup (3; +\infty)$ ;

в)  $(-\infty; -4) \cup \{-2\} \cup (-1; 1] \cup [3; +\infty)$ ; г)  $\left(-1\frac{2}{3}; -1\frac{1}{8}\right]$ ;

д)  $\left(-2; \frac{1}{4}\right) \cup [1; 4]$ ; е)  $(-\infty; -\sqrt{7}] \cup (-2; \sqrt{7}] \cup \left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$ .

25. а)  $\pm 2$ ; б)  $-2 - \sqrt{41}$ ; 9; в)  $-3\frac{2}{3}$ ; 2; г)  $-\sqrt{14}$ ; 4; д)  $\frac{11 \pm \sqrt{101}}{2}$ ;  $\frac{-11 \pm \sqrt{101}}{2}$ ; е)  $\frac{4 - \sqrt{136}}{2}$ ; 4.

31. а)  $[-4; -2) \cup (4; 5]$ ; б)  $\left(-\infty; \frac{-5 - \sqrt{113}}{2}\right] \cup (-7; 3) \cup \left[\frac{5 + \sqrt{33}}{2}; +\infty\right)$ .

32.  $(-2; 0] \cup (2; +\infty)$ .

33. а)  $[-7; -1] \cup [1; 7]$ ; б)  $[-2; 0) \cup (1; 2]$ .

34. а)  $[4; 5) \cup (5; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; -4] \cup \{1\} \cup [4; +\infty)$ ; в)  $(0; +\infty)$ .

36. Вказівка: використайте теорему Вієта. а) 0; б)  $\emptyset$ .

39. а)  $b$ ;  $2b$ ; б)  $a$ ;  $2a$ ; в)  $-36$ ; 2; г)  $2a - 3$ ;  $a + 1$ ; д) при  $a \in (-\infty; -2] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$   $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{a^2 + a - 2}}{a - 2}$ ; при  $a \in (-2; 1)$   $x \in \emptyset$ ; при  $a = 2$   $x = 1, 25$ .

40. а) при  $a = 3$  і  $a = 1\frac{1}{3}$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 3$ ,  $a \neq 1\frac{1}{3}$ ,  $x = a - 1$ ;  
б) при  $a = 5$ ,  $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 5$   $x = 10 - a$ ; в) при  $a = -\frac{1}{4}$ ,  $a = -\frac{1}{3}$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq -\frac{1}{4}$ ,  $a \neq -\frac{1}{3}$   $x = \frac{2(1+6a)}{3a+1}$ .

41. а) при  $a=0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a \neq 0$   $x = -\frac{2}{a}$  или  $x = -\frac{4}{a}$ ; б) при  $a < 0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a = 0$   $x = -3$ ; при  $a > 0$   $x = a - 3$ ,  $x = -a - 3$ ; в) при  $a < 0$   $x \in \emptyset$ ; при  $a = 0$   $x = 0$ ,  $x = 2$ ; при  $a > 0$   $x = 1 \pm \sqrt{1+a}$ ,  $x = 1 \pm \sqrt{1-a}$ .

42. 30.

43.  $a > 2$ .

44. при  $m < 0$   $x > \frac{3}{2m}$ ;  $m = 0$   $x \in \mathbf{R}$ ;  $m > 0$   $x < \frac{3}{2m}$ .

45. а)  $a > 4$ ; б)  $a > 4$ ; в)  $a > 6$ .

46.  $a < -16$ .

63.  $14x + 15$ .

64.  $-\frac{5}{3}x - \frac{20}{3}$ .

## ТЕМА 2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

### Тренувальні вправи

#### Варіант 1

1. а) 5; б) 0,6; в) 12; г) 3; д) 0,1; е) -4.

2. а) 5; б)  $\frac{4}{7}$ ; в)  $\frac{1}{3}$ ; г)  $1\frac{1}{4}$ ; д)  $-\frac{1}{2}$ ; е)  $\frac{4}{3}$ .

3. а) 12; б) 6,3; в) 1; г) -1; д) 19; е) 6.

4. а)  $[-4; +\infty)$ ; б)  $(-\infty; 1,5]$ ; в)  $x \in \mathbf{R}$ ; г)  $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ ; д)  $(2,5; +\infty)$ ; е)  $[-1; 0) \cup (0; +\infty)$ .

5. а)  $(-\infty; 3] \cup [8; +\infty)$ ; б)  $[-1; 5]$ ; в)  $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; -6] \cup [3; 5) \cup (5; +\infty)$ ; д)  $(-\infty; -5] \cup [5; 9)$ ;

е)  $(-\infty; -1) \cup (-1; 2] \cup [7; +\infty)$ .

6. а)  $\pm 3$ ; б)  $\pm 2$ ; в)  $\pm \sqrt{3}$ ; г)  $\emptyset$ ; д) 3; е) -2.

7. а) 4; б)  $-\frac{1}{2}$ ;  $1\frac{1}{2}$ ; в)  $\emptyset$ ; г)  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ ; д)  $\pm 2$ ; е) -1; 2;

е)  $\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ; ж)  $\emptyset$ ; з) -1;  $\sqrt[3]{3}$ .

8. а) 2 і 3; б) 1 і 2; в) -1 і 0; г) 0 і 1; д) таких немає; е) -2; -1.

9. а)  $2 \leq \sqrt{x} \leq 6$ ; б)  $0,4 < \sqrt{x} < 1,2$ ; в)  $1,3 < \sqrt{x} \leq 2\frac{1}{6}$ .

10. а)  $2 < \sqrt[3]{x} < 4$ ; б)  $-1 \leq \sqrt[3]{x} \leq 3$ ; в)  $1\frac{1}{3} \leq \sqrt[3]{x} < 5$ .

11. а)  $9 < x < 25$ ; б)  $-\frac{1}{8} \leq x \leq 1$ ; в)  $\frac{1}{16} \leq x \leq \frac{625}{81}$ .

12. а) 60; б) 0,2; в) -15; г)  $\frac{7}{12}$ ; д)  $-\frac{4}{5}$ ; е) 1,5.

13. а) 15; б) 240; в) 1,8; г) 10; д) -15; е) 1; е) 84.



14. а) 75; б) 0,9; в) -28; г) 50; д)  $\frac{2}{25}$ ; е) 3,6; є) 240.

15. а) 2; б) 5; в) 21; г) -3; д)  $5\frac{1}{16}$ ; е) 2.

16. а) 2; б)  $1\frac{1}{4}$ ; в)  $-\frac{3}{8}$ .

17. а)  $|x|$ ; б)  $b$ ; в)  $b$ ; г)  $-ab^2$ ; д)  $2b^2$ ; е)  $-4ax^4c^3$ ; є)  $-\frac{6m}{n^2}$ ;

ж)  $-\frac{7}{b^2a}$ ; з)  $\frac{4n}{m^2}$ .

18. а)  $|x-1|$ ; б)  $a+3$ ; в)  $4-b$ ; г)  $2-2x$ ; д) 5; е) 7.

19. а)  $\sqrt{2}-1$ ; б) 5; в) -3; г) 5; д)  $1+\sqrt{3}$ . Вказівка: виділіть повний квадрат суми; е)  $\sqrt{3}-1$ . Вказівка: два рази поспіль виділіть повний квадрат.

20. а)  $3\sqrt{2}$ ; б)  $2\sqrt[3]{3}$ ; в)  $-3\sqrt[3]{2}$ ; г)  $2\sqrt[4]{3}$ ; д)  $5\sqrt[3]{2}$ ; е)  $30\sqrt[3]{36}$ ; є)  $12\sqrt[4]{27}$ ; ж)  $-90\sqrt[3]{30}$ ; з)  $-15\sqrt[3]{5}$ .

21. а)  $5a^2\sqrt{2}$ ; б)  $-3\sqrt[3]{c}$ ; в)  $x^4|y|\sqrt[4]{7x^2}$ ; г)  $2m^2k^3\sqrt[3]{6mk^2}$ ; д)  $-\frac{\sqrt{2}}{3a}$ ; е)  $-\frac{36}{b^3x^2}\sqrt[4]{\frac{2b^2}{n^2}}$ .

22. а)  $-2m^2k^4\sqrt[3]{4mk}$ ; б)  $-5c^2n^3\sqrt{6c}$ ; в)  $\frac{ab}{2}\sqrt[4]{\frac{a^3b^2}{2}}$ ; г)  $-m^3\sqrt[4]{\frac{4m}{n^2}}$ ; д)  $-\frac{x^2}{z}\sqrt[6]{\frac{100xz^2}{y^3}}$ ; є)  $\frac{1}{a}\sqrt[4]{-\frac{(b+2)^2}{a}}$ .

23. а)  $\sqrt{24}$ ; б)  $\sqrt[3]{24}$ ; в)  $\sqrt[3]{2}$ ; г)  $\sqrt[5]{-3}$ ; д)  $\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$ ; е)  $\sqrt[4]{\frac{7}{9}}$ .

24. а)  $\sqrt{8a^2}$ ; б)  $-\sqrt{8a^2}$ ; в)  $\sqrt[4]{x^5}$ ; г)  $-\sqrt[4]{-16x^5}$ ; д)  $\sqrt[3]{0,12y^5}$ ; є)  $\sqrt[5]{\frac{3}{16}a^{13}b}$ .

25. а)  $\sqrt[4]{2(a-1)}$ ; б)  $\pm\sqrt[4]{2(a-1)^2}$ ; в)  $-\sqrt[4]{2(1-a)^3}$ ; г)  $\sqrt[4]{3(b+2)^6}$ ; д)  $-\sqrt[4]{3(b+2)^2}$ ; є)  $\sqrt[4]{\frac{3(b+2)^3}{b-3}}$ ; є)  $\pm\sqrt[6]{(c-2)^2}$ .

26. а)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ; б)  $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ; в)  $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ; г)  $\frac{4\sqrt[3]{25}}{5}$ ; д)  $\frac{4\sqrt[3]{5}}{5}$ ; е)  $14\sqrt{2}$ .

27. а)  $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ ; б)  $\frac{2}{3\sqrt{10}}$ ; в)  $\frac{4}{3\sqrt{5}}$ ; г)  $\frac{2}{5\sqrt[3]{4}}$ ; д)  $\frac{3}{2\sqrt[3]{3}}$ ; е)  $\frac{2}{3\sqrt[5]{14^4}}$ .

28. а)  $\sqrt{2}+1$ ; б)  $4(3-\sqrt{5})$ ; в)  $\frac{3(4\sqrt{3}+\sqrt{13})}{7}$ ; г)  $\frac{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}+1}{6}$ ; д)  $2(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$ ; е)  $2(\sqrt[3]{2}+1)$ .

29.  $\frac{\sqrt{31}-\sqrt{3}}{4}$ . Вказівка: звільніться від ірраціональності в знаменнику кожного дробу.

30. а)  $\sqrt[6]{2}$ ; б)  $\sqrt[12]{5}$ ; в)  $\sqrt[4]{a}$ ; г)  $\sqrt[15]{b^8}$ ; д)  $\sqrt[12]{y^5}$ ; е)  $\sqrt[10]{x^7}$ .

31. а)  $\sqrt{a}$ ; б)  $\sqrt{3}$ ; в)  $\sqrt[3]{y^2}$ ; г)  $\sqrt[3]{c^5 d^7}$ ; д)  $\sqrt[4]{m}$ ; е)  $\sqrt[5]{x^3}$ .

32. а) 1; б) 1; в)  $\sqrt[3]{3}$ ; г) -1.

33. а)  $\sqrt{a} + 1$ ; б)  $\frac{1}{x - \sqrt{3}}$ ; в)  $\frac{\sqrt{b} - \sqrt{2}}{\sqrt{b} + \sqrt{2}}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}$ ; д)  $\frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y}}$ ;  
е)  $\sqrt[6]{b} - 1$ .

34. а)  $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ ; б)  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}}$ ; в)  $\frac{1}{\sqrt[3]{4 - \sqrt[3]{a^2}}}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}}$ ;

д)  $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})$ ; е)  $\frac{\sqrt[3]{a} - 4}{\sqrt[3]{a^2} - 4\sqrt[3]{a} + 16}$ .

35. а)  $2\sqrt[4]{mn}$ ; б)  $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ ; в)  $-2\sqrt{a}$ ; г)  $9\sqrt{x}$ ; д)  $\frac{4\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ ; е) 2;

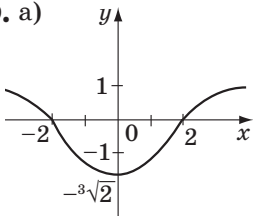
е)  $\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a + \sqrt{ab}$ ; ж)  $-\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}}$ .

36. Вказівка: побудуйте графіки функцій: а)  $y = |x| + 1$ ;

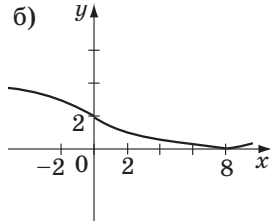
б)  $y = x + 2$  при  $x \geq -2$ ; в)  $y = |x + 2|$ ; г)  $y = x + 3$  при  $x \neq 1$ ;

д)  $y = \begin{cases} 1, & x > 3, \\ -1, & x < 3; \end{cases}$  е)  $y = x - 2 + |x - 2| = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 2x - 4, & x \geq 2. \end{cases}$

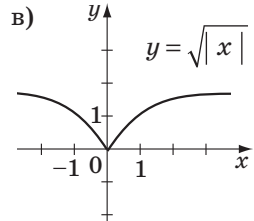
39. а)



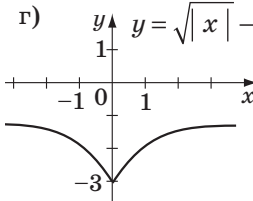
б)



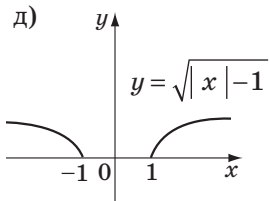
в)



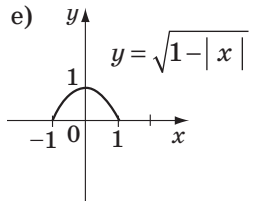
г)



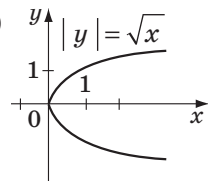
д)



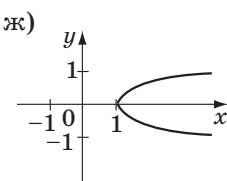
е)



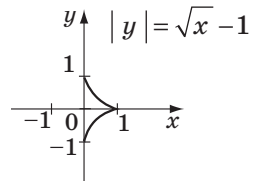
е)



ж)



з)



41. а) 16; б)  $\emptyset$ ; в) 5; г) -21; д)  $\pm 5$ ; е)  $\emptyset$ ; е) 2; -1,4.

42. а) 3; б)  $\emptyset$ ; в) -4; г) 0,5; д)  $\emptyset$ ; е) -8; ж) 7; з) -3; и) 2.

43. а) 8; б) 1; в)  $\emptyset$ ; г) -2; д) 1; е) 5; ж) -1.

45. а) 4; б) -5; в) 0,4; г)  $5\frac{21}{25}$ ; д) 5; е) 2; ж) 34; з)  $\pm\sqrt{2}$ .

46. а) 5; б) 3; в) 1; г) 5; д) 1; е) 13; ж) 3.

47. а) 1; б)  $\frac{1}{64}$ ; в) 0; г) 0; д)  $2\sqrt[3]{2}$ ; е) 79; ж) 63.

48. а) 0; б) 1; в) 0; г) -5; д) -3; е) 6; ж)  $7\frac{2}{7}$ .

49. а) 1; б) 6; в) 3; г) 0; д) 16; е) 81; ж)  $\pm 2$ ; з) -1,5; и)  $\frac{1}{3}$ ; к)  $-\frac{2}{5}$ .

50. а)  $(26; +\infty)$ ; б)  $[1; 26]$ ; в)  $[1; +\infty)$ ; г)  $\emptyset$ ; д)  $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ ;

е)  $(-\sqrt{5}; -1] \cup [1; \sqrt{5})$ ; ж)  $[3; +\infty)$ ; з)  $(-\infty; 2) \cup (3,5; +\infty)$ ; и)  $[2; 3,5]$ .

51. а)  $(-\infty; -2)$ ; б)  $(-\infty; -3) \cup [0; \frac{1}{5})$ ; в)  $[-1; 0) \cup (3; +\infty)$ ;

г)  $[-18; -2]$ ; д)  $(-2; +\infty)$ ; е)  $(6; +\infty)$ ; ж)  $[-\frac{1}{4}; 6]$ ; з)  $[5; 6) \cup (9; 10]$ .

52. а)  $[-18; -2]$ ; б)  $(-2; +\infty)$ .

53. а)  $[-3; 2]$ ; б)  $[-5,5; 2,5]$ ; в)  $\emptyset$ ; г)  $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$ ;

д)  $[-2; -\frac{2}{3}) \cup (\frac{4}{3}; \frac{8}{3}]$ .

54. а)  $(-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$ ; б)  $(2; 18]$ ; в)  $(1,5; 3]$ .

55. а)  $(4; 9)$ ; б)  $(9; 4)$ ; в)  $(25; 64)$ ; г)  $(16; 4)$ ; д)  $(2; 2)$ ; е)  $(8; 2)$ ;

ж)  $(2; 8)$ ; з)  $(0; 0)$ ; и)  $(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4})$ ; к)  $(-\frac{1}{4}; \frac{5}{4})$ ; л)  $(-2; 1)$ ; м)  $(1; -2)$ ; н)  $(8; 27)$ ;

о)  $(27; 8)$ ; п)  $(9; 4)$ ; р)  $(6,5; 2,5)$ .

56. а)  $\sqrt{3}$ ; б)  $\sqrt[5]{7}$ ; в)  $\sqrt[3]{4}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$ ; д)  $\sqrt{y}$ ; е)  $\frac{1}{\sqrt[4]{c}}$ ; ж)  $\sqrt[4]{b^5}$ ;

з)  $\sqrt[3]{a^8}$ ; и)  $\frac{1}{\sqrt[5]{m^6}}$ .

57. а)  $\sqrt[3]{2a}$ ; б)  $2\sqrt[3]{a}$ ; в)  $a\sqrt[5]{b^3}$ ; г)  $\frac{a}{\sqrt[4]{b^3}}$ ; д)  $-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ; е)  $\sqrt[3]{(x-y)^2}$ ;

ж)  $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{y^2}$ ; з)  $\frac{7}{\sqrt[4]{(a+b)^3}}$ ; и)  $7\sqrt[4]{a^3} + \frac{4}{\sqrt[4]{b^3}}$ .

58. а)  $5^{\frac{1}{2}}$ ; б)  $(1,2)^{\frac{2}{3}}$ ; в)  $3^{-\frac{2}{3}}$ ; г)  $(3x)^{\frac{1}{4}}$ ; д)  $a^{\frac{1}{2}}$ ; е)  $b^{-\frac{3}{5}}$ ;

ж)  $(5a^2b^3)^{\frac{1}{4}}$ ; з)  $(x-y)^{\frac{2}{5}}$ ; и)  $(x^2-y^2)^{\frac{1}{5}}$ .

59. а) 7; б) 5; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{1}{2}$ ; д) 243; е)  $15\frac{5}{8}$ ; ж) 625; з)  $\frac{81}{16}$ .

60. а)  $[0; +\infty)$ ; б)  $(0; +\infty)$ ; в)  $[3; +\infty)$ ; г)  $[-5; +\infty)$ ;

д)  $(-\infty; -2] \cup [4; +\infty)$ ; е)  $(-2; 3)$ .

63. а)  $x^{\frac{5}{6}}$ ; б)  $a^{\frac{5}{12}}$ ; в)  $m^{-3,5}$ ; г)  $b^{-1}$ ; д)  $y^{\frac{1}{2}}$ ; е)  $b^{0,5}$ ; є)  $a^{\frac{1}{20}}$ ; ж)  $c^{-\frac{2}{5}}$ ; з)  $p^{1,5}$ .

64. а)  $a$ ; б)  $1$ ; в)  $m^{0,2}$ ; г)  $y^{\frac{7}{3}}$ ; д)  $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{7}{6}}$ ; е)  $a$ ; є)  $x^5$ ; ж)  $\frac{x}{y}$ .

65. а)  $1$ ; б)  $2$ ; в)  $12$ ; г)  $\frac{1}{2}$ ; д)  $1,5$ ; е)  $6,25$ .

66. а)  $xy^{\frac{1}{2}} - x^2y$ ; б)  $x + 3x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 9$ ; в)  $m - 1$ ; г)  $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}$ ; д)  $1 + c$ ; е)  $-2b^{\frac{1}{4}}c^{\frac{1}{4}}$ ; є)  $y^{\frac{4}{3}} + 9y^{\frac{2}{5}}$ ; ж)  $x - 1$ ; з)  $m^{\frac{2}{5}} - k^{\frac{2}{5}}$ ; и)  $a^{\frac{3}{2}} - b$ .

67. а)  $\frac{4}{1 - \sqrt{3}}$ ; б)  $\frac{1 - 2^{\frac{3}{4}}}{5}$ ; в)  $\frac{x^{\frac{1}{4}} - 1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ; г)  $a^{0,5} - 3x^{0,5}$ ; д)  $x^{0,5} + 3$ ;

е)  $b^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ ; є)  $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right)$ ; ж)  $\frac{x^{0,5}}{5}$ ; з)  $\frac{3}{x^2 - 3}$ .

68. а)  $\frac{a+1}{a}$ ; б)  $\frac{2a^2}{1-a}$ ; в)  $d - 1$ ; г)  $1$ .

69. 1.

..... *Вариант 2* .....

5. а)  $(-\infty; -7] \cup [3; +\infty)$ ; б)  $[-3; 6]$ ; в)  $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; -3) \cup (-3; -2] \cup [9; +\infty)$ ; д)  $(-\infty; -4] \cup [4; 5)$ ; е)  $[-3; -1) \cup (-1; 8]$ .

18. а)  $|a + 3|$ ; б)  $x - 5$ ; в)  $-y - 2$ ; г)  $-2a + 6$ ; д)  $2$ ; е)  $4$ .

19. а)  $3 - \sqrt{2}$ ; б)  $3$ ; в)  $-2$ ; г)  $4$ ; д)  $\sqrt{2} + 1$ . Вказівка: виділіть повний квадрат; е)  $\sqrt{2} + 1$ . Вказівка: два рази поспіль виділіть повний квадрат.

22. а)  $3m^2n^3\sqrt[3]{2m^2n}$ ; б)  $-5ac^4\sqrt{2a^2}$ ; в)  $-2xy\sqrt[6]{2xy^2}$ ; г)  $-c^3d\sqrt[4]{c^3d^2}$ ; д)  $\frac{n^3x^4}{12}\sqrt[4]{\frac{2m^3x^2}{n}}$ ; є)  $x^3\sqrt[6]{-x^3(z-1)^2}$ .

25. а)  $\sqrt[4]{3(c-2)^3}$ ; б)  $-\sqrt[4]{3(2-c)^3}$ ; в)  $\pm\sqrt[4]{3(c-2)^2}$ ; г)  $-\sqrt[4]{5(x+3)^2}$ ;

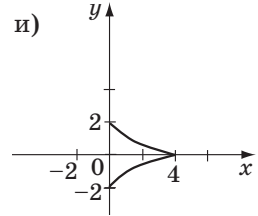
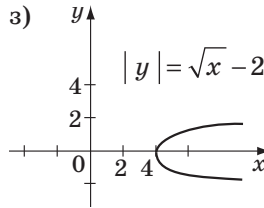
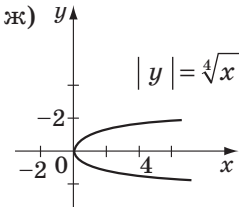
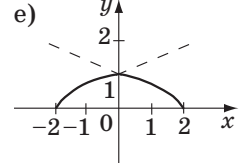
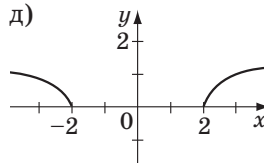
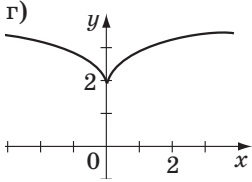
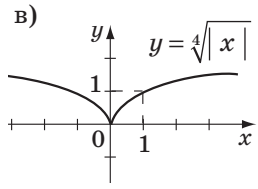
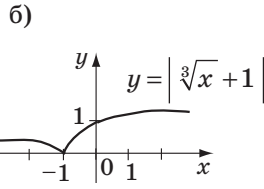
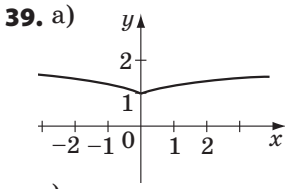
д)  $|x + 3|\sqrt[4]{5(x+3)^2} = \pm\sqrt[4]{5(x+3)^6}$ ; е)  $\sqrt[4]{\frac{5(x+3)^3}{x-1}}$ ; є)  $\pm\sqrt[6]{(a-1)^4}$ .

29.  $\frac{\sqrt{38} - \sqrt{2}}{3}$ . Вказівка: звільніться від ірраціональності в знаменнику кожного дробу.

32. а)  $1$ ; б)  $2$ ; в)  $\sqrt[3]{2}$ ; г)  $1$ .

35. а)  $-2\sqrt[4]{bc}$ ; б)  $\frac{x+y}{x-y}$ ; в)  $2\sqrt{b}$ ; г)  $\sqrt{a}$ ; д)  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$ ; е)  $-2$ ;

є)  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}$ ; ж)  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b(\sqrt{a} + \sqrt{b})}}$ .



45. а)  $-10$ ; б)  $6$ ; в)  $0,5$ ; г)  $11,25$ ; д)  $10 + 2\sqrt{6}$ ; е)  $4$ ; ж)  $20$ ; з)  $-1$ ; 1.  
 46. а)  $6$ ; б)  $-1$ ; в)  $4$ ; г)  $1$ ; д)  $7$ ; е)  $6$ ; ж)  $1$ .  
 48. а)  $-1$ ; б)  $-2$ ; в)  $25$ ; г)  $-1$ ; д)  $5$ ; е)  $-4$ ; ж)  $4$ ; з)  $\frac{1}{9}$ .  
 49. а)  $2$ ; б)  $7$ ; в)  $1$ ; г)  $1$ ; д)  $1$ ; е)  $-79$ ; ж)  $21$ ; з)  $-21$ ; 1)  $-5$ ; 2)  $-6$ ; 3)  $-5,5$ .  
 54. а)  $(-\infty; 1 - \sqrt{17}) \cup (1 + \sqrt{17}; +\infty)$ ; б)  $(-3; 13]$ ; в)  $(0; \frac{1}{11}]$ .  
 68. а)  $b^{\frac{1}{2}} - 1$ ; б)  $\frac{1}{b-1}$ ; в)  $\frac{1-b}{b}$ ; г)  $\frac{2}{b^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{b^2} + 4)}$ .  
 69. 1.

### ТЕМА 3. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

Тренувальні вправи .....

Варіант 1 .....

1. а)  $\frac{\pi}{6}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}$ ; в)  $\frac{2\pi}{3}$ ; г)  $\pi$ ; д)  $\frac{5\pi}{4}$ ; е)  $\frac{3\pi}{2}$ ; ж)  $\frac{5\pi}{3}$ ; з)  $\frac{11\pi}{6}$ ; 1)  $2\pi$ .

2. а)  $\frac{\pi}{9}$ ; б)  $\frac{20\pi}{9}$ ; в)  $\frac{8\pi}{3}$ ; г)  $\frac{20\pi}{3}$ ; д)  $\frac{80\pi}{9}$ ; е)  $20\pi$ .

3. а)  $5^\circ$ ; б)  $15^\circ$ ; в)  $22,5^\circ$ ; г)  $7,2^\circ$ ; д)  $120^\circ$ ; е)  $140^\circ$ ; ж)  $600^\circ$ ; з)  $129,6^\circ$ .

4. а)  $> 0$ ; б)  $< 0$ ; в)  $> 0$ ; г)  $> 0$ ; д)  $< 0$ ; е)  $< 0$ ; ж)  $> 0$ .

5. а)  $< 0$ ; б)  $< 0$ ; в)  $< 0$ ; г)  $> 0$ ; д)  $< 0$ ; е)  $< 0$ ; ж)  $> 0$ .

6. а) 0; б)  $-\frac{7}{4}$ ; в) -2; г)  $-\frac{3}{2}$ ; д)  $1-\sqrt{2}$ ; е) 0.

7. а)  $900^\circ$ ; б)  $96^\circ$ ; в)  $36^\circ$ ; г)  $48^\circ$ ; д)  $\frac{4\pi}{15}$ ; е)  $\frac{\pi}{3}$ ; ж)  $\frac{2\pi}{5}$ ; з)  $\frac{7\pi}{12}$ .

8. а) 5; б) -1; в) 0.

9. а)  $> 0$ ; б)  $> 0$ ; в)  $> 0$ ; г)  $> 0$ ; д)  $< 0$ ; е)  $< 0$ ; ж)  $> 0$ .

10. а)  $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ;  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ ;  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$ ; б)  $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ;  $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ ;

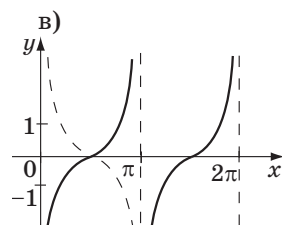
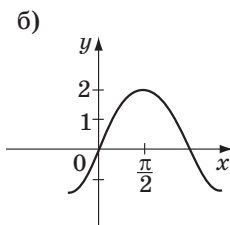
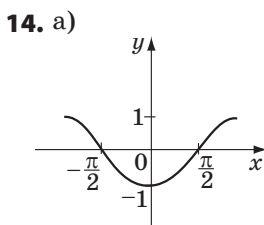
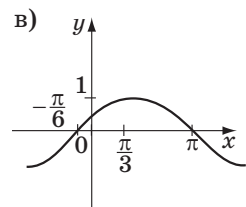
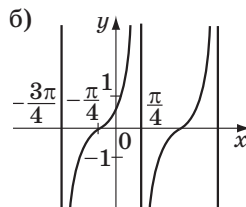
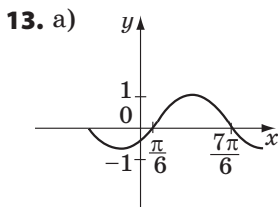
$\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$ ; в)  $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ ;  $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ ;  $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{12}{5}$ ; г)  $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ ;

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ;  $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ; д)  $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$ ;  $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ ;  $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

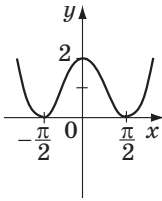
е)  $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$ ;  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}$ ;  $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}$ .

11. а)  $\pi$ ; б)  $2\pi$ ; в)  $5\pi$ ; г)  $\frac{\pi}{2}$ ; д)  $2\pi$ ; е)  $2\pi$ ; ж)  $24\pi$ .

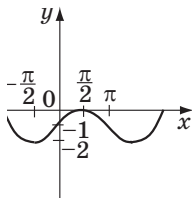
12. а)  $-\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; д)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; е)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .



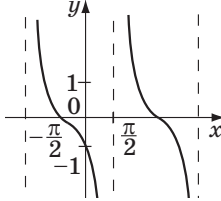
15. а)



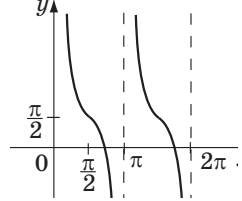
б)



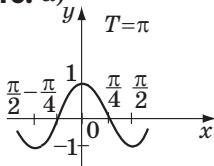
в)



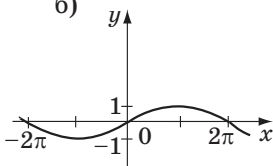
г)



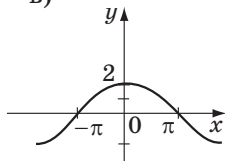
16. а)



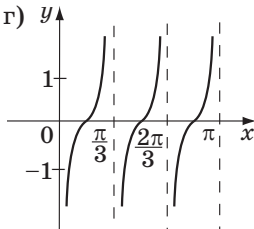
б)



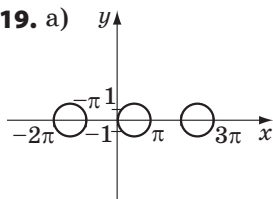
в)



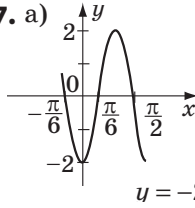
г)



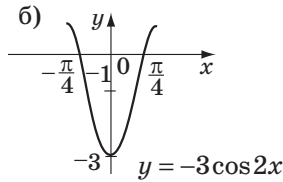
19. а)



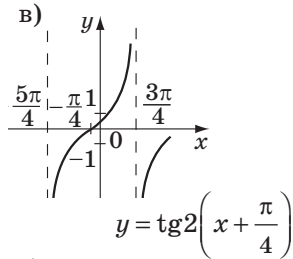
17. а)



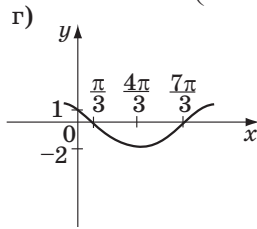
б)



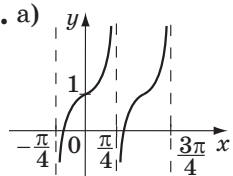
в)



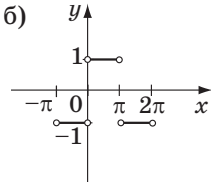
г)



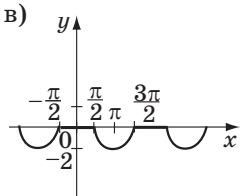
18. а)



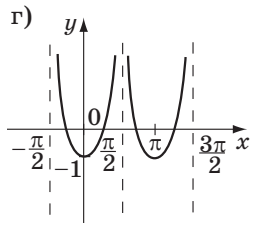
б)



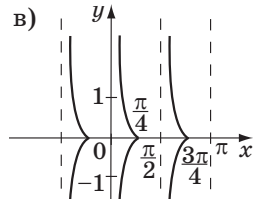
в)



г)



в)

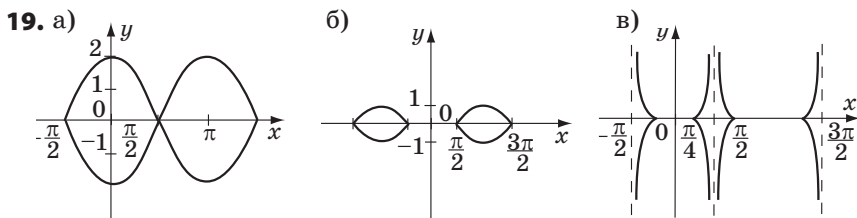
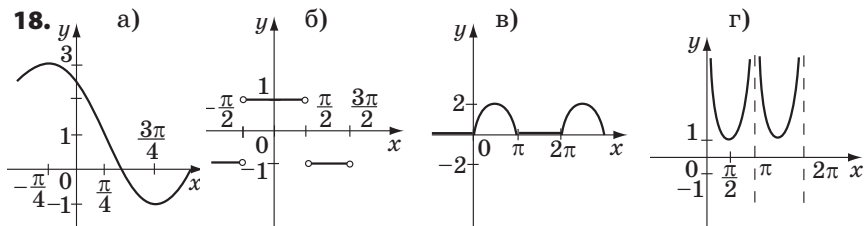
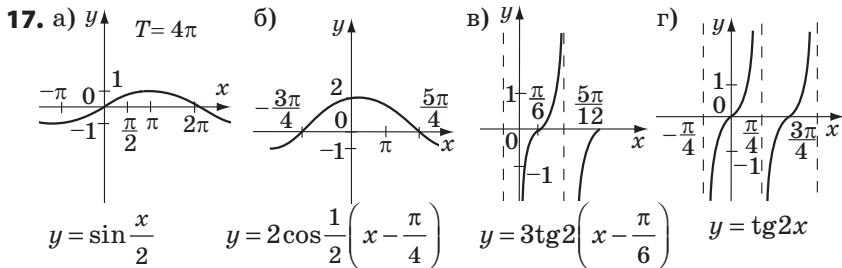


20. а)  $\sin^2 \alpha$ ; б)  $-\cos^2 \alpha$ ; в)  $\sin \alpha$ ; г)  $-1$ ; д)  $2\cos^2 \alpha$ ; е)  $0$ .
21. а)  $\cos^2 \alpha$ ; б)  $0$ ; в)  $2$ ; г)  $1 - \sin \alpha$ ; д)  $2$ .
22. а)  $0$ ; б)  $1$ ; в)  $1$ ; г)  $2\sin^2 \alpha$ ; д)  $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ .
23. а)  $\operatorname{tg}^6 \alpha$ ; б)  $4$ ; в)  $1$ .
25. а)  $3\frac{4}{7}$ ; б)  $\frac{8}{17}$ ; в)  $\frac{12}{25}$ .
26. а)  $6$ ; б)  $110$ .
27. а)  $1$ ; б)  $0$ ; в)  $-1$ ; г)  $\sin \alpha$ ; д)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ .
28. а)  $-\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ; б)  $0$ .
29. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; г)  $1$ ; д)  $1$ ; е)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .
30. а)  $\frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ; г)  $\frac{1}{2}$ ; д)  $1$ .
31. а)  $\sin \alpha$ ; б)  $\cos 2\alpha$ ; в)  $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ ; г)  $\cos \alpha - \sin \alpha$ ; д)  $-\frac{\sin 4\alpha}{4}$ .
32. а)  $\frac{1}{4}$ ; б)  $1$ ; в)  $1$ ; г)  $\frac{1}{4}$ ; д)  $\frac{1}{8}$ .
34. а)  $4\sin 6\alpha \cos\left(\frac{3\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ ; б)  $4\cos\frac{3\alpha}{2} \cos \alpha \cos\frac{\alpha}{2}$ ;  
в)  $\operatorname{ctg} 6\alpha$ .
36. а)  $\cos 3\alpha \cos \alpha$ ; б)  $1$ ; в)  $1$ ; г)  $1$ .
37. а)  $1$ ; б)  $1$ ; в)  $0$ ; г)  $-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ ; д)  $1$ .
38. а)  $1$ ; б)  $4\cos^2 \alpha - 3$ .
40. а)  $4\cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ ; б)  $\frac{2\sqrt{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha}$ ;
- в)  $2\sqrt{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ; г)  $4\sin 2\alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$ .
41. а)  $2\operatorname{tg} 2\alpha$ ; б)  $1$ ; в)  $2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ ; г)  $\frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{2}$ ;
- д)  $\frac{2}{\sin 4\alpha}(1 + \sin 4\alpha) = \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right)}{\sin 4\alpha}$ .
43. а)  $-\operatorname{tg}^4 \alpha$ ; б)  $\frac{\sin^2 2\alpha}{4}$ ; в)  $\operatorname{tg} 5\alpha$ ; г)  $-\frac{2}{3}$ .
44. а)  $-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ; б)  $-2\operatorname{tg} \alpha$ .



45. а)  $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ ; б)  $\frac{\sqrt{2}(-\sqrt{3}+1)}{4}$ ; в)  $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ ; г)  $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ ;  
 д)  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{16}$ .

Варіант 2



40. а)  $2 \sin 15^\circ \cos(2x - 45^\circ)$ ; б)  $2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2} \right) \cdot \cos \frac{x}{2}$ . Вказівка:

використайте формулу  $\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ; в)  $-\cos 10^\circ$ ;

г)  $\frac{2\sqrt{2} \cos^2 \frac{x}{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos x}$ .

43. а)  $\frac{\cos 2\alpha}{4} (4 - \sin^2 2\alpha)$ ; б)  $\frac{\sin 24\alpha}{8 \sin 3\alpha}$ ; в)  $\frac{1}{4} \sin 3\alpha$ ; г)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ .

44. а)  $\sin \frac{\alpha}{4}$ ; б) 2.

# ТЕМА 4. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ. ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

## ☑ Тренувальні вправи

### Варіант 1

1. а)  $[0; 2]$ ; б)  $[-2; 2]$ ; в)  $(-\infty; +\infty)$ ; г)  $(-\infty; +\infty)$ .

2. а)  $[-1; 1]$ ; б)  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ; в)  $[-1; 1]$ ; г)  $[0; \pi]$ .

3. а)  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ; б)  $(0; \pi)$ ; в)  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ; г)  $[0; 2]$ .

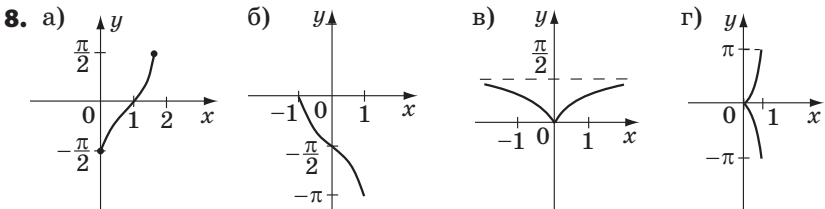
4. а)  $-\arcsin \alpha$ ; б)  $\pi - \arccos \alpha$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ ; г)  $\frac{\pi}{2}$ ; д)  $\sqrt{1-x^2}$ ,

$x \in [-1; 1]$ ; е)  $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .

5. а)  $-\frac{\pi}{6}$ ; б)  $-\frac{\pi}{4}$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ ; г)  $0$ ; д)  $\frac{5\pi}{12}$ ; е)  $-\frac{\pi^2}{12}$ .

6. а)  $-\frac{\pi}{6}$ ; б)  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в)  $\frac{1}{2}$ ; г)  $0$ .

7. а)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\frac{24}{25}$ ; в)  $\frac{77}{85}$ ; г)  $\frac{12}{5}$ ; д)  $-\frac{5}{12}$ ; е)  $\frac{3}{\sqrt{13}}$ .



9. а)  $\frac{3}{7}$ ; б)  $\frac{\pi}{6}$ ; в)  $2\pi - 5$ ; г)  $\arcsin \frac{\pi}{6}$ .

10. б); в).

11. а)  $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{2} + \pi m$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ; е)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

12. а)  $\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{3} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{4} + \pi m$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{2\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; е)  $-\frac{\pi}{4}$ .

13. а)  $\frac{3\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\pm \frac{9\pi}{4} + 6\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{5\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; д)  $(-1)^k \frac{\pi}{15} + \frac{\pi k}{5}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

14. а)  $\frac{\pi}{12}$ ;  $\frac{11\pi}{12}$ ; б) розв'язків немає; в) 0; г)  $\frac{\pi}{3}$ ; д)  $\frac{2\pi}{3}$ ;  $\frac{5\pi}{3}$ ; е) 0;  $\frac{\pi}{2}$ .

15. а)  $\pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\arctg 5 + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{\pi}{4} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; д) розв'язків немає; е) розв'язків немає.

16. а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $(-1)^n \arcsin \frac{1}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\arctg 2 + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; д) розв'язків немає; е) розв'язків немає; е)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; ж)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

17. а)  $\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{2\pi l}{5}$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $\pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi l}{3}$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

18. а)  $2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в) вказівка:  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ . Відповідь:  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г) розв'язків немає; д)  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ .

19. а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\arctg \frac{2}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\frac{1}{5} \arctg \frac{2}{5} + \frac{\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $-\arctg 3 + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $-\arctg 7 + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; е)  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

20. а)  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Вказівка:  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = \frac{2}{2}$ ;  
 $\cos \frac{\pi}{6} \sin x - \sin \frac{\pi}{6} \cos x = 1$ ;  $\sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$ ;  $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ;  
 $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{12} + (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; в) вказівка:  
 $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \cos x$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x = \cos x$ ;  
 $\sin \frac{\pi}{3} \sin 2x - \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x = \cos x$ ;  $\cos x + \cos \left( \frac{\pi}{3} + 2x \right) = 0$ ;  
 $2 \cos \frac{3x + \frac{\pi}{3}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{3} + x}{2} = 0$ ;  $\frac{3x + \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

$$\frac{\frac{\pi}{3} + x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad \text{Відповідь: } \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z};$$

г)  $2\arctg 3 + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{7}, \quad k \in \mathbf{Z}$ . Вказівка:

перегрупуйте члени рівняння:  $\sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x$ ;

розділіть на 2 і введіть допоміжний аргумент;

$$\cancel{2} \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \cancel{2} \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right); \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(7x - \frac{\pi}{12}\right) = 0;$$

е)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ .

**21.** а)  $\frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi n}{2}, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, \quad n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}$ ;

г)  $\frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ . Вказівка: запишіть,

використовуючи формули зведення:  $\sin 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ ;

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \cos x; \quad \frac{\pi}{2} - 3x = \pm x + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ . Тоді або

$\frac{\pi}{2} - 4x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ , або  $\frac{\pi}{2} - 2x = 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\frac{\pi l}{3}, \quad l \in \mathbf{Z}$ ;

ж)  $\pi k, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbf{Z}$ ; з)  $\frac{5\pi}{48} + \frac{\pi l}{4}, \quad \frac{7\pi}{24} - \frac{\pi l}{2}, \quad l \in \mathbf{Z}$ . Вказівка:

$2 - \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x = 2(1 + \cos 6x); \quad \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x = 2 \cos 6x$ ; 2;

$\frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \cos 6x; \quad -\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 6x$ ; тому

що  $\cos 6x = -\cos(\pi - 6x)$ , то  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - 6x)$ . Тоді

$2x + \frac{\pi}{6} = \pm(\pi - 6x) + 2\pi l$ . Якщо права частина зі знаком «+», то

$2x + \frac{\pi}{6} = \pi - 6x + 2\pi l$  і  $8x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{5\pi}{48} + \frac{\pi l}{4}, \quad l \in \mathbf{Z}$ .

Якщо права частина зі знаком «-», то  $2x + \frac{\pi}{6} = -\pi + 6x + 2\pi l$ ;

$4x = \frac{7\pi}{6} - 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z}; \quad x = \frac{7\pi}{24} - \frac{\pi l}{2}, \quad l \in \mathbf{Z}$ .

**22.** а)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\arctg 2 + \pi l, \quad l \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$ . Вказівка:

змініть  $\sin^2 z$  на  $\frac{1 - \cos 2z}{2}$ , а потім  $\cos 2z = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 z}{1 + \operatorname{tg}^2 z}$ ; д)  $\frac{\pi}{4} + \pi k,$

$k \in \mathbf{Z}; \quad \arctg(-1 \pm \sqrt{2}) + \pi l, \quad l \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi l, \quad l \in \mathbf{Z}$ .

**23.** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$ ,  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{2} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{\pi l}{3}$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{4} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Вказівка: понизьте степінь кожного до-

данка лівої частини:  $\cancel{x} - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2z\right) - \cancel{x} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2z\right) = 2\sin z$ ;

$-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos 2z - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2z\right) + \cos\frac{\pi}{4}\cos 2z + \sin\frac{\pi}{4}\sin 2z = 2\sin z$ ;

$2\sin\frac{\pi}{4}\sin 2z - 2\sin z = 0$ ;  $\frac{\cancel{2} \cdot \sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot 2\sin z \cos z - 2\sin z = 0$ ;

$2\sin z(\sqrt{2}\cos z - 1) = 0$ ; або  $\sin z = 0$ , або  $\cos z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**24.** а) Розв'язків немає; б)  $-\pi + 4\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; в)  $2\pi + 8\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; е) розв'язків немає.

**25.** а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{2\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  $\pi + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\arctg 5 + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; д)  $(-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; е)  $2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ . Вказівка:

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ , отже, рівняння набуває вигляду  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}$ ;  $2\sin\frac{\pi}{4}\cos x = \sqrt{2}$ ;  $\cos x = 1$ .

**26.** а)  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi k}{7}$ ,  $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi l}{3}$ ,  $k, l \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $2\pi l$ ,  $\frac{2\pi k}{5}$ ,  $n, l, k \in \mathbf{Z}$ ; г) вказівка: змініть  $\sin 2x \sin 6x$  на  $\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 8x)$ , тоді після зведення до спільного зна-

менника 4 одержуємо  $2\cos^2 4x - 2\cos 4x \cos 8x + \cos 12x = 0$ , або  $2\cos^2 4x - \cancel{\cos 12x} - \cos 4x + \cancel{\cos 12x} = 0$ ;  $\cos 4x(2\cos 4x - 1) = 0$ .

Відповідь:  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{2}$ ,  $n, l \in \mathbf{Z}$ ; д) вказівка:

$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = \cos 2x$ ;

$2\sin 10x \cos 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0$ ;  $\cos 2x(\sin 10x - \sin 2x) = 0$ .

Відповідь:  $\frac{\pi k}{4}$ ,  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi l}{6}$ ,  $k, l \in \mathbf{Z}$ ; е) вказівка: помножте

й розділіть ліву частину рівняння на  $\sin x$  (це можна зробити, тому що  $\sin x \neq 0$ ). Дійсно, якщо  $\sin x = 0$ , то  $x = \pi k$ , отже,  $\cos x = \cos 15x = \pm 1$ , а  $\cos 2x = \cos 4x = \cos 8x = 1$ . Тому ліва частина

рівняння дорівнює  $\pm 1$ , а права —  $\pm \frac{1}{8}$ ). Отже,  $x \neq \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , а ліва частина рівняння набуває вигляду:

$$\frac{8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x}{\sin x} = \frac{4 \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin 4x \cos 4x \cos 8x}{\sin x} = \frac{\sin 8x \cos 8x}{\sin x}; \quad \frac{2 \sin 8x \cos 8x}{2 \sin x} = \cos 16x;$$

$$\sin 16x = 2 \sin x \cos 15x; \quad \sin 16x = \sin 16x - \sin 14x; \quad \sin 14x = 0;$$

$$x = \frac{\pi l}{14}, \quad l \neq 14n. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi l}{14}, \quad l \neq 14n, \quad n, l \in \mathbf{Z}.$$

**27. а)**  $\pi + 2\pi k$ ,  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . Вказівка: змініть  $\sin x + \cos x$  на  $t$  (1), а потім піднесіть праву й ліву частини рівності (1) до квадрата. Отже,  $\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = t^2$ .  $\sin 2x = t^2 - 1$ .

Тоді вихідне рівняння набуває вигляду  $t^2 - 1 = 2(1+t)$ ;  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = -1$ . Оцініть  $t$ , для цього розділіть ліву й праву частини на  $\sqrt{2}$ :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \frac{t}{\sqrt{2}}$ ;  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ . Оскільки

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \quad \text{то } -1 \leq \frac{t}{\sqrt{2}} \leq 1, \quad \text{отже, що } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2},$$

тобто  $t_1 \neq 3$ , а  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \text{або} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}; \quad \text{б)} \quad 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbf{Z}; \quad \text{в)} \quad 2\pi n, \quad -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad -\frac{\pi}{4} \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + 2\pi l, \quad l \in \mathbf{Z};$$

$$\text{г)} \quad 2\pi n, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \text{д)} \quad \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{28. а)} \quad \left((-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n\right)^2, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad n \geq 0; \quad \text{б)} \quad \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{в)} \quad 6 \text{ розв'язків}; \quad \text{г)} \quad \pi + 2\pi l, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad l, n \in \mathbf{Z}; \quad \text{д)} \quad \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{7} + \pi l,$$

$$l \in \mathbf{Z}; \quad \text{е)} \quad \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{29. а)} \quad \arcsin \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \text{б)} \quad 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}; \quad \text{в)} \quad \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z}; \quad \text{г)} \quad -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad n, k \in \mathbf{Z}; \quad \text{д)} \quad \pi n, \quad \frac{\pi}{4} + \pi l, \quad l, n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{е)} \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{30. а)} \quad \frac{(-1)^n}{2} \arcsin(a+1) + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad \text{при } -2 \leq a \leq 0;$$

$$\text{б)} \quad -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad \text{при } -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2};$$

в) вказівка: подайте  $\cos 3x$  у вигляді виразу  $4\cos^3 x - 3\cos x$ , тоді  $4\cos^3 x - 3\cos x - a\cos x = 0$  і  $\cos x = 0$  при будь-яких  $a$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .  $4\cos^2 x - 3 - a = 0$ ;  $\frac{4(1+\cos 2x)}{2} = 3+a$ ;  $\cos 2x = \frac{1+a}{2}$ ;  
 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1+a}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  при  $-3 \leq a \leq 1$ . Відповідь: при  $a \in [-3; 1]$   
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1+a}{2} + \pi k$ ,  $n, k \in \mathbf{Z}$ ; при  $a < -3$  і  $a > 1$   
 $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pm \arccos(1 - \sqrt{1-a}) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , якщо  $a \in [-3; 1]$ ;  
розв'язків немає, якщо  $\left[ \begin{array}{l} a < -3, \\ a > 1; \end{array} \right.$  д)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  при будь-яких значеннях  $a$ ;  $(-1)^k \arcsin(a+2) + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  при  $a \in [-3; -1]$ ;  
е)  $-\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  при  $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ .

**31.** а) Розв'язків немає; б)  $\frac{6}{-\pi + 4\pi n}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\frac{4}{\pi + 2\pi k_2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;  
г)  $-1 \pm \sqrt{1+k}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $k \geq -1$ ; д) розв'язків немає; е)  $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

**32.** а)  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  
 $l \in \mathbf{Z}$ ;  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; в)  $2\pi m$ ,  $m \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\frac{\pi n}{3}$ ,  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$ ,  
 $n, k \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\frac{\pi}{4} + \pi l$ ,  $-\arctg \frac{5}{4} + \pi n$ ,  $l, n \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ .

**33.** а)  $(-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $l, n \in \mathbf{Z}$ ;  
в)  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pi n$ ,  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ,  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $n, m, k \in \mathbf{Z}$ ;  
д)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; е)  $2\pi n$ ,  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

**34.** а)  $\pi + 2\pi l$ ,  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $l, n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi n}{3}$ ,  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$ ,  $n, k \in \mathbf{Z}$ ;  
в)  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} + \pi l$ ,  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $n, l, k \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pi n$ ,  $\frac{\pi}{3} + \pi l$ ,  $n, l \in \mathbf{Z}$ ;  
д) розв'язків немає; е)  $(-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2}) + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

**35.** а)  $\pi + \arctg 2 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Вказівка: зверніть увагу, що  $\sin x \leq 0$ . Тільки в цьому випадку дане ірраціональне рівняння можна піднести до квадрата; б)  $\pi + \arctg\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;  
в)  $\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$ . Розв'язання:  $\cos \frac{15\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , тому дане рівняння зво-

диться до вигляду  $3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}-\cos x=3$ . Нехай  $\cos\frac{x}{2}=t$ ,  $-1\leq t\leq 1$ , тоді рівняння набуває вигляду  $2t^2-3\sqrt{2}t+2=0$ , де  $t\neq\sqrt{2}$ , або  $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $x=\pm\frac{\pi}{2}+4\pi n$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ . При  $n=0$   $x=\pm\frac{\pi}{2}$ ;  $\pm\frac{\pi}{2}\in[-2;10,99]$ . При інших значеннях  $n$  корені не потрапляють до зазначеного проміжку; г)  $\arccos(2-\sqrt{3})$ ;  $2\pi\pm\arccos(2-\sqrt{3})$ ;

д)  $-\frac{7\pi}{6}$ ; е)  $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ . Розв'язання:

$$\sqrt{2\sin^2\frac{x}{2}}+\sqrt{-\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}; \quad -\sin\frac{x}{2}\geq 0; \quad \sin\frac{x}{2}\leq 0;$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right|\sqrt{2}+\sqrt{-\sin\frac{x}{2}}=\sqrt{2}; \quad \text{тому що } \sin\frac{x}{2}\leq 0, \text{ то } \left|\sin\frac{x}{2}\right|$$

розкривається зі знаком «-», тобто  $-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+\sqrt{-\sin\frac{x}{2}}-\sqrt{2}=0$ ;

$$\sqrt{-\sin\frac{x}{2}}=t; \quad t\geq 0; \quad -\sin\frac{x}{2}=t^2, \text{ і рівняння набуває вигляду}$$

$$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0; \quad t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}}=\frac{-1\pm 3}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad -\sqrt{2}, \quad t>0, \text{ тобто}$$

$$\sqrt{-\sin\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad -\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}; \quad \sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}; \quad \frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, \quad n\in\mathbf{Z};$$

$$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}+2\pi n, \quad n\in\mathbf{Z}.$$

**36.** а)  $\left(2\pi n+\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ; б)  $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ;

в)  $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi l; \frac{3\pi}{4}+2\pi l\right]$ ,  $l\in\mathbf{Z}$ ; г)  $\left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ;

д)  $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ; е)  $-\frac{\pi}{2}+2\pi l$ ,  $l\in\mathbf{Z}$ .

**37.** а)  $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ; б)  $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi l; \frac{\pi}{3}+\pi l\right)$ ,

$l\in\mathbf{Z}$ ; в)  $\left(\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ; г)  $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ;

д)  $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi+\pi k\right)$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ ; е)  $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ ,  $k\in\mathbf{Z}$ .

**38.** а)  $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi l; \frac{\pi}{12}+\pi l\right)$ ,  $l\in\mathbf{Z}$ ; б)  $\left[\frac{15\pi}{4}+6\pi n; \frac{21\pi}{4}+6\pi n\right]$ ,

$n\in\mathbf{Z}$ ; в)  $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ ; г) розв'язків немає;

д)  $\left[\frac{7\pi}{30}+\frac{2\pi l}{5}; \frac{11\pi}{3}+\frac{2\pi l}{5}\right]$ ,  $l\in\mathbf{Z}$ ; е)  $\left[-\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$ ,  $n\in\mathbf{Z}$ .



39. а)  $\left[-\frac{5\pi}{12} + \pi l; \frac{5\pi}{12} + \pi l\right]$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\left[-\frac{5\pi}{48} + \frac{5\pi l}{4}; \frac{35\pi}{48} + \frac{5\pi l}{4}\right]$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;  
 в)  $\left[\frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}\right]$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\left[-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

40. а)  $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}\right) \cup$   
 $\cup \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi l\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l\right)$ ,  
 $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

41. а) Будь-які значення  $t$ , крім  $t = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

б)  $\left(\frac{13\pi}{36} + \frac{2\pi l}{3}; \frac{19\pi}{36} + \frac{2\pi l}{3}\right)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

г)  $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi l; \frac{7\pi}{4} + 2\pi l\right)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ .

42. а)  $(2\pi n; \pi + 2\pi n) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{11\pi}{6} + 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

б)  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{3\pi}{2} + 2\pi l\right)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\left(\pi l; \frac{\pi}{2} + \pi l\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + \pi l; \pi + \pi l\right)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;

г)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

е)  $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

43. а)  $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\arctg 3 + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ . Вказівка:

якщо  $\cos^2 x = 0$ , тоді  $\sin^2 x > 0$ , що при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$  є правильним для

будь-яких  $n \in \mathbf{Z}$ ; якщо  $\cos^2 x > 0$ , тоді ліву частину нерівності мож-

на розділити на  $\cos^2 x$ , тобто  $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 > 0$ ; б)  $\left(\pi l; \frac{\pi}{2} + \pi l\right)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

44. а)  $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

б)  $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\left(2\pi n; \frac{\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{2\pi}{5} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{5} + 2\pi n; \frac{4\pi}{5} + 2\pi n\right) \cup$

$$\cup \left( \frac{6\pi}{5} + 2\pi n; \frac{7\pi}{5} + 2\pi n \right) \cup \left( \frac{3\pi}{2} + 2\pi n; \frac{8\pi}{5} + 2\pi n \right) \cup \left( \frac{9\pi}{5} + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{г) } \left( \frac{\pi}{8} + \frac{\pi l}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2} \right) \cup \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}; \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi l}{2} \right), l \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{45. а) } \left[ -\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right], k \in \mathbf{Z}; \text{ б) } \left[ -\frac{\pi}{3} + \pi l; \frac{\pi}{3} + \pi l \right], l \in \mathbf{Z};$$

$$\text{в) } \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \right) \cup \left( \frac{7\pi}{12} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{г) } \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi l; \frac{\pi}{2} + 2\pi l \right), l \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{46. а) } \frac{\sqrt{2}}{4}; \text{ б) } 1; \text{ в) } 1; \text{ г) } 0; \text{ д) } \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \text{ е) } -1.$$

$$\mathbf{47. а) } \sin \frac{1}{3}; \text{ б) } -1; \text{ 0; в) } \frac{1}{2}; \text{ г) } 1; \text{ д) } \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Вказівка:  $\arctg(2 + \cos x) = \alpha$ ;  $\arctg\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right) = \beta$ ;  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ ;

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \text{tg} \frac{\pi}{4}; \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg} \alpha - \text{tg} \beta}{1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \beta}; \frac{2 + \cos x - 2\cos^2 \frac{x}{2}}{1 + (2 + \cos x) \cdot 2\cos^2 \frac{x}{2}} = 1;$$

$$\frac{2 + \cancel{\cos x} - 1 - \cancel{\cos x}}{3 + 3\cos x + \cos^2 x} = 1; \cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0; |\cos x| \leq 1; \cos x = -1;$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{48. а) } \frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin(a+1) + \pi k, k \in \mathbf{Z}; -2 \leq a \leq 0;$$

$$\text{б) } -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} + \pi n, n \in \mathbf{Z}; -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}; \text{ в) при } a \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$$

$$x = \pm \frac{1}{4} \arccos(4a - 3) + \frac{\pi l}{2}, l \in \mathbf{Z}; \text{ при } a \in \left( -\infty; \frac{1}{2} \right) \cup (1; +\infty) \text{ розв'язків}$$

$$\text{немає; г) } \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbf{Z} \text{ для будь-яких } a; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2-a}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{для } 0 \leq a \leq 4; \text{ д) } \cos(a+2) \text{ для } a \in [-2; \pi - 2].$$

$$\mathbf{49. а) } [-4; 2]; \text{ б) } [-1; 3].$$

$$\mathbf{50. а) } x \in \emptyset \text{ при } a < -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z} \text{ при } a = -1;$$

$$x \in [\pi - \arcsin a + 2\pi n; 2\pi + \arcsin a + 2\pi n], n \in \mathbf{Z} \text{ при } |a| < 1; x \in \mathbf{R}$$

$$\text{при } a \geq 1; \text{ б) } \left( \arctg a + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{51. а) } \left( 0; \frac{1}{2} \right]; \text{ б) } \left[ -1; -\frac{1}{2} \right); \text{ в) } \left[ -1; \frac{1}{2} \right); \text{ г) } \left[ -1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]; \text{ д) } (-1; \sqrt{3}].$$

24. а)  $4\pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; б) розв'язків немає; в)  $4\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г) розв'язків немає; д)  $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $n, k \in \mathbf{Z}$ ; е)  $-\frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

26. а)  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

г)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $\frac{\pi k}{5}$ ,  $n, k \in \mathbf{Z}$ ; д)  $\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\pm \frac{1}{4} \arccos \frac{1}{6} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

27. а)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ; б)  $2\pi n$ ,  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $n, l, k \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\pm \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $\frac{\pi}{3} + \pi l$ ,  $-\frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $n, l, k \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi l$ ,  $n, l \in \mathbf{Z}$ .

29. а)  $\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $-\arccos(\sqrt{3}-1) + 2\pi n$ ,

$n \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\pm \arccos(1-\sqrt{2}) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

д)  $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$ ,  $\pi n$ ,  $n, l \in \mathbf{Z}$ ; е)  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

30. а)  $(-1)^k \cdot \frac{1}{3} \arcsin(a-1) + \frac{\pi k}{3}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  при  $a \in [0; 2]$ ;

б)  $\frac{\pi}{8} + (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $a \in [-1; 1]$ ; в)  $\pm \arccos \frac{a + \sqrt{a^2+8}}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  при  $a \in (-\infty; -1]$ ;  $\pm \arccos \frac{a - \sqrt{a^2+8}}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  при  $a \in [1; +\infty)$ ;

г)  $(-1)^k \arcsin(-1 + \sqrt{1-a}) + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , при  $a \in [-3; 1]$ ; д) при всіх  $a$ :  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; при  $a \in [-3; -1]$   $x = (-1)^k \arcsin(a+2) + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

е)  $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin \frac{a}{\sqrt{2}} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$  при  $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ .

35. а)  $\pm \arccos \left( \pm \frac{\sqrt{2}-1}{2} \right) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\pm \frac{\pi}{3}$ ; г)  $\frac{\pi^2}{36}$ ; д)  $\frac{\pi}{3}$ ; е)  $\pi n$ ,  $\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ,  $n, l \in \mathbf{Z}$ .

41. а)  $\left[ 2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; б)  $\frac{3\pi}{8} + \pi l$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ;

в)  $\left( \frac{5\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}; \frac{9\pi}{16} + \frac{\pi n}{2} \right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ; г)  $\left( \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3}; \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi l}{3} \right)$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ .

42. а)  $\left( 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \cup \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ ;

б)  $\left[ -\frac{\pi}{3} + 2\pi l; \frac{5\pi}{6} + 2\pi l \right] \cup \left[ \frac{7\pi}{6} + 2\pi l; \frac{5\pi}{3} + 2\pi l \right]$ ,  $l \in \mathbf{Z}$ ; в)  $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

$$\text{г)} \left( -\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{3} + \pi k \right) \cup \left( \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbf{Z}; \text{д)} \left( \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{е)} \left( -\arctg 2 + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{43. а)} \text{ будь-яке } x; \text{ б)} \left( \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{в)} \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k \right) \cup \left( \frac{4\pi}{3} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), k \in \mathbf{Z}; \text{ г)} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{44. а)} \left( -\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n \right) \cup \left( \frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{б)} \left( -\pi + 3\pi l; -\frac{\pi}{2} + 3\pi l \right) \cup \left( \frac{\pi}{2} + 3\pi l; \pi + 3\pi l \right), l \in \mathbf{Z};$$

$$\text{в)} \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\} \cup \left[ -\frac{\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k \right] \cup \left[ \frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k \right], k \in \mathbf{Z};$$

$$\text{г)} \left( \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n \right) \cup \left( \frac{3\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right) \cup \left( \frac{5\pi}{8} + \pi n; \frac{7\pi}{8} + \pi n \right), n \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{45. а)} \left[ \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2} \right], n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{б)} \left( -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}; \text{ в)} \left( \frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n \right), n \in \mathbf{Z};$$

$$\text{г)} \left( \frac{\pi}{12} + 2\pi k; \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \right) \cup \left( -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k; -\frac{\pi}{12} + 2\pi k \right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\mathbf{48. а)} \pm \frac{4}{3} \arccos(a-1) + \frac{8\pi n}{3}, n \in \mathbf{Z} \text{ при } a \in [0; 2];$$

$$\text{б)} -\frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\right) + \pi n, n \in \mathbf{Z} \text{ при } a \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}];$$

$$\text{в)} \pm \frac{1}{6} \arccos(-a) + \frac{\pi l}{3}, l \in \mathbf{Z} \text{ при } a \in [-1; 1]; \text{ г)} \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbf{Z} \text{ для будь-яких } a;$$

$$\pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2-a}{2} + \pi n, n \in \mathbf{Z} \text{ для } a \in [0; 4]; \text{ д)} \sin 1 \text{ при будь-яких } a;$$

$$-\sin(a+2) \text{ при } a \in \left[ -\frac{\pi}{2} - 2; \frac{\pi}{2} - 2 \right].$$

$$\mathbf{49. а)} [3; 5]; \text{ б)} [-1; 25].$$

**50. а)** Якщо  $a < -1$ , то  $x$  — будь-яке; якщо  $a = -1$ ,

то  $x$  — будь-яке, крім  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ ; якщо  $-1 < a < 1$ ,

то  $x \in (-\arccos a + 2\pi l; \arccos a + 2\pi l), l \in \mathbf{Z}$ ; якщо  $a \geq 1$ , то розв'язків немає; б)

$$\left( -\frac{\pi}{2} + \pi k; \arctg a + \pi k \right), k \in \mathbf{Z}, \text{ для будь-яких } a.$$

$$\mathbf{51. а)} \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]; \text{ б)} \left[ -1; \frac{1}{2} \right]; \text{ в)} \left[ -1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right]; \text{ г)} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; 1 \right); \text{ д)} (-1; 0).$$

# ЗМІСТ

---

## ТРЕНУВАЛЬНІ ВПРАВИ, ТЕСТИ, КОНТРОЛЬНІ РОБОТИ

---

### Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності

ЧАСТИНА 1. МНОЖИНИ .....	5
Стислі теоретичні відомості .....	5
Тренувальні вправи .....	6
Тест 1. Множини .....	12
ЧАСТИНА 2. ЧИСЛОВІ ФУНКЦІЇ .....	15
Тренувальні вправи .....	15
Тест 2. Числові функції .....	24
Контрольна робота 1. Числові функції .....	28
ЧАСТИНА 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ .....	29
Тренувальні вправи .....	29
Тест 3. Розв'язування рівнянь і нерівностей .....	47
Контрольна робота 2. Розв'язування рівнянь і нерівностей .....	51

### Тема 2. Степенева функція

Стислі теоретичні відомості .....	53
Тренувальні вправи .....	54
Тест 4. Корінь $n$ -го степеня .....	78
Тест 5. Степінь із раціональним показником .....	81
Контрольна робота 3. Степенева функція .....	85

### Тема 3. Тригонометричні функції

Стислі теоретичні відомості .....	87
Тренувальні вправи .....	88
Тест 6. Тригонометричні функції .....	102
Тест 7. Тригонометричні функції .....	106
Контрольна робота 4. Тригонометричні функції .....	109

### Тема 4. Тригонометричні рівняння і нерівності.

#### Обернені тригонометричні функції

Стислі теоретичні відомості .....	111
Тренувальні вправи .....	111
Тест 8. Обернені тригонометричні функції .....	130
Тест 9. Тригонометричні рівняння і нерівності .....	133
Контрольна робота 5. Обернені тригонометричні функції .....	136
Контрольна робота 6. Тригонометричні рівняння і нерівності .....	137

---

## ВІДПОВІДІ

Тема 1. Функції, многочлени, рівняння і нерівності .....	140
Тема 2. Степенева функція .....	155
Тема 3. Тригонометричні функції .....	160
Тема 4. Тригонометричні рівняння і нерівності.	
Обернені тригонометричні функції .....	165

# Алгебра і початки аналізу

Збірник завдань для контролю знань

**10**  
КЛАС

## Учительська майстерність на профільному рівні

### Збірник завдань містить:

- 4 тематичні блоки з різнорівневими завданнями у 2 варіантах
- в одному тематичному блоці:
  - стислі теоретичні відомості
  - тренувальні вправи
  - самостійні роботи в тестовій формі
  - контрольні роботи

### Збірник завдань дозволяє:

- здійснити індивідуальний підхід до навчання
- організувати поточний і підсумковий контроль знань
- підготувати учнів до ЗНО

**Завітайте на сайт видавництва «Ранок»  
[www.ranok.com.ua](http://www.ranok.com.ua), де ви зможете:**

- ознайомитися з повним асортиментом видань;
- купити літературу за цінами видавництва;
- отримати свіжу інформацію про початкову та середню освіту;
- скористатися безкоштовною бібліотекою методичної літератури у «Клубі вчителів»;
- поспілкуватися з колегами та авторами видавництва на нашому Інтернет-форумі.

ВИДАВНИЦТВО  
**РАНОК**  
[www.ranok.com.ua](http://www.ranok.com.ua)

ISBN 978-611-540-677-7



9 786115 406777

**«Книга — поштою»**

61145 Харків, а/с 3355,  
«Ранок-пошта»

☎ (057) 717-74-55

Каталог надсилається безкоштовно